

Л.Л. ЄНКОВСЬКИЙ

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголобова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14б, Київ 03143; e-mail: jenk@bitp.kiev.ua)

УДК 539

ВІД ЕВКЛІДА ДО БГЛ¹

Виникнення неевклідової геометрії Бояі, Гаусса і Лобачевського (BGL) та її вплив на сучасну науку є предметом обговорення низки конференцій, що проводяться кожні два роки. В цій роботі я коротко нагадую її історію.

Ключові слова: неевклідова геометрія, Бояі, Гаусс, Лобачевський (БГЛ).

1. Пролог

Понад 2300 років тому великий грецький математик Евклід (*Ευκλείδης* грецькою мовою, Euclides латинською; в сучасній літературі ім'я, як правило, пишеться як Euclid) з Олександрії (нині Єгипет) заклав фундамент загальновідомої зараз геометрії. Вона базувалася на декількох постулатах або аксіомах. Усі, крім однієї, були прийнятні або як очевидні, або як логічно послідовні. Винятковим був 5-й постулат про паралельні лінії. Доведення цього постулату стало проблемою з тих часів, як була заснована евклідова геометрія, хоча сама геометрія не ставилася під сумнів. Її прийняли, серед інших, Ісаак Ньютон, Леонардо да Вінчі, Галілео Галілей, Йоганн Кеплер, Жозеф-Луї Лагранж та Іммануїл Кант. Лише в першій половині XIX століття три великі людини, Я. Бояі, Й.К.Ф. Гаусс і Н.Л. Лобачевський (БГЛ за алфавітом, рис. 1) одночасно і незалежно прийшли до істини. Нові досягнення і особисті драми їх головних поборників стали мотивацією проведення в 1997 році в Ужгороді, Україна, конференції з неевклідової геометрії і її застосувань у фізиці та математиці. Успіх цієї конференції надихнув організаторів продовжити цю справу – з'явилась низка конференцій, які проводяться кожні два роки в різних місцях, пов'язаних з іменами засновників Нової Геометрії. Головним організатором цієї

серії конференцій став Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголобова Національної академії наук України. Серед засновників і активних промоутерів конференцій були академік Іштван Ловаш (Будапешт), професори Елемер Кіш (Морошваргей – Тургу Муреш), Н.А. Черніков (Дубна) і Г.М. Полотовський (Нижній Новгород) – експерти з даної проблематики. За історією серії конференцій можна простежити, користуючись адресою <https://indico.cern.ch/event/586799/page/8964-former-bgl-conferences> та посиланням [2]. Успіх цієї серії зустрічей значною мірою зумовлений вибором теми, учасників та стилю (“ключач”) конференцій, що об'єднують фізику, математику, історію, а також людей, що приїжджають як зі Сходу, так і з Заходу.

2. Попередники

Згадуючи останній, п'ятий постулат, Евклід, до речі, сам натякав на певний його недолік. Велика кількість грецьких, арабських математиків, дослідників часів епохи Відродження та інших намагалися довести, спростувати, узагальнити або замінити постулат, про який йде мова. Інтерес до геометрії посилювався в 17–18 століттях, обумовив-

¹ Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції “XI Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2019): Non–Euclidean, Noncommutative Geometry and Quantum Physics.”



Рис. 1. Я. Бояї, Й.К.Ф. Гаусс та М.І. Лобачевський

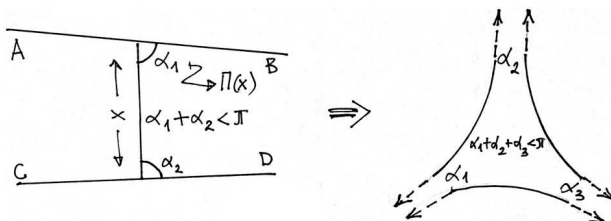


Рис. 2. Візуалізація неевклідової геометрії

ши значний поступ у 19 столітті. До БГЛ принаймні двоє чоловіків наблизилися до концепції нової геометрії. Одним з них був Джіроламо Сакері, італійський монах, який у своїй “Демонстративній логіці” зробив правильний крок в усвідомленні проблеми. Ідея була детальніше розроблена у його роботі “Euclides ab omni naevo vindicatus” (“Евклід без будь-яких сумнівів”), опублікованій у 1697 році. Робота Сакері не залишилася непоміченою: вона стала відомою, наприклад, у Геттінгені завдяки детальному розгляду в дисертації Клюгеля (студента професора А. Костнера) “Conatum praecipuum theoriam parallelarum demonstrandi recensio”. Пізніше, у 1766 році, підхід Сакері знайшов подальший розвиток завдяки Ламберту. Між 1807 і 1816 роками Швайкерт, німецький юрист з Харкова (!), розвинув свою версію неевклідової геометрії, яку назвав “Astralische Geometrie” (натякаючи на космічні масштаби, на яких відхилення від евклідової геометрії могли б бути помітними). Швайкерт, математик-любитель, не використовував ніякого формалізму, його ідеї були математично оформлені племінником Тавриносом, який у 1826 р. опублікував свою “Geometria prima elementa”, в якій “логосферичний” формалізм, що передував Боляї і Лобачевському, був використаний для доведення 5-го постулату Евкліда. Гаусс був знайомий з роботами Швайкерта і Тавриноса.

970

3. Бояї, Гаусс і Лобачевський

У новій геометрії сума внутрішніх кутів уже не становить π (рис. 2). Вона може бути меншою – залежно від довжини сторін. Новий “кут паралелізму” $\Pi(x)$ (еквівалент $\pi/2$ в евклідовому випадку) пов’язаний з відстанню x , див. рис. 2,

$$\operatorname{ctg}\Pi(x)/2 = q^x, \quad (1)$$

де q – параметр.

Кривина на правій панелі рис. 2 підкреслена (посилена) для наочності. Я. Бояї, К.Ф. Гаусс та М.І. Лобачевський усвідомлювали, що будь-які відхилення від евклідової геометрії у видимому Всесвіті не спостерігаються. Звідси зрозуміла поява епітета “нова” (“абсолютна”, “уявна”, “пан”, ...) геометрія, а також причина, чому сучасники настільки неохоче сприймали вочевидь абстрактні побудови.

Виглядає дивним – як проблема, що залишалася відкритою протягом тисячоліть, могла бути вирішеною практично одночасно (протягом десятиліття) незалежно трьома людьми, які ніколи не зустрічалися і не спілкувались (дивись їх (спрощені) світові лінії на рисунку в останньому розділі).

3.1. Йоган Карл Фрідріх Гаусс

Найстарший серед БГЛ народився 30 квітня 1777 року в місті Брауншвейг [4]. У 1795 році він вступив до Геттінгенського університету, де його найближчим другом під час навчання став Форкош Бояї (батько Яноша). Після 3-х років навчання у Геттінгені Форкош повернувся на батьківщину у Трансільванію, де він став викладачем математики в Моршвахаргеї. Дружба між Форкошем і Карлом Фрідріхом, проте, тривала десятиліттями завдяки інтенсивному обміну поштовими листами, які містять цінну інформацію для історії науки.

У 1804 році Форкош надіслав Гауссу “доказ” 5-го постулату. У своїй відповіді Гаусс вказав на помилку свого друга у доведенні, додавши, що сам він також сподівається на прогрес у вирішенні цієї проблеми. Дивно, що в 1846 р. Гаусс, коментуючи “Geometrische Untersuchungen” Лобачевського, написав Шумахеру, що він не виявив у роботі Лобачевського “нічого нового”.

У 1815 році в коментарі до книги Меттерніка він писав: “... ми повинні визнати, що не в змозі просунутися вперед порівняно з геометрією Евкліда,

якій вже 2 тисячі років”. Більше того, у листі до Олберса (28.04.1817) він пише, що “геометрія не може бути доведена людським інтелектом”.

Швайкерт опублікував свою працю про паралельні “Astralische Geometrie” у 1807 р. і розвивав її після переїзду з Харкова до Марбурга. Робота Гаусса була стимульована значною мірою листом Швайкерта 1819 р., в якому Швайкерт повідомляв Гаусса про свою геометрію. Таурінос продовжував свою роботу в Росії 1924 р. у тісному контакті з Гауссом. Як згадувалося вище, Швайкерт і Таурінос зупинилися на півдорозі, будучи незможні відмовитися від евклідового способу міркування.

Після 1816 р. Гаусс, частково зайнятий практичними проблемами, починає працювати над геодезією, і в 1828 р. видає свій відомий твір про диференціальну геометрію (викривлені простори). Лише Белтрані у 1868 році запропонував інтерпретацію неевклідової геометрії в термінах поверхонь з негативною кривиною.

У 1832 р. Гаусс дізнався про твір Яноша Бояї завдяки Форкошу, а в 1840 р. він визнає роботу Лобачевського “Geometrische Untersuchungen”. Цього ж року він починає вчити російську мову; в його бібліотеці був знайдений “Борис Годунов” О.С. Пушкіна в оригіналі.

Гаусс не опублікував жодної статті про неевклідову геометрію. У різних випадках, наприклад, в його листах, він у приватному порядку хвалив і Лобачевського, і Яноша Бояї за їхній внесок у розвиток нової геометрії, але ніколи не цитував їх досягнення публічно! У 1842 р. Лобачевський був висунутий до членства в Науковому товаристві Геттінгена, однак у рекомендації Гаусса робота Лобачевського з геометрії не згадувалася.

3.2. Микола Іванович Лобачевський

народився у Нижньому Новгороді (де, до речі, народився також М.М. Боголюбов) 20 листопада 1792 року [3]. Його навчання та професійна кар’єра пов’язані з містом Казань, наступним великим містом за течією Волги. Перша презентація його “нової геометрії” відбулася на кафедрі фізико-математичних наук Казанського університету 7 лютого 1826 року. Офіційне прохання кафедри опублікувати цю презентацію під назвою “Короткий виклад принципів геометрії” (французь-

кою) був відхилений місцевим виданням “Ученые записки”. Оригінальний рукопис був загублений.

У 1827 році Лобачевський був обраний ректором Казанського університету. Перша публікація нової геометрії датована 1829 р., коли “Казанський вестник” опублікував роботу Лобачевського “Про принципи геометрії” (російською мовою). У 1932 році ця робота була передана до Російської Академія наук (у Петербурзі). Вона була піддана рецензуванню та відхилена М.В. Остроградським, чий висновок був абсолютно негативним. Більше того, у 1834 р. журнал “Сын отечества” опублікував іронічний анонімний памфлет, який жорстко критикував автора нової геометрії.

Ці невдачі не відлякали Лобачевського. Він продовжує писати та публікувати, серед інших робіт – “Geometrische Untersuchungen” німецькою мовою. Нарешті за рік до смерті, хворий і сліпий, він продиктував свою “Пангеометрію”, опубліковану в 1855 р. російською мовою, за якою був зроблений французький переклад, виданий у 1856 році. Бояї і Гаусс ознайомилися з “Geometrische Untersuchungen”. Форкош у своїй книзі 1851 р. і Гаусс (у приватному листі) оцінили і похвалили твір автора, на той момент ще живого. Тим не менше, Лобачевський ніколи не отримував суспільного визнання за життя. Він помер 12 лютого 1856 р., у бідності.

3.3. Янош Бояї²

був наймолодшою і, можливо, найтрагічнішою людиною серед БГЛ. Народився в Коложварі (1802), переїхав у 1804 р. разом із батьком Форкошем у Морощваргей, обидва міста знаходяться в Трансільванії (нині Румунія), дивись на карті, рис. 3.

У 1818 р. його батько просив свого друга К. Гаусса підтримати подальше навчання Яноша в університеті Геттінгена, але чомусь Гаусс не захотів цього зробити. Тому Янош пішов до Інженерної Академії у Відні, після закінчення якої його призначили офіцером митниці у Темешварі.

У 1820 році він повідомив батькові, що знайшов спосіб довести 5-й постулат Евкліда. Форкош не радив своєму синові займатись тим, що сам вважав безнадійним.

² В угорській мові, на відміну від інших європейських мов, прізвище йде перед іменем.



Рис. 3. Угорщина часів Бояї. Суцільна стрілка вказує на батьківщину Бояї, а пунктирна стрілка – на Ужгород (Ungvár), місце першої зустрічі БГЛ у 1997 році. Сьогоднішня Угорщина показана білим кольором

Незважаючи на поради батька, Янош продовжував свої зусилля, і в 1824 р. вивів співвідношення між довжиною перпендикуляра і кутом асимптоти. “Я створив світ із нічого”, – заявив він батькові. Можна побачити з його рукописів, ескізів та листів, що вже в 1820 р. він був на правильному шляху до розгляду границі великого кола. Більша частина виконаної Яношем Бояї роботи залишилася неопублікованою. Рукописи можна знайти [5] у бібліотеках і музеях, наприклад, у Морощвашаргеї.

У лютому 1825 р. Янош надіслав свій рукопис батькові. Форкош не зміг відмовитися від старої геометрії, марні спроби доведення якої забрали частину його життя. Неохоче знайомлячись з ідеями сина, він шукав можливі недоліки в роботі Яноша. Нарешті, у лютому 1829 р. він погодився опублікувати результати сина як додаток до його власної книги “Tentamen Juventutem...”, курс математики для молоді. Додаток (латинською мовою) мав назву “Appendix scientium spatii absolute veram exhibeus”. Книга з’явилася в 1831 році. Копія, негайно надіслана Форкошем до Гаусса, не дійшла до одержувача: район був охоплений епідемією холери. Ще одна копія надійшла до адресата на початку 1832 року. Гаусс відреагував негайно, у березні 1832 р. Відповідь була роковою для Яноша. “Ти можеш бути здивований, – написав він, – що я не буду хвалити роботу твого сина, оскільки похвала для неї означала б похвалу для мене ... його ідеї майже збігаються з

моїм мисленням протягом останніх 30–35 років... Сам я теж мав намір опублікувати ці результати, але як тільки син мого друга це зробив, я почуваюся вільним від цього обов’язку”. Вищезгаданому листу передував ще один, до Герлінга, в якому Гаусс хвалить Яноша як генія першої категорії.

Лист Гаусса до Форкоша порадував батька, але не його сина. Янош запідозрив, що його ідеї були вкрадені. Більше того, у 1848 році він отримав “Geometrische Untersuchungen” Лобачевського, і навіть запідозрив, що “Лобачевський” – це псевдонім, під яким приховується Гаусс. Після першого шоку і, як результат, депресії, він почав уважно читати роботу Лобачевського, яка була насправді дуже близькою за духом до того, що зробив Янош.

Рідна мова Бояї, якою він користувався у спілкуванні і листуванні, – угорська, хоча свої наукові праці він писав латиною чи німецькою мовою. Янош вільно володів італійською та французькою мовами, був знайомий з китайською та тибетською. Він працював над спробами реформування угорської мови з метою адаптації її до наукових текстів. (NB: Обов’язковою умовою до кандидата на вступ до Угорської академії наук була публікація угорською мовою). Він вірив що угорська, завдяки своїй граматиці, є ідеальною основою для майбутньої загальнонаукової мови [6]. Її базою повинна бути семантика (символіка). Янош був одержимий так званими “кореневими словами” (gyökszavak) або гомонімами, характерними виключно для угорської мови. Він аргументував це порівнянням угорської з латинською та німецькою мовами, наприклад, у фразі:

Péter ember

Petrus est homo

Peter ist ein Mensch.

Він намагався зафіксувати, як у математиці, неоднозначності, тобто встановити однозначну відповідність між словами (символи = семіотика) та поняттями. Однак існує протиріччя між простими словами-символами і складною угорською граматиною (наприклад, у дієвідмінах і відмінках). (Дивись [6] для додаткової інформації з цього приводу.) Відносно новий розвиток цього напрямку пов’язаний з використанням сучасних засобів зв’язку (комп’ютерів, Інтернету, електронної пошти тощо), де нові (телеграфні) мови розробляються са-

мі собою (скорочення, нехтування акцентами, так звані “лайки” тощо).

Янош також був чудовим скрипалем і хорошим фехтувальником.

Його спадщина складається з понад 15 000 сторінок рукописів, написаних в спеціальних кодах, що зберігаються в бібліотеці Телекі в Морошваргеї. Елемер Кіш зробив свій значний внесок [5] у їх декодифікацію. Не завжди зрозуміло, чи це стенографічний текст (стенографія), чи гомоніми.

4. Послідовники

Наступний прорив стався завдяки синтезу неевклідової та диференційної геометрії та теорії поверхні, що вирішило проблему однозначності нової геометрії – головної перешкоди на шляху до її утвердження. Метрика, геодезичні, кривина тощо забезпечили класифікацію та інтерпретацію для нової геометрії. Бернгард Ріман (1826–1866) у своїх інавгураційних лекціях 1854 року, прочитаних в університеті Геттінгена і виданих у 1854 р., вводить поняття множини (многовиду), елементами якої є точки простору. Геометрія многовиду визначається квадратом відстані між нескінченно близькими точками:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n q_{ij} dx_i dx_j, \quad (2)$$

де $q_{ij}(x)$ - метричний тензор. Наведене співвідношення визначає метрику Рімана в межах геометрії простору Рімана. Геометрії класифікуються за їх кривиною K : для $K > 0$ вона називається рімановою (або еліптичною) геометрією, а $K < 0$ відповідає неевклідовій геометрії БГЛ.

Лоренц, Пуанкаре, Мінковський та Ейнштейн зробили свій внесок, переклавши нову геометрію на загальнофізичну мову. Чотиривимірний простір Лоренца і псевдоевклідова метрика

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \quad K = 0 \quad (3)$$

лежать в основі сучасної фізики, зокрема, теорії відносності, що приводить, наприклад, до співвідношення між масою та енергією

$$E = mc^2 \quad (4)$$

з глобальними наслідками для людства.

Космологія, історія Всесвіту також будуються на основі нової геометрії. Радянський фізик

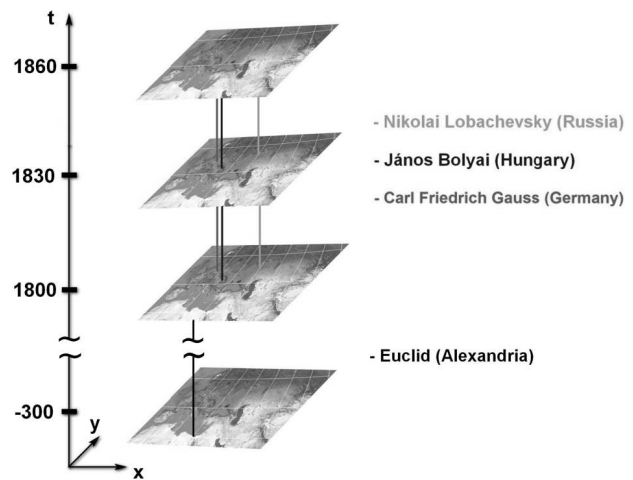


Рис. 4. Географія у часі: спрощені (випрямлені) світові лінії Евкліда, Яноша Бояї, Гаусса і Лобачевського. Їхні паралельні ніколи не перетиналися

А.А. Фрідман (1888–1925) у 1922 р. знайшов спеціальний розв’язок рівняння Ейнштейна в термінах метрики Бояї–Лобачевського і передбачив розширення (інфляцію) нашого Всесвіту, підтверджену в 1929 р. (Хаббл).

Нова геометрія збагатила природничі науки концептуально, хоча ефекти кривини незначні в межах спостережуваних відстаней. Лобачевський запропонував астроному Струве експериментальні перевірки на основі вимірювання кутових відстаней (паралаксу) зірок. Він запропонував також розрахунок визначених інтегралів по поверхнях і об’ємам, що простягаються до нескінченності. Близько 200 інтегралів, обчислених таким чином, доступні в підручниках та таблицях.

Сучасна галузь неевклідової геометрії пов’язана з так званими квантовими групами або q -деформаціями.

5. Епілог

Раптове народження одночасно, але в різних місцях, нової геометрії після тисячі років спокою – здається майже загадковим. Таємничою є також доля її творців, які мислили майже однаково, хоча і проживали в один період на одному континенті, однак не були знайомі один з одним (див. рис. 4).

Конференції БГЛ зазвичай включають оглядові доповіді і дискусії з історії та стосовно біографії Бояї, Гаусса та Лобачевського, їхнє відношення

до вчителів та послідовників. Пріоритет відкриття нової геометрії ніколи не ставився під сумнів на конференціях. Усі троє заслуговують на визнання. І Яноша Бояї, і М.І. Лобачевського з різних причин спіткали невдачі у своєчасному опублікуванні їх відкриттів. Однак цей факт не може виправдати будь-які суперечки щодо пріоритетів. Гаусс не опублікував жодної статті про неевклідову геометрію, але його репутація була настільки незаперечною, що ніхто не сумнівається, що він "це знав". Досить унікальна ситуація в історії науки?! Алфавітний порядок в аббревіатурі БГЛ був прийнятий на серії конференцій від самого їх початку і ніколи не ставився під сумнів, що, однак, не завадило виступаючим мати особисті уподобання та різні точки зору.

На попередніх конференціях БГЛ переважали угорські та українсько-російсько-білоруські організатори та учасники, доповнені учасниками з інших країн. Співвітчизники Гаусса, ласкаво просимо на майбутні зустрічі БГЛ! Серія конференцій БГЛ має певний Середньоєвропейський (Mittleuroäische) дух, збагачений участю представників далеких країн.

Я мав задоволення і дуже велику користь від спілкування з учасниками засідань БГЛ, де я познайомився з такими особистостями, як А.Н. Боголюбов (видатним експертом з історії науки, братом Миколи Миколаєвича), Іштван Ловаши, Елемер Кіш, Н.А. Чернікова та багатьма ін-

шими, відкрив для себе нові світи, такі як Трансільванія та Поволжя – місця проведення БГЛ-конференцій і родючі місця, де народжуються великі люди.

Дякую організаторам цієї зустрічі за запрошення представити дану доповідь.

1. <https://indico.cern.ch/event/586799/page/8964-former-bgl-conferences>.
2. L.L. Jenkovszky. *BGL conferences: a brief history, Acta Physica Debrecina, TOMUS XLII, Rediged Zoltán Trócsányi, 2008.*
3. *Nikolai Ivanovich Lobachevskii* (Kazan' University, 1979) (in Russian).
4. W.K. Bühler. *Gauß. A Biographic Study* (Springer, 1981).
5. K. Elemér. *Matematikai Kincsek Bolyai János Kéziratai Hagyatékaiabol* (Akadémiai kiadó, 1999) (available also in English).
6. Marác Sándor, *Bolyai János és a Magyar Mint Tökéletes Nyelv*. <http://kincseslada.hu/magyarsag/content.php?article.328>.
7. <https://indico.cern.ch/event/586799/contributions/2695991/attachments/1512907/2359928/Jenkovszky.pdf>.

Одержано 10.09.19

L. Jenkovszky

FROM EUCLID TO BGL

S u m m a r y

The emergence of the new non-Euclidean geometry of Bolyai, Gauß, and Lobachevskii (BGL) and its impact on modern sciences is the subject of a series of biennial conferences. Below, I briefly review the history.