В.В. КУЗЬМИЧОВ, В.Є. КУЗЬМИЧОВ
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14б, Київ 03143; e-mail: vkuzmichev@bitp.kiev.ua)

УДК 531.51, 530.145

КВАНТОВІ ПОПРАВКИ ДО ДИНАМІКИ ГРАВІТАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ[1]

Дано короткий вступ до теорії квантових гравітаційних систем зі скінченною кількістю ступенів вільності. Теорія заснована на методі квантування систем із в'язями. Вектор стану системи задовольняє набору хвильових рівнянь, який описує еволюцію системи у часі в просторі квантових полів. У такому підході вектор стану можна нормувати на одиницю. Теорія дозволяє зробити узагальнення на область від'ємних значень масштабного фактора і, при застосуванні до космології, веде до нового розуміння еволюції всесвіту. Теорія дає розуміння причин, через які режим розширення може змінюватися від прискорення до уповільнення або навпаки, виявляючи новий тип квантових сил, що діють у всесвіті подібно до темної матерії та темної енергії.

Ключові слова: квантова гравітація, квантова геометродинаміка, космологія.

1. Вступ

Метод квантування систем із в'язями може бути взятий за основу квантової теорії гравітації, придатної для дослідження космологічних та інших квантових гравітаційних систем. Канонічний підхід до квантування, який виявився успішним при побудові нерелятивістської квантової механіки та квантових теорій поля у пласкому просторі-часі, стикається з добре відомими труднощами при його застосуванні до гравітації, а саме з проблемою опису еволюції у часі, проблемою нормування векторів стану, проблемою вимірювання та іншими.

Наочним проявом проблеми часу є відсутність параметру часу у явному вигляді у рівнянні Уілера–ДеВітта, яке розглядається як основне динамічне рівняння теорії. Було усвідомлено, що одним зі шляхів до вирішення цієї проблеми може бути переформулювання класичних рівнянь в'язі з метою отримання рівняння типу Шредінгера до квантування. Доведено, що загальна теорія відносності не може розглядатися як параметризована теорія поля [1]. Концепція "матеріального годинника та відлікових рідин" [2, 3] бере початок з праць ДеВітта [4], в яких вивчався зв'язок годинників з пружним середовищем. Можна показати, що ідеальні рідини являють собою частковий випадок релятивістських пружних середовищ ДеВітта [5]. Поняття відлікової рідини дозволяє задати систему відліку як динамічну систему. На просторово-часову геометрію впливає відлікова рідина, яка розглядається як справжня матеріальна система, пов'язана з гравітацією. Як наслідок, в'язі та рівняння Гамільтона набувають нової форми.

Для розв'язання проблем квантової гравітації можна звернутися до моделі зі скінченною кількістю ступенів вільності. Однорідні моделі мінісуперпростору виявились успішними в класичній космології, тобто сумісними зі спостереженнями та такими, що мають прогностичну силу. Це є зрозумілим, оскільки Всесвіт, у першому наближенні, може розглядатися як однорідний, та дає надію на те, що однорідні моделі зможуть бути корисними і в квантовій космології.

У найпростішому випадку максимально симетричної геометрії з метрикою Робертсона–Вокера геометричні властивості системи визначаються однією змінною, а саме космічним масштабним фактором a. Сектор матерії однорідної ізотропної гравітаційної системи може бути взятий у формі однорідного скалярного поля ϕ. Це поле можна інтерпретувати як сурогат усіх можливих справжніх фізичних полів матерії, усереднених по спіну, простору та іншим ступеням вільності. Додатково приймемо, що система містить відлікову рі-

© В.В. КУЗЬМИЧОВ, В.Є. КУЗЬМИЧОВ, 2019

[1] Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції "XI Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2019): Non–Euclidean, Noncommutative Geometry and Quantum Physics."

дину у формі релятивістської матерії (яку надалі будемо називати випромінюванням). Ми застосовуємо до квантової гравітації підхід Дірака, а саме не розв'язуємо рівняння в'язі до квантування, а натомість перетворюємо в'язі другого роду у в'язі першого роду, які стають в'язями на вектор стану (хвильову функцію) у квантовій теорії. У цій теорії вектор стану задовольняє системі хвильових рівнянь, які описують еволюцію у часі квантової системи в узагальненому просторі квантових полів.

2. Основні рівняння та квантування

Гамільтоніан гравітаційної системи має вигляд (у планківських одиницях)

$$H = \frac{N}{2}\left\{-\pi_a^2 - \kappa a^2 + a^4[\rho_\phi + \rho_\gamma]\right\} + \\ + \lambda_1\left\{\pi_\Theta - \frac{1}{2}\,a^3\rho_0 s\right\} + \lambda_2\left\{\pi_{\tilde\lambda} + \frac{1}{2}\,a^3\rho_0\right\}, \quad (1)$$

де π_a, π_Θ, $\pi_{\tilde\lambda}$ – імпульси, канонічно спряжені до змінних a, Θ, $\tilde\lambda$; ρ_ϕ – густина енергії матерії (поля ϕ), $\rho_\gamma(\rho_0, s)$ – густина енергії ідеальної рідини, яка задає матеріальну систему відліку та є функцією густини маси спокою ρ_0 та питомої ентропії s; Θ – термічність, яка визначає температуру, $\mathcal{T} = \Theta_{,\nu}U^\nu$; U^ν – 4-швидкість; $\tilde\lambda$ – потенціал питомої вільної енергії Гіббса $\mathcal{F}$, взятий з оберненим знаком, $\mathcal{F} = -\tilde\lambda_{,\nu}U^\nu$. Стала $\kappa = +1, 0, -1$ є константою кривизни. Величини N, λ_1 та λ_2 – множники Лагранжа [6, 7].

Гамільтоніан є лінійною комбінацією в'язей та слабко дорівнює нулю, $H \approx 0$. Варіації гамільтоніана по N, λ_1 та λ_2 дають трі рівняння в'язі.

У квантовій теорії рівняння в'язей першого роду стають в'язями на вектор стану Ψ та визначають простір фізичних станів. Переходячи від класичних змінних до відповідних операторів, використовуючи рівняння збереження та вводячи некоординатний базис $hd\tau = sd\Theta - d\tilde\lambda$, $hdy = sd\Theta + d\tilde\lambda$, де h – питома ентальпія, τ – власний час, а y – додаткова змінна, отримаємо [6, 7]

$$\left(-i\partial_T - \frac{1}{2}E\right)\Psi = 0, \quad \partial_y\Psi = 0, \\ \left(-\partial_a^2 + \kappa a^2 - 2a\hat{H}_\phi - E\right)\Psi = 0, \quad (2)$$

де $\hat{H}_\phi$ – оператор гамільтоніана поля матерії, а $d\tau = adT$, $E = \rho_\gamma a^4 = \mathrm{const}$.

3. Загальний розв'язок

Гамільтоніан матерії $\hat{H}_\phi$ можна діагоналізувати за допомогою певних векторів стану $\langle\chi|u_k\rangle$ у представленні узагальненої польової змінної $\chi = \chi(a, \phi)$

$$\langle u_k|\hat{H}_\phi|u_{k'}\rangle = M_k(a)\,\delta_{kk'}, \quad (3)$$

що визначає власну енергію $M_k(a) = \frac{1}{2}a^3\rho_m$ баротропної рідини у дискретному та/або неперервному k-му стані у супутньому об'ємі $\frac{1}{2}a^3$ з густиною енергії ρ_m.

Проста модель матерії у формі скалярного поля з потенціалом $V(\phi) = \lambda_\alpha\phi^\alpha$, де λ_α – константа зв'язку, а α приймає довільні невід'ємні значення, $\alpha \geq 0$, дозволяє описати різні епохи у еволюції всесвіту, який розглядається як квантова система. У випадку ϕ^0-моделі поле ϕ, усереднене по своїм квантовим станам, відтворює вакуум (темну енергію) у k-му стані (епоха прискореного розширення). Модель ϕ^1 описує струни у k-му стані (доба формування космологічної клітинної структури). У моделі ϕ^2 скалярне поле після усереднення по квантовим станам перетворюється на пил з повною масою $M_k = \sqrt{2\lambda_2}(k + \frac{1}{2})$, де k – кількість пильових частинок (епоха нерелятивістської матерії). Модель ϕ^4 приводить до релятивістської матерії (епоха до рекомбінації). У випадку $\alpha = \infty$, поле ϕ, усереднене по станам $|u_k\rangle$, зводиться до матерії з гранично жорстким рівнянням стану Зельдовича (нульова константа зв'язку).

Вектор стану Ψ у (a, χ)-представленні можна записати у формі суперпозиції всіх можливих k-станів баротропної рідини $\Psi = \sum_k |u_k\rangle\langle u_k|\Psi\rangle$, де $\langle u_k|\Psi\rangle \equiv \psi_k(a, T)$ задовольняє диференціальним рівнянням

$$\left(-i\partial_T - \frac{1}{2}E\right)\psi_k(a, T) = 0, \\ \left(-\partial_a^2 + \kappa a^2 - 2aM_k(a) - E\right)\psi_k(a, T) = 0. \quad (4)$$

Загальний розв'язок системи (4) має вигляд

$$\psi_k(a, T) = \sum_n c_{nk}(T) f_{nk}(a), \quad (5)$$

де

$$c_{nk}(T) = c_{nk}(T_0)\exp\left\{i\frac{1}{2}E_n(T - T_0)\right\} \quad (6)$$

та мається на увазі підсумовування по дискретним значенням n та інтегрування по неперервним станам.

Хвильові функції $f(a) \equiv f(a, T_0)$ задовольняють рівнянню

$$\left(-\partial_a^2 + \kappa a^2 - 2aM_k(a) - E\right) f(a) = 0, \tag{7}$$

де $f(a) = f_{nk}(a)$ та $E = E_n$ для дискретного n-го стану випромінювання та $f(a) = f_{Ek}(a)$ для неперервного E-го стану випромінювання, T_0 – довільна константа, взята за точку початку відліку часу. Коефіцієнт $c_{nk}(T_0)$ визначає імовірність $|c_{nk}(T_0)|^2$ знайти систему в n-му та k-му станах у момент часу T_0.

Вектор стану Ψ є нормованим, $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$, за умови, що сума імовірностей по всіх можливих квантових станах випромінювання і баротропної рідини дорівнює одиниці.

Для матерії, представленої скалярним полем з $\hat{H}_\phi(-a) = -\hat{H}_\phi(a)$, рівняння (2) є інваріантними відносно інверсії $a \to -a$. Фізичний зміст розв'язків рівняння (7) в області $a < 0$ з'ясовується завдяки виразу

$$T(\tau) = T_0 + \int\limits_0^\tau \frac{d\tau'}{a(\tau')}, \quad \text{для } T(0) = T_0. \tag{8}$$

Звідси випливає, що $T(\tau) = T(-\tau)$ при $a(-\tau) = -a(\tau)$.

Масштабний фактор $a \in (-\infty, 0]$ відповідає значенням $\tau \in (-\infty, 0]$, а для $a \in [0, +\infty)$ маємо $\tau \in [0, +\infty)$. Як наслідок, для стріли часу, спрямованої з $\tau = -\infty$ до $\tau = +\infty$, вектор стану Ψ описує квантову гравітаційну систему, яка стискається на півосі $a < 0$, оскільки $|a|$ зменшується, та розширюється на півосі $a > 0$, де $|a|$ зростає.

Момент часу $\tau = 0$ можна інтерпретувати як момент народження квантової системи, яка розширюється у часі з точки $a = 0$, проте жодного народження "з нічого" фізично не відбувається. В момент $\tau = 0$ відбувається зміна режиму від попереднього стискання системи на режим наступного розширення. Вектор стану містить усю інформацію про систему в цілому: поперечний переріз $|a| = \text{const}$ визначає квантовий стан системи в момент часу τ, коли масштабний фактор набуває цього значення.

Якщо застосувати описаний вище сценарій до нашого всесвіту у планківську добу, розглядаючи перехід через точку $a = 0$ при $\tau = 0$ як народження всесвіту, що розширюється на півосі $a > 0$ при $\tau > 0$, тоді можна дати відповідь на питання: "Що було з квантовою системою до моменту народження всесвіту нашого типу (який розширюється)?". Існував інший всесвіт з тими ж самими масою-енергією $M_k(a)$ та хвильовою функцією $f(a)$, що характеризувались тими самими квантовими числами матерії та випромінювання як і народжений всесвіт, проте той всесвіт стискався аж до стану з $a = 0$, який не обов'язково мав бути сингулярним.

Можна обрахувати розподіл інтенсивності матерії-енергії $I(a) = M_k(a)|f_{nk}(a)|^2$ для системи, в якій баротропна рідина та випромінювання перебувають у певних квантових станах [8]. Вивчення руху у часі мінімального хвильового пакета для просторово замкненої системи показує, що розподіл матерії по осях a і τ має форму періодичних структур, подібних пелюсткам або витягнутим бульбашкам, які зсунуті до своїх границь. Ці структури обмежені по a значенням $a = 2M_k$, а їхня кількість зростає з часом.

4. Нелінійне рівняння Гамільтона–Якобі

Вектор стану, усереднений по станах матерії ϕ, має вигляд $f_k(a) \sim \exp(iS_k(a))/\sqrt{\partial_a S_k(a)}$, де функція S_k задовольняє узагальненому рівнянню Гамільтона–Якобі [9]

$$(\partial_a S_k)^2 + \kappa a^2 - 2aM_k(a) - E = \frac{3}{4}\left(\frac{\partial_a^2 S_k}{\partial_a S_k}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial_a^3 S_k}{\partial_a S_k}. \tag{9}$$

Права частина цього рівняння пропорційна до $\hbar^2$ (у звичайних фізичних одиницях) та відповідає за квантові поправки до динаміки системи.

Використовуючи співвідношення між класичним імпульсом $\pi_a = -\frac{da}{dT}$ та фазою $S_k(a)$ [9], рівняння (9) можна переписати у формі закона збереження енергії для тестової частинки з нульовою енергією, що рухається вздовж координатної лінії a,

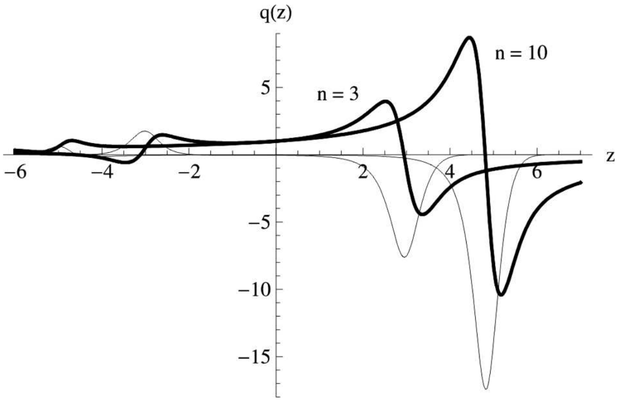
$$\frac{1}{2}\left(\frac{da}{dT}\right)^2 + U(a) = 0 \tag{10}$$

у потенціальній ямі

$$U(a) = \frac{1}{2}\left[\kappa a^2 - 2aM_k(a) - Q_k(a) - E\right]. \tag{11}$$

Функція

$$Q_k(a) = -\partial_a^2 S_E + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial_a^2 S_E}{\partial_a S_E}\right)^2 - \frac{\partial_a^3 S_E}{\partial_a S_E}\right], \tag{12}$$



Залежність дійсної q_R (жирна крива) та уявної q_I (тонка крива) частин параметра уповільнення (13) від відхилення $z = a - M$ для розв'язку (15) з $n = 10$ та $n = 3$

де $S_E = -iS_k$ є Евклідовою фазою, визначає квантову поправку ρ_Q до густини енергії матерії у формі $\rho_Q = a^{-4}Q_k(a)$.

У квазікласичному наближенні маємо $\rho_Q \sim \sim -a^{-6}$. Тоді рівняння (10) зводиться до рівняння теорії гравітації з крученням Ейнштейна-Картана [9]. У цьому випадку матерія, пов'язана з гравітацією, може розглядатися як ідеальна рідина зі спином [10]. Така рідина, яку зазвичай називають рідиною Вайзенгоффа [11], являє собою ідеальну нестисливу рідину, кожний елемент якої трактується як частинка зі спином.

Параметр уповільнення q у моделі, що розглядається, має вигляд

$$q = 1 - \frac{a}{2U}\frac{dU}{da}. \tag{13}$$

5. Приклад

У випадку замкненої системи з пилом та релятивістською матерією рівняння (9) має два розв'язки [12]

$$\partial_z S_1(z) = i\frac{e^{z^2} H_n^{-2}(z)}{2\int\limits_0^z dx\, e^{x^2} H_n^{-2}(x)}, \tag{14}$$

$$\partial_z S_2(iz) = -\frac{e^{-z^2} H_{-n-1}^{-2}(iz)}{2\int\limits_0^{iz} dx\, e^{x^2} H_{-n-1}^{-2}(x)}, \tag{15}$$

де $H_\nu(y)$ – поліном Ермітта, $z = a - M$, $E + + M^2 = 2n + 1$. Тут M є повною масою k ідентичних частинок з масами $\sqrt{2\lambda_2}$, які між собою не взаємодіють.

Зазвичай друге рівняння відкидається як нефізичне. Проте у квантовій космології треба розглядати обидва розв'язки, оскільки тільки у такому підході можна отримати нетривіальні результати щодо топологічних властивостей всесвіту як суттєво квантової системи та з'ясувати природу темної матерії та темної енергії.

На рисунку, зображені дійсна q_R та уявна q_I частини параметра уповільнення (13) як функції відхилення z для потенціальної ями (11) та розв'язків (15) при $n = 10$ та $n = 3$. В області $|z| \leq M$, де $|q_R| \gg |q_I|$ ($|q_I/q_R|_{z=0} \approx 0{,}02$), внеском q_I можна знехтувати. На цій стадії всесвіт розширюється з уповільненням, оскільки антигравітаційна дія сил, що виконують додатню роботу, не є достатньою для подолання притягання звичайної та темної матерії. Значення $q_R(z = 0) = 1$ відтворює результат загальної теорії відносності. У точці $z = 0$ маємо $a = M$. В області $a \approx 2M$ має місце перерозподіл енергії у всесвіті, як це демонструють піки на кривих q_R та q_I на рисунку. Сили притягання та відштовхування конкурують одна з одною при $a < 2M$, де $q_R > 0$ та $q_I < 0$. При досягненні області $z > M$, де $a > 2M$, обидві частини параметра уповільнення стають від'ємними, що демонструє той факт, що розширення всесвіту є прискореним. Починаючи з точки $z \simeq 1{,}5M$ ($z = 6$ для $n = 10$), параметр q_I обертається на нуль та швидкість розширення описується лише дійсною частиною $q_R < 0$. У граничному випадку $z \to +\infty$, сили притягання та відштовхування точно компенсують одна одну.

6. Прикінцеві зауваження

У цій статті ми подаємо деякі результати наших досліджень впливу квантової природи гравітації на властивості систем зі скінченним числом ступенів вільності. Зокрема, на основі хвильових рівнянь квантової космології для моделі, що має точний розв'язок, можна у єдиному підході пояснити прискорене розширення раннього всесвіту (область відносно малих значень квантових чисел) та наступний перехід від уповільненого розширення до прискореного розширення всесвіту (область дуже великих значень квантових чисел). Іншим результатом, вартим бути згаданим тут, є те, що нелінійне рівняння Гамільтона-Якобі теорії може бути зведене до рівнянь теорії гравітації з крученням Ейнштейна–Картана. Ці рівняння можна розглядати як такі, що описують однорідний ізотропний та просторово замкнений всесвіт, заповнений речовиною у формі ідеальної рідини зі спином (рідина Вайзенгоффа).

Ця робота була частково підтримана Програмою фундаментальних досліджень Відділення фізики та астрономії Національної академії наук України (проект No. 0117U000240).

1. C.G. Torre. Is general relativity an “already parametrized” theory? *Phys. Rev. D* **46**, R3231 (1992).
2. K.V. Kuchař, C.G. Torre. Gaussian reference fluid and interpretation of quantum geometrodynamics. *Phys. Rev. D* **43**, 419 (1991).
3. K.V. Kuchař. Time and the interpretations of quantum gravity. In: *Proceedings of the 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics*. Edited by G. Kunstatter, D. Vincent, J. Williams (World Scientific, 1992), p. 211.
4. B.S. DeWitt. Quantum theory of gravity. I. The canonical theory. *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).
5. J.D. Brown, D. Marolf. On relativistic material reference systems. *Phys. Rev. D* **53**, 1835 (1996).
6. V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev. The Big Bang quantum cosmology: the matter-energy production epoch. *Acta Phys. Pol. B* **39**, 979 (2008).
7. V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev. Quantum evolution of the very early Universe. *Ukr. J. Phys.* **53**, 837 (2008).
8. V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev. The matter-energy intensity distribution in a quantum gravitational system. *Quantum Stud.: Math. Found.* **5**, 245 (2018).
9. V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev. Quantum corrections to the dynamics of the expanding Universe. *Acta Phys. Pol. B* **44**, 2051 (2013).
10. F.W. Hehl, P. von der Heyde, G.D. Kerlick. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Rev. Mod. Phys.* **48**, 393 (1976).
11. J. Weyssenhoff, A. Raabe. Relativistic dynamics of spin-fluids and spin-particles. *Acta Phys. Pol.* **9**, 7 (1947).
12. V.E. Kuzmichev, V.V. Kuzmichev. The expanding universe: change of regime. *Ukr. J. Phys.* **60**, 665 (2015).

Одержано 29.08.19

V.V. Kuzmichev, V.E. Kuzmichev

QUANTUM CORRECTIONS
TO THE DYNAMICS OF A GRAVITATIONAL SYSTEM

S u m m a r y

A short introduction into the theory of quantum gravitational systems with a finite number of degrees of freedom is given. The theory is based on the method of quantization of constrained systems. The state vector of the system satisfies a set of wave equations which describes the time evolution of the system in the space of quantum fields. The state vector in such an approach can be normalized to unity. The theory permits a generalization to negative values of the scale factor and, being applied to cosmology, leads to the new understanding of the evolution of the universe. It gives an insight into the reasons why the regime of the expansion may change from acceleration to deceleration or *vice versa*, revealing a new type of quantum forces acting like dark matter and dark energy in the universe.