В.М. СИМУЛИК,[1] І.О. ГОРДІЄВИЧ [2]
[1] Інститут електронної фізики НАН України
(Вул. Університетська, 21, Ужгород 88017; e-mail: vsimulik@gmail.com)
[2] МИРТЕК ЛТД
(Ставрополь, Росія)

УДК 539.12

СИМЕТРІЇ РЕЛЯТИВІСТСЬКОГО АТОМА ВОДНЮ[1]

Доведено, що рівняння Дірака у зовнішньому кулонівському полі має симетрію, що визначається 31 операторами, які утворюють 31-вимірну алгебру. Знайдено дві різні ферміонні реалізації алгебри SO(1,3) групи Лоренца. Отримано також дві бозонні реалізації цієї алгебри. Усі генератори вказаних алгебр комутують з оператором рівняння Дірака у зовнішньому кулонівському полі, а отже, визначають алгебри інваріантності такого рівняння Дірака. На цій основі Бозе симетрія спіну $s = (1,0)$ рівняння Дірака для вільного спінорного поля, доведена нещодавно в наших роботах, розширена на випадок рівняння Дірака, в якому врахована взаємодія із зовнішнім кулонівським полем. Релятивістський атом водню моделюється таким рівнянням Дірака. Отже, для релятивістського атома водню доведено як ферміонну, так і бозонну симетрію, що були відомі з наших робіт про інший випадок невзаємодіючого спінорного поля. Нові оператори симетрії знайдено на основі нових гамма-матричних зображень алгебр Кліффорда та SO(8), які також відомі з наших недавніх робіт. Приховані симетрії доведено як у канонічному представленні Фолді–Ваутхасена, так і у коваріантній моделі Дірака. Знайдені оператори симетрії, які є чисто матричними у представленні Фолді–Ваутхасена, стають нелокальними у моделі Дірака.

Ключові слова: рівняння Дірака, кулонівська взаємодія, атом водню, релятивістська квантова механіка, симетрія.

1. Вступ

Дослідження симетрій рівнянь для атома водню розпочинається з нерелятивістського випадку. SO(4) симетрія нерелятивістського рівняння Шредінгера для атома водню була знайдена В. Фоком [1], див. також [2].

Релятивістський атом водню моделюється тут рівнянням Дірака у зовнішньому кулонівському полі

$$\left(i\partial_0 - \widehat{H}\right)\psi(x) = 0; \quad \widehat{H} \equiv \gamma^0\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p} + \gamma^0 m - \frac{Ze^2}{|\mathbf{x}|}, \quad (1)$$

де $x \in \mathrm{M}(1,3)$, $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$, $Z = 1$, $\mu = \overline{0,3}$, $j = 1, 2, 3$, а $\mathrm{M}(1,3) = \{x \equiv (x^\mu) = (x^0{=}t, \mathbf{x} \equiv (x^j))\}$ – це простір-час Мінковського; 4-компонентна функція $\psi(x)$ належить оснащеному простору Гільберта

$$\mathrm{S}^{3,4} \subset \mathrm{H}^{3,4} \subset \mathrm{S}^{3,4*}. \quad (2)$$

Зауважимо, що завдяки виділеній ролі часової змінної $x^0 = t \in (x^\mu)$ (згідно аналогії з нерелятивістською теорією), взагалі кажучи, допустимо використання квантовомеханічного оснащеного простору Гільберта (2). Тут простір основних функцій Шварца $\mathrm{S}^{3,4}$ є щільним у просторі узагальнених функцій Шварца $\mathrm{S}^{3,4*}$, а $\mathrm{H}^{3,4}$ – квантовомеханічний простір Гільберта 4-компонентних функцій над $\mathrm{R}^3 \subset \mathrm{M}(1,3)$.

Для завершення позначень, припущень та означень зауважимо, що використовуємо систему одиниць $\hbar = c = 1$, а метричний тензор у просторі-часі Мінковського $\mathrm{M}(1,3)$ має вигляд

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = g^\mu_\nu,\ (g^\mu_\nu) = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)\,; \quad (3)$$

$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\mu$; по індексу, що повторюється двічі, проводиться сумування. Гамма матриці Дірака вибираємо у представленні Дірака–Паулі

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{vmatrix}, \quad \gamma^\ell = \begin{vmatrix} 0 & \sigma^\ell \\ -\sigma^\ell & 0 \end{vmatrix}, \quad \ell = 1,2,3, \quad (4)$$

[1] Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції "XI Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2019): Non–Euclidean, Noncommutative Geometry and Quantum Physics."

зі стандартними матрицями Паулі:

$$\sigma^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \sigma^2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \sigma^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Нижче доведено, що рівняння Дірака у зовнішньому кулонівському полі (1) має симетрію, яка визначається 31 операторами, що утворюють 31-вимірну алгебру SO(6)$\oplus i\gamma^0 \cdot$ SO(6) $\oplus\, i\gamma^0$. Знайдено два ферміонні D(1/2,0)$\oplus$(0,1/2) представлення алгебри SO(1,3) групи Лоренца. Також знайдено два бозонні, а саме тензорно-скалярне D(1,0)$\oplus$(0,0) та векторне D(1/2,1/2) представлення цієї алгебри. Відповідні генератори вищезгаданих алгебр комутують з оператором рівняння Дірака у зовнішньому кулонівському полі (1), і, таким чином, визначають приховані симетрії (алгебри інваріантності) цього рівняння Дірака.

Спочатку розглянемо відомі симетрії рівняння Дірака (1), потім представимо математичні методи, необхідні для наших досліджень, і на завершення – список доведених прихованих симетрій релятивістського атома водню.

2. Відомі симетрії рівняння Дірака у зовнішньому кулонівському полі

Перші чотири інтеграли руху (оператори симетрії, що комутують з оператором рівняння Дірака) для рівняння (1) були знайдені П. Діраком у його роботі [3], де було виведено і введено у розгляд рівняння (1). Це три компоненти вектора $\mathbf{J} = (J^1, J^2, J^3)$ повного моменту імпульсу

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}, \quad \mathbf{L} \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{s} \equiv \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{vmatrix}, \quad (6)$$

де $\mathbf{L}$ – орбітальний момент імпульсу, $\mathbf{s}$ – спіновий момент імпульсу спіну 1/2, а також знайдений П. Діраком додатковий інтеграл руху K:

$$K = \gamma^0 \left(2\mathbf{s} \cdot \mathbf{L} + 1\right), \quad K^2 = \mathbf{J}^2 + \frac{1}{4}. \quad (7)$$

Наступний оператор симетрії – інтеграл руху Джонсона–Ліпмана [4]

$$D = 2\mathbf{s} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} + \frac{1}{mZe^2} K \gamma^4 \left(\widehat{H} - \gamma^0 m\right), \quad (8)$$

$D^2 = 1 + \left(\frac{\widehat{H}^2}{m^2} - 1\right) \frac{K^2}{Z^2 e^4}$, який комутує з оператором $(i\partial_0 - \widehat{H})$ рівняння Дірака і антикомутує з оператором симетрії Дірака K (7). Тут використовується анти-ермітова матриця $\gamma^4 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ замість ермітової γ^5 інших авторів. Зауважимо, що робота [4] про сильний результат (8) опублікована як коротка ремарка розміром 1/10 журнальної сторінки, що містить лише єдину формулу (8) для D.

Після цього шлях до SO(4) симетрії релятивістського атома водню був прямим. Вона була знайдена у [5] і [6], щодо розгляду у [7] див. коментар [8]. Таким чином, SO(4) симетрія рівняння Дірака (1) для атома водню задається шістьома операторами

$$\mathbf{I} = \mathbf{J} + \mathbf{T}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{J} - \mathbf{T}, \quad (9)$$

де $\mathbf{J}$ відомий з (6), а компоненти $\mathbf{T} = (T^1, T^2, T^3)$ мають вигляд

$$T^1 = \frac{D}{2\sqrt{D^2}}, \quad T^2 = \frac{iDK}{2\sqrt{D^2K^2}}, \quad T^3 = \frac{K}{2\sqrt{K^2}}. \quad (10)$$

У роботі [5] величина $\mathbf{T} = (T^1, T^2, T^3)$ (10) названа оператором вектора Ленца спіну 1/2. Використані у (10) позначення пояснено вище у (7) і (8).

Розглянемо наступну симетрію. Оператори Паулі–Гюрші [9] і [10]

$$s^{01} = \frac{i}{2}\gamma^2 \hat{C}, \quad s^{02} = \frac{1}{2}\gamma^2 \hat{C}, \quad s^{12} = -\frac{i}{2}, \quad (11)$$

де $\hat{C}$ оператор комплексного спряження, $\hat{C}\psi = \psi^*$ (оператор інволюції у просторі $\mathrm{H}^{3,4}$), визначають [11] алгебру інваріантності SO(1,2)$\subset$SO(1,3) рівняння Дірака представленого як $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + \frac{e^2}{|\mathbf{x}|}\right)\psi(x) = 0$.

У роботі [12] знайдено симетрію релятивістського атома водню у вигляді алгебри gl(8,R). Було розглянуто стаціонарний випадок рівняння Дірака (1) і залучення дискретних перетворень.

Автором [13] представлено іншу задачу. Для опису безспінового релятивістського атома водню було запропоновано двочастинкову квазіпотенціальну модель. Досліджувались O(4) симетрія та її порушення.

3. Коротко про гамма матричні представлення дійсної алгебри Кліффорда та відповідної алгебри SO(8)

У тривалих дослідженнях відображення теорії Максвелла на теорію Дірака ми, зокрема, дослідили різні екзотичні представлення алгебри Кліффорда–Дірака, які є корисними для опису теорії

Максвелла у позначеннях, запозичених з формалізму спінорного поля Дірака, див., наприклад, [14] та [15]. Крок за кроком ми прийшли до задачі узагальнення алгебри Кліффорда–Дірака з метою опису як бозонних властивостей теорії Дірака, так і ферміонних властивостей теорії Максвелла.

Нещодавно, (див., наприклад, [16]), було введено у розгляд гамма матричні представлення алгебри Кліффорда $C\ell^{\mathbb{R}}(0{,}6)$ та алгебри Лі SO(8), які є визначеними над полем дійсних чисел. Порівняння з добре відомими гамма матричними представленнями алгебр $C\ell^{\mathbb{C}}(1{,}3)$ (у фізичній літературі – алгебра Кліффорда–Дірака) та SO(1,5), означеними над полем комплексних чисел, показує, що нові представлення містять значно більше корисних елементів і перспектив застосування. Звертання до гамма матричних представлень алгебри Кліффорда $C\ell^{\mathbb{R}}(0{,}6)$ та алгебри Лі SO(8) дозволило, (див., наприклад, [17] і [18]), знайти приховані симетрії вільного (не взаємодіючого) рівняння Дірака. Було знайдено також і Бозе симетрії [19]. Нижче ці нові алгебраїчні об'єкти [16] використовуються у задачі знаходження прихованих симетрій релятивістського атома водню. Далі компактно представлена необхідна частина [16].

Звертаємо увагу на факт, що сім γ матриць γ^1, γ^2, γ^3, $\gamma^4 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$,

$$\gamma^5 = \gamma^1\gamma^3\hat{C},\ \gamma^6 = i\gamma^1\gamma^3\hat{C},\ \gamma^7 = i\gamma^0, \tag{12}$$

де γ^μ задані у (4), а оператор $\hat{C}$ визначено після формул (11), задовольняють антикомутаційним співвідношенням

$$\gamma^{\mathrm{A}}\gamma^{\mathrm{B}} + \gamma^{\mathrm{B}}\gamma^{\mathrm{A}} = -2\delta^{\mathrm{AB}}, \quad \mathrm{A,B} = \overline{1,7}, \tag{13}$$

генераторів алгебри Кліффорда над полем дійсних чисел. Оскільки лише шість операторів у (12) є лінійно незалежними, $\gamma^4 = -i\gamma^7\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, то маємо справу з представленням алгебри Кліффорда $C\ell^{\mathbb{R}}(0{,}6)$ розмірності $2^6 = 64$.

Перші 16 операторів представлено у таблиці 1 роботи [16], наступні 16 знаходяться з них за допомогою множення на уявну одиницю $i = \sqrt{-1}$. Останні 32 знаходяться з перших 32 множенням на оператор $\hat{C}$ комплексного спряження. Отже, якщо запропонувати позначення "stCD" ("st" і CD скорочення від стандартний Кліффорд–Дірак) для набору 16 матриць з таблиці 1 у [16], то набір 64 елементів представлення алгебри $C\ell^{\mathbb{R}}(0{,}6)$ задається наступним чином

$$\Big\{(\mathrm{stCD}) \cup i \times (\mathrm{stCD}) \cup \hat{C} \times (\mathrm{stCD}) \cup i\hat{C} \times (\mathrm{stCD})\Big\}. \tag{14}$$

Внаслідок рівностей $\gamma^4 \equiv \prod_{\mu=0}^{3}\gamma^\mu \to \prod_{\bar{\mu}=0}^{4}\gamma^{\bar{\mu}} = -\mathrm{I}$, відомих із стандартної алгебри Кліффорда–Дірака $C\ell^{\mathbb{C}}(1{,}3)$, і внаслідок антикомутаційних співвідношень (13) у алгебрі $C\ell^{\mathbb{R}}(0{,}6)$ для матриць γ^{A} (12) справедливі наступні розширені рівності:

$$\gamma^7 \equiv -\prod_{\underline{\mathrm{A}}=1}^{6}\gamma^{\underline{\mathrm{A}}} \to \prod_{\mathrm{A}=1}^{7}\gamma^{\mathrm{A}} = \mathrm{I}, \quad \gamma^5\gamma^6 = i.$$

Генератори (12) породжують також 28 матричних операторів

$$s^{\widetilde{\mathrm{A}}\widetilde{\mathrm{B}}} = \left\{s^{\mathrm{AB}} = \frac{1}{4}[\gamma^{\mathrm{A}}, \gamma^{\mathrm{B}}],\ s^{\mathrm{A}8} = -s^{8\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\gamma^{\mathrm{A}}\right\}, \tag{15}$$

$\widetilde{\mathrm{A}}, \widetilde{\mathrm{B}} = \overline{1,8}$, що задовольняють комутаційним співвідношенням алгебри Лі SO(8)

$$[s^{\widetilde{\mathrm{A}}\widetilde{\mathrm{B}}}, s^{\widetilde{\mathrm{C}}\widetilde{\mathrm{D}}}] = \delta^{\widetilde{\mathrm{A}}\widetilde{\mathrm{C}}}s^{\widetilde{\mathrm{B}}\widetilde{\mathrm{D}}} + \delta^{\widetilde{\mathrm{C}}\widetilde{\mathrm{B}}}s^{\widetilde{\mathrm{D}}\widetilde{\mathrm{A}}} + \delta^{\widetilde{\mathrm{B}}\widetilde{\mathrm{D}}}s^{\widetilde{\mathrm{A}}\widetilde{\mathrm{C}}} + \delta^{\widetilde{\mathrm{D}}\widetilde{\mathrm{A}}}s^{\widetilde{\mathrm{C}}\widetilde{\mathrm{B}}}. \tag{16}$$

Очевидно, що тут ми також маємо справу з алгеброю над полем дійсних чисел. Далі, очевидно, що 28 елементів (15) із SO(8) не утворюють жодну алгебру Кліффорда і не утворюють жодну підалгебру алгебри Кліффорда. Це є незалежний від алгебри Кліффорда математичний об'єкт. Зауважимо, що тут (так само, як у (12) для гамма матриць) вибрано анти-ермітову реалізацію операторів SO(8), про причини див., наприклад, роботу [20] та монографії [21] і [22].

Явний вигляд 28 елементів γ матричного представлення алгебри SO(8) приведено у Таблиці 3 роботи [16]. Це гамма матричне представлення алгебри SO(8) має особливі риси. Тут, по-перше, два піднабори (s^{23}, s^{31}, s^{12}) та (s^{45}, s^{64}, s^{56}) операторів $s^{\widetilde{\mathrm{A}}\widetilde{\mathrm{B}}}$ із (15) визначають два різні набори SU(2) генераторів спіну 1/2, по-друге, комутують між собою і, по-третє, комутують з оператором рівняння Дірака у представленні Фолді–Ваутхайсена [23].

4. Нові симетрії релятивістського атома водню

Нижче представляємо як симетрії рівняння Фолді–Ваутхайсена [23] у зовнішньому кулонівському полі

$$\left(i\partial_0 - \gamma^0\omega + \frac{e^2}{|\mathbf{x}|}\right)\phi(x) = 0; \quad \omega \equiv \sqrt{-\Delta + m^2}, \tag{17}$$

$x \in \mathrm{M}(1,3)$, $\phi \in \{\mathrm{S}^{3,4} \subset \mathrm{H}^{3,4} \subset \mathrm{S}^{3,4*}\}$, так, звичайно, і симетрії рівняння Дірака (1) у цьому зовнішньому полі.

Першою областю застосування матричного представлення алгебр $C\ell^{\mathbb{R}}(0{,}6)$ і SO(8) є симетрійний аналіз (пошук груп та алгебр по відношенню до яких рівняння є інваріантним). Легко зрозуміти, що представлення Фолді–Ваутхайсена [23] має переваги при такому аналізі. Дійсно, у такому представленні достатньо обчислити комутаційні співвідношення можливих чисто матричних операторів симетрії із (15) лише з двома елементами оператора рівняння Фолді–Ваутхайсена (17): γ^0 та i. Після визначення симетрій рівняння Фолді–Ваутхайсена відповідні симетрії рівняння Дірака легко знайти застосуванням оберненого перетворення Фолді–Ваутхайсена [23]. Зазначимо, що після такого перетворення лише декілька операторів симетрії залишаються чисто матричними – основна частина операторів містить нелокальний псевдодиференціальний елемент $\omega \equiv \sqrt{-\Delta + m^2}$ і функції від нього.

Тепер можна розпочинати опис нових симетрій релятивістського атома водню. Старт цих досліджень відбувся в [24]. Основні результати представляємо у вигляді наступних тверджень.

I. Гамма матричне представлення підалгебри SO(6) алгебри SO(8), яка задається операторами

$$\{s^{\breve{A}\breve{B}}\} = \left\{s^{\breve{A}\breve{B}} \equiv \frac{1}{4}[\gamma^{\breve{A}}, \gamma^{\breve{B}}]\right\}, \quad \breve{A}, \breve{B} = \overline{1,6}, \tag{18}$$

визначає алгебру інваріантності рівняння Дірака у представленні Фолді–Ваутхайсена $\left(\partial_0 + i\gamma^0\omega - \frac{e^2}{|\mathbf{x}|}\right)\phi(x) = 0$ (шість матриць $\{\gamma^{\breve{A}}\} = \{\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4, \gamma^5, \gamma^6\}$ у (18) відомі з (12)).

II. На основі SO(6) (18) будується 31-вимірне гамма матричне представлення алгебри Лі $\mathrm{SO}(6) \oplus i\gamma^0\mathrm{SO}(6) \oplus i\gamma^0$, яке задається елементами із $C\ell^{\mathbb{R}}(0{,}6)$ і педставляє собою максимальну чисто матричну алгебру інваріантності рівняння Дірака у представленні Фолді–Ваутхайсена $\left(\partial_0 + i\gamma^0\omega - \frac{e^2}{|\mathbf{x}|}\right)\phi(x) = 0$.

III. Рівняння Дірака у зовнішньому кулонівському полі (1) інваріантне відносно 31-вимірного гамма матричного зображення алгебри $\widetilde{\mathrm{SO}}(6) \oplus i\widetilde{\gamma}^0\widetilde{\mathrm{SO}}(6) \oplus i\widetilde{\gamma}^0$, де представлення алгебри $\widetilde{\mathrm{SO}}(6)$ задане у формі (18), у якій оператори гамма знайдені з матриць (12) оберненим перетворенням Фолді–Ваутхайсена [23]. Результуючі гамма оператори мають вигляд

$$\begin{gathered}\widetilde{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma}\frac{-\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m}{\omega} + \mathbf{p}\frac{-\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + \omega + m}{\omega(\omega+m)},\\ \widetilde{\gamma}^4 = \gamma^4\frac{-\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m}{\omega}, \quad \widetilde{\gamma}^5 = \widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^3\widetilde{C},\\ \widetilde{\gamma}^6 = i\widetilde{\gamma}^1\widetilde{\gamma}^3\widetilde{C}, \quad \widetilde{\gamma}^7 = i\widetilde{\gamma}^0, \quad \widetilde{\gamma}^0 = \gamma^0\frac{-\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m}{\omega},\end{gathered} \tag{19}$$

де $\widetilde{C} = \left(\mathrm{I} + 2\frac{i\gamma^1\partial_1 + i\gamma^2\partial_2}{\sqrt{2\omega(\omega+m)}}\right)\hat{C}$, and $\omega \equiv \sqrt{-\Delta + m^2}$. Ці фориули задають образи гамма матриць (12) у представленні Дірака після виконання оберненого перетворення Фолді–Ваутхайсена.

Таким чином, алгебра $\widetilde{\mathrm{SO}}(6) \oplus i\widetilde{\gamma}^0\widetilde{\mathrm{SO}}(6) \oplus \oplus i\widetilde{\gamma}^0$ випливає з представлення $\mathrm{SO}(6) \oplus i\gamma^0\mathrm{SO}(6) \oplus i\gamma^0$ у результаті оберненого перетворення Фолді–Ваутхайсена [23]. Для рівняння Дірака лише частина цієї алгебри є чисто матричною, інші елементи містять оператор $\omega \equiv \sqrt{-\Delta + m^2}$.

Розглянемо симетрії релятивістського атома водню по відношенню до групи Лоренца. На основі $C\ell^{\mathbb{R}}(0{,}6)$ і SO(8) визначаються дві реалізації $\mathrm{D}\left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ педставлення алгебри Лі *універсальної накриваючої* $\mathcal{L} = \mathrm{SL(2,C)}$ власної ортохронної групи Лоренца $\mathrm{L}_+^\uparrow = \mathrm{SO(1,3)} = \{\Lambda = (\Lambda^\mu_\nu)\}$, відносно яких рівняння $\left(\partial_0 + i\gamma^0\omega - \frac{e^2}{|\mathbf{x}|}\right)\phi(x) = 0$ є інваріантним:

$$\begin{gathered}s_{\mathrm{I}}^{\mu\nu} = \{s_{\mathrm{I}}^{0k} = \frac{i}{2}\gamma^k\gamma^4, \quad s_{\mathrm{I}}^{km} = \frac{1}{4}[\gamma^k, \gamma^m]\},\\ \gamma^4 \equiv \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (k, m = \overline{1,3}),\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}s_{\mathrm{II}}^{01} = -\frac{i}{2}\gamma^2\hat{C}, \; s_{\mathrm{II}}^{02} = -\frac{1}{2}\gamma^2\hat{C}, \; s_{\mathrm{II}}^{03} = \frac{1}{2}\gamma^0,\\ s_{\mathrm{II}}^{23} = -\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^2\hat{C}, \; s_{\mathrm{II}}^{31} = \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^2\hat{C}, \; s_{\mathrm{II}}^{12} = -\frac{i}{2}.\end{gathered} \tag{21}$$

Завдяки комбінації операторів (20), (21) конструюємо генератори бозонного представлення:

$$\begin{gathered}s_{\mathrm{TS}}^{\mu\nu} = \{s_{\mathrm{TS}}^{0k} = s_{\mathrm{I}}^{0k} + s_{\mathrm{II}}^{0k}, \quad s_{\mathrm{TS}}^{mn} = s_{\mathrm{I}}^{mn} + s_{\mathrm{II}}^{mn}\},\\ s_{\mathrm{V}}^{\mu\nu} = \{s_{\mathrm{V}}^{0k} = -s_{\mathrm{I}}^{0k} + s_{\mathrm{II}}^{0k}, \quad s_{\mathrm{V}}^{mn} = s_{\mathrm{TS}}^{mn}\},\end{gathered} \tag{22}$$

де $s_{\mathrm{TS}}^{\mu\nu}$ і $s_{\mathrm{V}}^{\mu\nu}$ генератори, відповідно, тензорно-скалярного $\mathrm{D}(1,0) \oplus (0,0)$ і незвідного векторного $\mathrm{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ представлень алгебри Лі SO(1,3) групи

Лоренца $\mathcal{L}$, відносно яких рівняння Фолді–Ваутхайсена $\left(\partial_0 + i\gamma^0\omega - \frac{e^2}{|\mathbf{x}|}\right)\phi(x) = 0$ є інваріантним.

Анти-ермітові оператори кожного з наборів (20), (21) чи (22) задовольняють комутаційним співвідношенням алгебри Лі SO(1,3) групи Лоренца $\mathcal{L}$:

$$[s^{\mu\nu}, s^{\rho\sigma}] = -g^{\mu\rho}s^{\nu\sigma} - g^{\rho\nu}s^{\sigma\mu} - g^{\nu\sigma}s^{\mu\rho} - g^{\sigma\mu}s^{\rho\nu}. \quad (23)$$

Для рівняння Дірака у просторі діраківських спінорів $\{\psi\}$ (тобто у представленні Паулі–Дірака) генератори тензорно-скалярного представлення D(1,0)⊕(0,0) і незвідного векторного $\mathrm{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ представлення алгебри Лі SO(1,3) групи Лоренца $\mathcal{L}$ по своїй формі аналогічні до (22) (що виражені через (20), (21)), але оператори гамма у цьому випадку значно складніші і задаються формулами (19). Образи операторів (20), (21) чи (22) у представленні Дірака також задовольняють куммутаційним співвідношенням (23).

У роботах [15] і [18] для вільних рівнянь Дірака і Фолді–Ваутхайсена ми використовуємо також *явно бозонне представлення* матричних операторів (22), у яких оператори Казіміра діагональні і доведення Бозе властивостей є найбільш простим.

5. Підсумки

Представлено узагальнення наших результатів про Бозе симетрії вільного невзаємодіючого рівняння Дірака (див., наприклад, [15] та посилання там) на випадок присутності зовнішнього кулонівського поля. Знайдено приховані Фермі та Бозе симетрії релятивістського атома водню.

Слід відмітити, що фізична картина атома водню як електрона у зовнішньому кулонівському полі відноситься до Фермі симетрій спіну 1/2. З іншого боку фізична картина атома водню як зв'язаної системи протона та електрона відноситься до Бозе симетрій сумарного спіну одиниця (або нуль).

Основним результатом роботи є введення у розгляд двох різних бозонних тензорно-скалярного D(1,0)⊕(0,0) та векторного D(1/2,1/2) представлень алгебри Лі SO(1,3) групи Лоренца $\mathcal{L}$, відносно яких інваріантне рівняння Дірака у зовнішньому кулонівському полі. Також знайдено дві ферміонні симетрії цього рівняння, що задаються двома різними D(1/2,0)⊕(0,1/2) представленнями алгебри SO(1,3) групи Лоренца. Представлена максимальна чисто матрична симетрія рівняння Фолді–Ваутхайсена для атома водню і розраховано явний вигляд операторів відповідної симетрії у моделі Дірака.

1. V. Fock. Zur Theorie des Wasserstoffatoms. *Z. Phys.* **98**, 145 (1935).
2. V. Bargmann. Zur Theorie des Wasserstoffatoms. Bemerkungen zur gleichnamigen Arbeit von V. Fock. *Z. Phys.* **99**, 576 (1936).
3. P.A.M. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* **117**, 610 (1928).
4. M.H. Johnson, B.A. Lippmann. Relativistic Kepler problem. *Phys. Rev.* **78**, 329 (1950).
5. E. De Groot. The virial theorem and the Dirac H atom. *Am. J. Phys.* **50**, 1141 (1982).
6. A.A. Stahlhofen. Algebraic solutions of relativistic Coulomb problems. *Helv. Phys. Acta* **70**, 372 (1997).
7. J-L. Chen, D-L. Deng, M-G. Hu. SO(4) symmetry in the relativistic hydrogen atom. *Phys. Rev. A.* **77**, 034102 (2008).
8. A.A. Stahlhofen. Comment on "SO(4) symmetry in the relativistic hydrogen atom". *Phys. Rev. A.* **78**, 036101 (2008).
9. W. Pauli. On the conservation of the lepton charge. *Nuovo Cim.* **6**, 204 (1957).
10. F. Gürsey. Relation of charge independence and baryon conservation to Pauli's transformation. *Nuov. Cim.* **7**, 411 (1958).
11. И.Ю. Кривский, В.М. Симулик. Уравнение Дирака и представления спина 1, связь с симметриями уравнений Максвелла. *Теорет. математ. физ.* **90**, 388 (1992).
12. A.G. Nikitin. Superalgebras of symmetry operators for Coulomb and Aharonov–Bohm–Coulomb systems. In: *Photon and Poincaré group* (Nova Sci., 1999) [ISBN: 9781560727187].
13. Th.W. Ruijgrok. On the relativistic hydrogen atom. *Acta Phys. Pol.* **87** 43 (1976).
14. V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky. Clifford algebra in classical electrodynamical hydrogen atom model. *Adv. Appl. Cliff. Algebras* **7**, 25 (1997).
15. V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky, I.L. Lamer. Bosonic symmetries, solutions and conservation laws for the Dirac equation with nonzero mass. *Ukr. J. Phys.* **58**, 523 (2013).
16. V.M. Simulik. On the gamma matrix representations of SO(8) and Clifford algebras. *Adv. Appl. Cliff. Algebras* **28**, 93 (2018).
17. В.М. Симулик, І.Ю. Кривський. Про розширену дійсну алгебру Кліффорда–Дірака та нові фізично важливі симетрії рівняння Дірака з ненульовою масою. *Доповіді НАН України* №5, 82 (2010).

18. I.Yu. Krivsky, V.M. Simulik. Fermi–Bose duality of the Dirac equation and extended real Clifford–Dirac algebra. *Cond. Matt. Phys.* **13**, 43101 (2010).
19. V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky, I.L. Lamer. Application of the generalized Clifford–Dirac algebra to the proof of the Dirac equation Fermi–Bose duality. *TWMS J. App. Eng. Math.* **3**, 46 (2013).
20. V.M. Simulik, I.Yu. Krivsky. Bosonic symmetries of the Dirac equation. *Phys. Lett. A.* **375**, 2479 (2011).
21. B. Wybourne. *Classical Groups for Physicists* (Wiley, 1974) [ISBN: 978-0471965053].
22. J. Elliott, P. Dawber. *Symmetry in Physics* (Macmillian Press, 1979), Vol. 1 [ISBN: 978-0333382707].
23. L.L. Foldy, S.A. Wouthuysen. On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit. *Phys. Rev.* **78**, 29 (1950).
24. В.М. Симулик, И.О. Гордиевич. *О симметрии релятивистского атома водовода и представлении Фолди–Ваутхайсена. Програма і тези доповідей Міжнародної конференції молодих учених і аспірантів ІЕФ-2013* (Ужгород, Інститут електронної фізики НАН України, 2013).

Одержано 31.08.19

V.M. Simulik, I.O. Gordievich

SYMMETRIES OF RELATIVISTIC HYDROGEN ATOM

S u m m a r y

The Dirac equation in the external Coulomb field is proved to possess the symmetry determined by 31 operators, which form the 31-dimensional algebra. Two different fermionic realizations of the SO(1,3) algebra of the Lorentz group are found. Two different bosonic realizations of this algebra are found as well. All generators of the above-mentioned algebras commute with the operator of the Dirac equation in an external Coulomb field and, therefore, determine the algebras of invariance of such Dirac equation. Hence, the spin $s = (1, 0)$ Bose symmetry of the Dirac equation for the free spinor field, proved recently in our papers, is extended here for the Dirac equation interacting with an external Coulomb field. A relativistic hydrogen atom is modeled by such Dirac equation. We are able to prove for the relativistic hydrogen atom both the fermionic and bosonic symmetries known from our papers in the case of a non-interacting spinor field. New symmetry operators are found on the basis of new gamma matrix representations of the Clifford and SO(8) algebras, which are known from our recent papers as well. Hidden symmetries were found both in the canonical Foldy–Wouthuysen and covariant Dirac representations. The found symmetry operators, which are pure matrix ones in the Foldy–Wouthuysen representation, become non-local in the Dirac model.