

Д. АНЧИШКІН,<sup>1,2,3</sup> І. МІШУСТІН,<sup>3,4</sup> О. СТАШКО,<sup>2</sup> Д. ЖУРАВЕЛЬ,<sup>1</sup>  
Х. ШТОКЕР<sup>3,5</sup>

<sup>1</sup> Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголобова НАН України  
(Вул. Метрологічна, 14-б, Київ 03143)

<sup>2</sup> Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
(Просп. Академіка Глушкова, 2, Київ 03022)

<sup>3</sup> Франкфуртський інститут провідних досліджень  
(Ruth-Moufang-Strasse, 1, Франкфурт-на-Майні 60438, Німеччина)

<sup>4</sup> Національний дослідницький центр "Курчатовський інститут"  
(Пл. Академіка Курчатова, 1, Москва 123098, Росія)

<sup>5</sup> Франкфуртський університет імені Й.В. Гете  
(Франкфурт-на-Майні 60438, Німеччина)

## БОЗЕ-ЕЙНШТЕЙНІВСЬКА КОНДЕНСАЦІЯ У СИСТЕМІ ВЗАЄМОДІЮЧИХ БОЗОНІВ ПРИ СКІНЧЕННИХ ТЕМПЕРАТУРАХ<sup>1</sup>

УДК 539

*Термодинамічні властивості системи взаємодіючих бозонів при скінченних температурах та нульовому хімічному потенціалі є об'єктом дослідження в рамках наближення середнього поля, яке моделюється у вигляді потенціала Скірма. Вважається, що середнє поле містить як притягуючу компоненту, так і відштовхуючу. Отримано самоузгоджені співвідношення між середнім полем та термодинамічними функціями. Показано, що коли притягання є досить сильним, то система має фазовий перехід першого роду, при якому виникає бозе-конденсат. Конденсована фаза характеризується постійною загальною густиною частинок. Показано, що при критичній температурі густина енергії має стрибок.*

*Ключові слова:* газ піонів, фазовий перехід, конденсат.

### 1. Вступ

В останні роки властивості гарячої та щільної адронної речовини викликають значний інтерес. Така речовина може утворюватися при релятивістських ядро-ядерних зіткненнях, які вивчають у багатьох лабораторіях. Ефективні моделі, мотивовані квантовою хромодинамікою, та моделювання на ґратці свідчать про те, що відновлення хіральної симетрії та перехід до фази деконфайнменту повинні відбуватись при високій температурі та густині частинок. У даній роботі ми концентруємо увагу на вивченні властивостей взаємодіючих бозонних систем в рамках іграшкової моделі з використанням термодинамічно узгодженого середнього поля. Основними задачами є оцінка масштабу та відношення між притягуючою та відштовхуючою компонентами потенціалу та дослідження умов, при яких можлива поява бозе-

конденсату взаємодіючих частинок. Ця проблема досліджувалась раніше, починаючи з піонерських робіт А.Б. Мігдала і колег [1–4], а також у більш пізніх роботах багатьма авторами з використанням різних моделей та методів.

Можливе утворення класичних піонних полів у релятивістських ядро-ядерних зіткненнях обговорювалось в посиланнях [5–8]. У більш пізніх роботах [9–13] було розглянуто системи піонів зі скінченим хімічним ізоспіновим потенціалом при низьких температурах. Цікаві результати були отримані при вивченні щільних систем піонів з використанням ґраткових методів [14, 15].

Ми досліджуємо взаємодіючу бозонну систему при нульовому хімічному потенціалі, але при високих температурах, тобто при високих густинах

© Д. АНЧИШКІН, І. МІШУСТІН, О. СТАШКО,  
Д. ЖУРАВЕЛЬ, Х. ШТОКЕР, 2019

1110

<sup>1</sup> Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції "XI Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2019): Non–Euclidean, Noncommutative Geometry and Quantum Physics."

теплових частинок. Прості розрахунки для не-взаємодіючого адрон-резонансного газу показують, що густина частинок може досягати значень  $(0,1-0,2) \text{ фм}^{-3}$  при температурах  $100-150 \text{ MeV}$ , які знаходяться нижче температури фазового переходу деконфайнменту, див. [16, 17].

За таких умов ефекти взаємодії починають відігравати значну роль. Феноменологічне середнє поле, подібне до так званого потенціалу Скірма, введено для врахування взаємодії між бозонами. Воно залежить тільки від густини частинок. В такому випадку термодинамічно узгоджені співвідношення можуть бути використані для обчислення густини частинок, густини енергії та тиску як функцій температури. Важливою особливістю розглянутої системи є те, що на відміну від так званої бозонної матерії, кількість бозонів не зберігається, а визначається за допомогою мінімізації термодинамічного потенціалу.

## 2. Взаємодіючі системи бозонів із нульовим хімічним потенціалом

Розглянемо спочатку взаємодіючу систему бозонів без конденсату. Будемо називати цей стан газорідною фазою, щоб відрізнити його від слабо взаємодіючого газу піонів. Інструмент, який буде використано для дослідження є "Термодинамічна модель середнього поля", (див. [18] ранні роботи [19, 20]). При такому підході вплив середовища на частинку реалізується через середнє поле  $U(n)$ , яке зсуває рівні для вільного дисперсійного співвідношення. Таким чином одночастинкова енергія має вигляд

$$E(\mathbf{k}, n) = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} + U(n), \quad (1)$$

де  $n$  – густина частинок. Наявність полів у системі, які відповідають за взаємодію між частинками, приводить не просто до спотворення вільного одночастинкового дисперсійного відношення, як у (1), але також дає внесок у густину енергії та створює надлишковий тиск  $P_{\text{ex}}(n)$ . Таким чином повний тиск однорідної системи взаємодіючих бозонів з  $\mu = 0$  у великому канонічному ансамблі виглядає так

$$p(T) = \frac{g}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}^2}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}} f(\mathbf{k}; T) + P_{\text{ex}}(n), \quad (2)$$

де функція розподілу має вигляд

$$f(\mathbf{k}; T) = \left\{ \exp \left[ \frac{E(\mathbf{k}, n)}{T} \right] - 1 \right\}^{-1}. \quad (3)$$

Густина енергії у газорідній фазі може бути отримана зі співвідношення Ейлера  $\varepsilon + p = Ts + \mu n$ , де густина ентропії це похідна  $s = \partial p(T) / \partial T$ . Отже, густина енергії має вигляд

$$\varepsilon(T) = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} f(\mathbf{k}; T) + \varepsilon_{\text{ex}}(n),$$

де

$$\varepsilon_{\text{ex}}(n) \equiv nU(n) - P_{\text{ex}}(n). \quad (4)$$

Насправді величини  $U(n, T)$  і  $P_{\text{ex}}(n, T)$  зумовлені деякою взаємодією між частинками у багаточастинковій системі, а оскільки їх джерело одне й те саме, між ними виникає співвідношення (див. [18])

$$n \frac{\partial U(n, T)}{\partial n} = \frac{\partial P_{\text{ex}}(n, T)}{\partial n}. \quad (5)$$

Щоб знайти розв'язок задачі, необхідно спочатку розв'язати самоузгоджене рівняння для густини частинок  $n$  для кожної заданої температури  $T$

$$n = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \left\{ \exp \left[ \frac{E(\mathbf{k}, n)}{T} \right] - 1 \right\}^{-1}. \quad (6)$$

У цій роботі ми розглянемо піонні системи з  $\mu = 0$ , тому ненульова густина піонів можлива лише при  $T > 0$ .

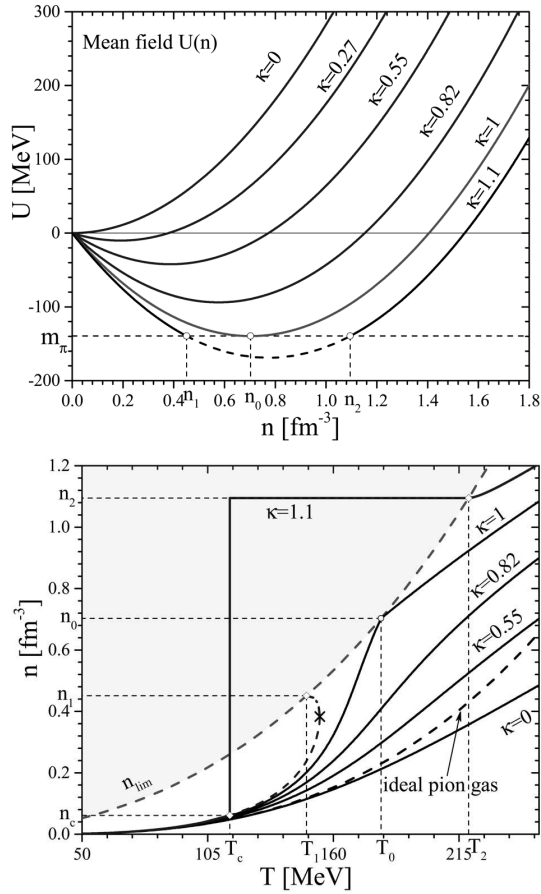
## 3. Початок бозе-конденсації

З функції розподілу Бозе-Ейнштейна (3) випливає, що при імпульсах  $|\mathbf{k}| = 0$  одночастинкова енергія повинна задовольняти умові  $E(\mathbf{0}, n) \geq 0$ , інакше функція розподілу (3) приймає від'ємні значення. Саме ця умова визначає інтервал температур, де відбувається бозе-конденсація.

Гранична густина теплових частинок,  $n_{\text{lim}}(T)$ , безпосередньо перед утворенням бозе-конденсату, тобто при  $U(n) = -m$ , така сама, що й в ідеальному газі при  $\mu = m$

$$n_{\text{lim}}(T) = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \left[ \exp \left( \frac{\sqrt{m^2 + k^2} - m}{T} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (7)$$

На рис. 1 (нижня панель) ця залежність зображена як червона пунктирна лінія, яка розділяє нормальну фазу (яка містить тільки теплові частинки) та фазу, що містить частинки у конденсатному



**Рис. 1.** Верхня панель: Залежність середнього поля  $U(n)$  від густини частинок для різних значень параметра  $\kappa = A/A_c$ . Густина  $n_1$ ,  $n_2$  та  $n_0$  – точки перетину з лінією  $U = -m_\pi$ . Нижня панель: Залежність густини частинок від температури для системи взаємодіючих піонів із  $\mu = 0$ . Температури  $T_1$ ,  $T_2$  та  $T_0$  відповідають точкам, де густини  $n_1$ ,  $n_2$  та  $n_0$  перетинають граничну межу  $n_{\text{lim}}(T)$  (червона пунктирна крива)

стані. Тож для потенціалів середнього поля менших ніж  $-m$ , у рівноважній системі бозонів утворюється бозе-конденсат.

### 3.1. Параметризація Скірма для середнього поля

Формалізм, розглянутий у попередньому розділі, був застосований для кількох цікавих з фізичної точки зору систем, включаючи адрон-резонансний газ [18] та піонний газ [21]. Далі даний підхід буде узагальнено на випадок бозонної системи, у якій потенційно може відбуватись бозе-конден-

сація. Щоб проілюструвати таку можливість, ми розглянемо модель, подібну до моделі Скірма [22], де вважається, що взаємодія між частинками описується середнім полем

$$U(n) = -An + Bn^2, \quad (8)$$

де  $A$  і  $B$  – додатні параметри, які треба задати для кожного сорту частинок. Отже, ми розглядаємо загальний випадок і досліджуємо бозонну систему, яка має як притягуючий, так і відштовхуючий внесок у середнє поле (8). Додатковий внесок у притягуючу компоненту середнього поля на високих енергіях або при високих температурах ( $T \propto 150$  MeV) може забезпечуватись іншими адронами, що присутні в системі.

Надлишковий тиск отримують, використовуючи умови термодинамічної узгодженості (5) з  $U(n)$  з рівняння (8),

$$P_{\text{ex}}(n) = \int_0^n dn' n' \frac{\partial U(n')}{\partial n'} = -\frac{1}{2} An^2 + \frac{2}{3} Bn^3, \quad (9)$$

де використано, що  $\lim_{n \rightarrow 0} U(n) = 0$ .

Для числових розрахунків маса бозонів обирається рівною  $m_\pi = 140$  MeV і коефіцієнт виродження  $g = 3$ . Такі частинки це ніщо інше як “піони”. Для коефіцієнта відштовхування  $B > 0$  ми використовуємо фіксовану величину, отриману з оцінки на основі віріального розкладу [23],  $B = 10m_\pi b^2$  при  $b$ , що дорівнює чотирьом об’ємам частинки, тобто  $b = 16\pi r_0^3/3$ . Далі ми обираємо  $b = 0,45$  фм<sup>3</sup>, що відповідає радіусу піона  $r_0 \approx 0,3$  фм. Коефіцієнт притягання  $A$  розглядається як параметр моделі, який ми будемо змінювати. Потенціал  $U(n)$  показано на рис. 1 (верхня панель) для кількох значень параметра  $\kappa = A/A_c$ , що характеризує інтенсивність взаємодії притягання. Тут  $A_c = 2\sqrt{mB}$  – критичне значення  $A$ , при якому потенціал досягає мінімального значення  $-m$ . Нижче ми вибираємо  $\kappa$  як варіаційний параметр, тобто параметризуємо варіацію коефіцієнта притягання  $A$  безрозмірним параметром  $\kappa$ . Значення  $\kappa \geq \kappa_c = 1$  приводять до перетину рівня  $-m$  та появи інтервалу густин, де функція  $E(\mathbf{0}, n)$  є від’ємною. Кінцеві точки цього інтервалу визначаються з рівняння

$$U(n) + m = 0. \quad (10)$$

Використавши потенціал  $U(n)$  з (8), можна отримати наступні розв'язки

$$\begin{aligned} n_1 &= \sqrt{\frac{m}{B}} \left( \kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1} \right), \\ n_2 &= \sqrt{\frac{m}{B}} \left( \kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

На інтервалі  $n_1 < n < n_2$  інтеграл у рівнянні (6) не є додатно визначеним, а тому такі густини не реалізуються в рівноважній системі. При  $\kappa > \kappa_c = 1$  зміна густини піонів від  $n = n_1$  до  $n = n_2$  можлива лише через їх конденсацію і перехід у стан із нульовим імпульсом  $|\mathbf{k}| = 0$ , так що їх загальна густина змінюється стрибком з  $n = n_1$  до  $n = n_2$ . Як видно з рівняння (11), критичне значення параметра  $A$  отримується, коли обидва корені збігаються, тобто коли  $\kappa = 1$  або  $A = A_c = 2\sqrt{mB}$ . Для параметра  $B$ , визначеного вище,  $A_c = 2\sqrt{10}m_\pi b \approx 398 \text{ MeV} \cdot \text{фм}^3$ . Коли досягається мінімум потенціалу  $-m_\pi$ , отримуємо відповідну критичну густину піонів  $n_0 = A_c/2B = \frac{1}{\sqrt{10}b} \approx 0,7 \text{ фм}^{-3}$ .

### 3.2. Густина енергії та тиск у газо-рідинній фазі

Для газо-рідинної фази  $\kappa \leq 1$ . Отже, очікується, що  $U(n) \geq -m$  для всіх  $n$ . Щоб отримати густину частинок  $n(T)$  потрібно розв'язати самоузгоджене рівняння (6) для фіксованого значення  $\kappa \leq 1$  і для відповідних температур із заданого інтервалу. На нижній панелі рис. 1 зображено результати обчислення густини піонів для кількох значень параметра  $\kappa = 0, 0,55, 0,82, 1$  (чорні суцільні лінії). Пунктирна чорна крива відповідає ідеальному піонному газу з  $\mu = 0$ .

Знаючи залежність  $n(T)$ , ми можемо обчислити тиск та густину енергії у газо-рідинній фазі з використанням рівнянь (2), (4) виразу для  $P_{\text{ex}}(n)$  з (9).

### 3.3. Самоузгоджений розв'язок для змішаної фази

Повернемось до рівняння (6), яке визначає густину частинок як функцію температури. Ітераційним методом знайдено розв'язок  $n(T)$  для кількох значень  $\kappa$ , які показано на рис. 1. Також на даному малюнку показана гранична густина  $n_{\text{lim}}(T)$ , рівняння (7). У класичному розумінні конденсації Бозе-Ейнштейна (див., наприклад, [24]), вище  $T_c$  густина частинок складається з двох внесків:

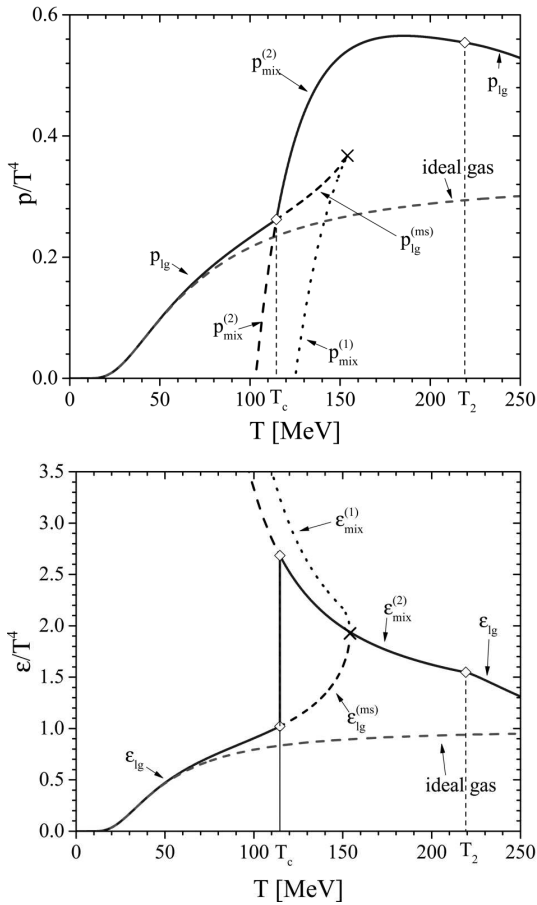
теплові частинки та конденсат. Отже, у змішаній фазі самоузгоджене рівняння (6) узагальнюється таким чином (див. [22, 24])

$$n = n_{\text{cond}} + \frac{g}{2\pi^2} \int_{k \neq 0} dk k^2 \left\{ \exp \left[ \frac{E(\mathbf{k}, n)}{T} \right] - 1 \right\}^{-1}, \quad (12)$$

де  $n$  – загальна густина частинок, яка складається з густини теплових частинок  $n_{\text{th}}$  та густини конденсованих частинок  $n_{\text{cond}}$ , які мають нульовий імпульс. Необхідно зауважити, що у нашій роботі  $T_c$  – це температура початку конденсації, тоді як у підручниках це позначення зазвичай використовують для найбільшої температури, при якій конденсація закінчується.

Критичне значення  $\kappa_c = 1$  розділяє два якісно відмінні режими. При  $\kappa < \kappa_c$  криві  $n(T)$  неперервні, тоді як при  $\kappa > \kappa_c$  вони складаються з двох частин з проміжком між ними. Цей розрив з'являється саме між густинами  $n_1$  і  $n_2$ , де  $U(n) + m_\pi < 0$ , див. рис. 1. Для параметра  $\kappa = 1,1$  отриманий розв'язок для густини частинок зображено на нижній панелі рис. 1 суцільною синьою кривою, яка складається з декількох частин. Нижня гілка при критичній температурі  $T = T_c$  має стрибок зі значення  $n_c = 0,06 \text{ фм}^{-3}$  до значення  $n_2 = 1,09 \text{ фм}^{-3}$ . Це наслідок фазового переходу, що приводить до утворення бозе-конденсату в цій точці. Оскільки густина змінюється стрибком, це, безумовно, фазовий перехід першого роду. Очевидно, що при подальшому підвищенні температури система піонів буде еволюціонувати вздовж горизонтальної лінії  $n = n_2$  від  $T_c = 115 \text{ MeV}$  до  $T_2 = 219 \text{ MeV}$ , як показано на рис. 1 (для  $\kappa = 1,1$ ). Критична температура  $T_c$  визначається з точки перетину кривих тиску для газо-рідинної та змішаної фаз. Це графічно показано на рис. 2 (верхня панель). При  $T > T_c$  гілка самоузгодженого розв'язку для газо-рідинної фази (синя пунктирна лінія на рис. 1) стає метастабільною і має поворот (від'ємну похідну) під час наближення до граничної густини  $n_{\text{lim}}(T)$  знизу. Зауважимо, що верхній сегмент (після точки позначеної хрестом) є нестійким у термодинамічному сенсі.

Якщо досягнути температури  $T_c$  та продовжувати накачувати енергію в багаточастинкову систему піонів, відбудеться фазовий перехід, що приве-



**Рис. 2.** Верхня панель: Залежність тиску нормованого на  $T^4$  від температури для системи взаємодіючих піонів із  $\mu = 0$  і параметром притягання  $\kappa = 1.1$ . Суцільні сині лінії, позначені як  $p_{lg}$  і  $p_{mix}^{(2)}$ , відповідають тиску у газо-рідинній та змішаній фазах (вздовж  $n = n_2$ ) відповідно, і відображають отримане рівняння стану. Нижня панель: Залежність густини енергії нормованої на  $T^4$  від температури при тих самих умовах та значеннях параметрів як на верхній панелі. Синя суцільна крива, яка складається з декількох сегментів, позначена як  $\epsilon_{lg}$  та  $\epsilon_{mix}^{(2)}$  з вертикальним відрізком вздовж  $T = T_c$ , являє собою рівняння стану. Густина енергії в змішаній фазі  $\epsilon_{mix}^{(1)}$  розрахована при постійній густині частинок  $n = n_1$  зображена точковою чорною лінією

де до утворення бозе-конденсату навіть у системі з  $\mu = 0$ . Як наслідок, густина піонів буде мати стрибок вздовж лінії  $T = T_c$ .

Рівняння (12) є коректним у нашому конкретному випадку, де система еволюціонує вздовж лінії постійної густини  $n = n_2$ . Дійсно, для кожної температури  $T$  з інтервалу  $T_c < T \leq T_2$  (див. рис. 1) густина частинок має величину  $n = n_2$  і,

таким чином, значення середнього поля дорівнює  $U(n_2) = -m$ . У зв'язку з цим ми можемо переписати рівняння (12) як

$$n_2 = n_{\text{cond}}(T) + n_{\text{lim}}(T), \quad (13)$$

де ми використовуємо визначення (7) величини  $n_{\text{lim}}$ . З рівняння (13) можна побачити, що в змішаній фазі загальна густина частинок  $n = n_2$  дійсно складається з внеску конденсату  $n_{\text{cond}}$  та теплових частинок  $n_{\text{th}}$ , які досягають максимальної густини  $n_{\text{lim}}(T)$  при заданому  $T$ . Отже, рівняння (12) слід розглядати як самоузгоджений опис піонного конденсату в рамках підходу середнього поля.

### 3.4. Тиск та густина енергії у змішаній фазі

Як було показано у попередньому розділі, у змішаній фазі при наявності бозе-конденсату загальна густина частинок  $n$  є постійною та рівною  $n = n_2$ , таким чином тиск можна виразити як

$$p_{\text{mix}}(T) = \frac{g}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{\sqrt{m^2 + k^2}} \times \left\{ \exp \left[ \frac{\sqrt{m^2 + k^2} + U(n_2)}{T} \right] - 1 \right\}^{-1} + P_{\text{ex}}(n_2), \quad (14)$$

де  $U(n_2) = -m$  та  $P_{\text{ex}}(n)$  задається рівністю (9). Слід пам'ятати, що частинки конденсату з  $|\mathbf{k}| = 0$  не дають внеску в кінетичну частину тиску (перший доданок), але впливають на тиск взаємодії через  $P_{\text{ex}}$  (другий доданок). На рисунку 2 (верхня панель) показано кілька гілок тиску, які представляють різні фази. Отримане рівняння стану зображено як суцільна синя крива. Критична температура,  $T_c = 115$  MeV, отримується з точки перетину двох гілок тиску: тиску газо-рідинної фази для  $\kappa = 1,1$  і тиску змішаної фази при  $n = n_2$ . Це пояснює чому бозе-конденсат з'являється лише при температурах, вищих  $T_c$ , коли додатковий тепловий тиск компенсує від'ємний внесок  $P_{\text{ex}}$ . При  $T > T_c$  гілка, що відповідає газо-рідинній фазі  $p_{lg}^{(ms)}$ , є метастабільною (пунктирна чорна крива на рис. 2). Хрест позначає злам. Точкова та пунктирна чорні лінії, підписані як  $p_{mix}^{(1)}$  та  $p_{mix}^{(2)}$  на рис. 2, відповідають метастабільним станам у змішаній фазі для піонних густин  $n = n_1$  та  $n = n_2$  відповідно.

У змішаній фазі густина енергії складається з кінетичної частини,  $\epsilon_{\text{kin}}(T)$ , яка відповідає тепловим

частинкам в газо-рідинній фазі з густиною  $n_{\text{lg}}(T)$ . Частинки конденсату з густиною  $n_{\text{cond}}(T)$  мають нульовий імпульс. Відповідно до самоузгодженого розв'язку рівняння (12), у змішаній фазі сума цих густин залишається постійною,  $n_{\text{lg}}(T) + n_{\text{cond}}(T) = n_2$ . Ця постійна густина  $n_2$  визначає надлишкову густину енергії  $\varepsilon_{\text{ex}}(n_2)$  у змішаній фазі. Особливість змішаної фази полягає і в тому, що маса конденсованих частинок дає ще один вклад у густину енергії,  $mn_{\text{cond}}(T)$ . Використавши рівняння (4) із  $U(n_2) = -m$  для того, щоб отримати  $\varepsilon_{\text{ex}}(n_2) = -mn - P_{\text{ex}}(n_2)$ , та рівняння (13), щоб визначити  $n_{\text{cond}}(T)$ , можна записати густину енергії у змішаній фазі як

$$\varepsilon_{\text{mix}}^{(2)} = g \int_{|\mathbf{k}| \neq 0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left( \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} - m \right) \times \left[ \exp \left( \frac{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} - m}{T} \right) - 1 \right]^{-1} - P_{\text{ex}}(n_2). \quad (15)$$

На рис. 2 (нижня панель) зображено густину енергії нормовану на  $T^4$  при  $\kappa = 1.1$  в різних фазах: рівняння стану взаємодіючих піонів у температурному інтервалі  $0 < T < 250$  MeV (синя суцільна крива, яка включає в себе стрибок в точці фазового переходу  $T_c$ ), густина енергії піонів у метастабільному стані  $\varepsilon_{\text{mix}}^{(1)}$  розрахована при сталій густині  $n = n_1$  (чорна точкова крива) у змішаній фазі, густина енергії метастабільних станів у газо-рідинній фазі  $\varepsilon_{\text{lg}}^{(\text{ms})}$  (синій пунктир) і густина енергії ідеального газу піонів при  $\mu = 0$  (червона пунктирна крива). Легко побачити, що для  $\kappa = 1,1$  модель прогнозує стрибок густини енергії вгору приблизно на  $30 \text{ MeV}/\text{фм}^3$  (прихована теплота) при критичній температурі  $T_c = 115$  MeV. Це ще один прояв фазового переходу першого порядку.

#### 4. Висновки

У даній роботі представлено термодинамічно узгоджений метод опису бозонних систем із високою густиною при високих температурах і нульовому хімічному потенціалі. Основним кроком такого підходу є розв'язок самоузгодженого рівняння (6) для піонної густини при заданій температурі та присутньому середньому полі  $U(n)$ , заданому виразом (8). Слід зауважити, що інтеграл у рівнянні (6) є додатно визначеним лише у випадку, якщо

виконується умова  $U(n) \geq -m$ . Якщо притягуюча компонента середнього поля настільки сильна, що дана умова порушується, у багаточастинковій системі бозонів утворюється бозе-конденсат. Спираючись на аналіз, проведений в даній роботі, можна зробити висновок, що в присутності конденсату дозволені стани системи повинні задовольняти умові  $U(n) + m = 0$ , де  $n$  – загальна густина частинок, включаючи конденсат. Така дуже незвична поведінка можлива лише за наявності сильної притягуючої взаємодії між бозонами. Однак емпіричні дані та теоретичні розрахунки показують, що піон-піонна взаємодія слабка при енергіях  $\leq 100$  MeV. Тим не менш, додатковий внесок у середнє поле може забезпечуватись за рахунок притягуючої взаємодії піонів із нуклонами у відносно холодній ядерній речовині, як показано у роботах [1–4], або за рахунок  $\rho$ -мезонних та баріон-антибаріонних пар при високих температурах, як показано у роботах [25, 26]. Очевидно, що при високих температурах у адронній матерії буде з'являтися багато інших частинок. Вони можуть вносити додатковий вклад у притягання в середньому полі, який відчувають піони. За рахунок цього можуть з'явитись нові доданки у оптичному потенціалі піонів, які будуть пропорційними до густини цих додаткових частинок, див. [25]. За таких умов ефективна маса піонів зменшиться, а отже зменшиться і температурний поріг для появи конденсату піонів, як видно з рівняння (10). Ще одна цікава можливість, досліджена в [8–13], це бозе-конденсація в чистій системі піонів з ізоспіновим хімічним потенціалом, відмінним від 0. Ми плануємо розглянути такі взаємодіючі системи в майбутньому. Наостанок хотілося б зазначити, що на перший погляд при високих густинах частинок ( $n \approx 1 \text{ фм}^{-3}$ ) і високих температурах ( $T \geq 150$  MeV) вибір мезонних ступенів свободи може бути невдалим, як розглянуто в даній роботі. Але температура конденсації  $T_c \approx 115$  MeV лежить у чітко визначеному адронному діапазоні, а отже розпад піонів на кварки та антикварки під час нагрівання системи може йти безпосередньо з фази конденсованих піонів з високою густиною. І навпаки, під час охолодження системи м'які піони можуть утворювати конденсат на стадії адронізації.

*Робота Д.А. і Д.Ж. була підтримана Програмою “Структура та динаміка статистичних та*

квантовопольових систем” Відділення фізики і астрономії НАН України. Робота І.М. отримала фінансову підтримку від Міжнародного центру “Helmholtz-FAIR”, Німеччина. Робота О.С. підтримана в рамках наукової програми “Астрономія і фізика космосу” (Проект 19БФ023-01) Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Х.Ш. високо цінує підтримку кафедри лауреатів премії Д.М. Ейзенберга.

1. A.B. Migdal. Stability of vacuum and limiting fields. *Sov. Phys. JETP* **34** (6), 1184 (1972).
2. A.B. Migdal, O.A. Markin, I.N. Mishustin. The pion spectrum in nuclear matter and pion condensation. *Sov. Phys. JETP* **39** (2), 212 (1974).
3. A.B. Migdal. Pion fields in nuclear matter. *Rev. Mod. Phys.* **50**, 107 (1978).
4. A.B. Migdal, E. Saperstein, M. Troitsky, and D. Voskresensky. Pion degrees of freedom in nuclear matter. *Phys. Rept.* **192**, 179 (1990).
5. A. Anselm, M. Ryskin, *Phys. Lett B* **226**, 482 (1991). Production of classical pion field in heavy ion high energy collisions. *Phys. Lett B* **226**, 482 (1991).
6. J.-P. Blaizot, Krzwinski. Soft-pion emission in high-energy heavy-ion collisions. *Phys. Rev. D* **46**, 246 (1992).
7. J.D. Bjorken. A full-acceptance detector for SSC physics at low and intermediate mass scales: an expression of interest to the SSC. *Intern. J. Mod. Phys. A* **7**, 4189 (1992).
8. I.N. Mishustin, W. Greiner. Multipion droplets. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **19**, L101 (1993).
9. D.T. Son, M.A. Stephanov. QCD at finite isospin density. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 592 (2001); arXiv:hep-ph/0005225.
10. J. Kogut, D. Toublan. QCD at small non-zero quark chemical potentials. *Phys. Rev. D* **64**, 034007 (2001); [arXiv:hep-ph/0103271].
11. D. Toublan, J. Kogut. Isospin chemical potential and the QCD phase diagram at nonzero temperature and Baryon chemical potential. *Phys. Lett. B* **564**, 212 (2001); [arXiv:hep-ph/0301183].
12. A. Mammarella, M. Mammarelli. Intriguing aspects of meson condensation. *Phys. Rev. D* **92**, 085025 (2015); [1507.02934 [hep-ph]], 2015.
13. S. Carignano, L. Lepori *et al.* Scrutinizing the pion condensed phase. *Eur. Phys. J. A* **53**, 35 (2017); arXiv:1610.06097 [hep-ph].
14. B.B. Brandt, G. Endrodi. QCD phase diagram with isospin chemical potential. *PoS LATTICE2016* **039** (2016); [arXiv:1611.06758 [hep-lat]].
15. B.B. Brandt, G. Endrodi, S. Schmalzbauer. QCD at finite isospin chemical potential. arXiv:1709.10487 [hep-lat].
16. L.M. Satarov, M.N. Dmitriev, I.N. Mishustin. Equation of state of hadron resonance gas and the phase diagram of

strongly interacting matter. *Phys. Atom. Nucl.* **72**, 1390 (2009).

17. V. Vovchenko, A. Motornenko, P. Alba *et al.* Multi-component van der Waals equation of state: Applications in nuclear and hadronic physics. *Phys. Rev. C* **96**, 045202 (2017).
18. D. Anchishkin, V. Vovchenko. Mean-field approach in the multi-component gas of interacting particles applied to relativistic heavy-ion collisions. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **42**, 105102 (2015); arXiv:1411.1444 [nucl-th].
19. D.V. Anchishkin. Particle finite-size effects as a mean-field approximation. *Sov. Phys. JETP* **75**, 195 (1992) [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **102**, 369 (1992)].
20. D. Anchishkin, E. Suhonen. Generalization of mean-field models to account for effects of excluded-volume. *Nucl. Phys. A* **586**, 734 (1995).
21. R.V. Poberezhnyuk, V. Yu. Vovchenko, D.V. Anchishkin, M.I. Gorenstein. Limiting temperature of pion gas with the van der Waals equation of state. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **43**, 095105 (2016); arXiv:1508.04585 [nucl-th].
22. D. Anchishkin, I. Mishustin and H. Stoecker. Phase Transition in Interacting Boson System at Finite Temperatures. *J. Phys. G* **46**, 035002 (2019); arXiv:1806.10857 [nucl-th].
23. J.P. Hansen, I.R. McDonald. Virial expansion of the equation of state. In: *Theory of Simple Liquids* (Academic Press, 2006), p. 75, Eq. (3.9.14).
24. A.J. Leggett. *Quantum Liquids* (Oxford University Press Inc., 2006).
25. E.V. Shuryak. Collective interaction of mesons in hot hadronic matter. *Nucl. Phys. A* **533**, 761 (1991).
26. J. Theis, G. Graebner, G. Buchwald, J. Maruhn, W. Greiner, H. Stoecker, J. Polonyi. Phase transition of the nucleon-antinucleon plasma in a relativistic mean-field theory. *Phys. Rev. D* **28**, 2286 (1983).

Одержано 22.10.19

*D. Anchishkin, I. Mishustin,  
O. Stashko, D. Zhuravel, H. Stoecker*

#### FINITE-TEMPERATURE BOSE-EINSTEIN CONDENSATION IN INTERACTING BOSON SYSTEM

#### S u m m a r y

Thermodynamical properties of an interacting boson system at finite temperatures and zero chemical potential are studied within the framework of the Skyrme-like mean-field toy model. It is assumed that the mean field contains both attractive and repulsive terms. Self-consistency relations between the mean field and thermodynamic functions are derived. It is shown that, for sufficiently strong attractive interactions, this system develops a first-order phase transition via the formation of a Bose condensate. An interesting prediction of the model is that the condensed phase is characterized by a constant total density of particles. It is shown that the energy density exhibits a jump at the critical temperature.