

М. ДЯЧЕНКО, О. НОВАК, Р. ХОЛОДОВ

Інститут прикладної фізики НАН України

(Вул. Петропавлівська, 58, Суми 40000; e-mail: mykhailo.m.diachenko@gmail.com)

## ВАКУУМНЕ ПОДВІЙНЕ ПРОМЕНЕЗАЛОМЛЕННЯ В НАДКРИТИЧНОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ

УДК 530.145

*В роботі розглянуто ефект подвійного променезаломлення фізичного вакууму в сильному магнітному полі. В рамках квантової теорії поля досліджено поляризаційний тензор у постійному зовнішньому магнітному полі на основі функції Гріна електрона через суму по рівнях Ландау. Розглянуто випадок найнижчих рівнів Ландау для фотонів з енергією нижче порога народження електрон-позитронної пари. Знайдено, в даному наближенні, показники заломлення фізичного вакууму для аномальної та нормальної хвилі.*

*Ключові слова:* вакуумне подвійне променезаломлення, квантова електродинаміка, сильне магнітне поле.

### 1. Вступ

Як відомо з класичної теорії поля, електромагнітні хвилі розповсюджуються незалежно одна від одної та не змінюють своєї поляризацію при розповсюдженні у вакуумі, тобто рівняння Максвелла є лінійними (лагранжіан електромагнітного поля є квадратичною функцією від напруженості електричного та магнітного полів). Але згідно з квантовою електродинамікою (КЕД) можливе народження віртуальних електрон-позитронних пар фотонами в зовнішньому полі, які, в свою чергу, можуть взаємодіяти з цим полем. Таким чином, можливе протікання нелінійних КЕД ефектів, зокрема ефекту вакуумного подвійного променезаломлення. Цей ефект полягає у зміні поляризації фотонів внаслідок народження та анігіляції віртуальних електрон-позитронних пар в сильному зовнішньому електромагнітному полі. Зовнішнє поле перетворює фізичний вакуум на анізотропне середовище з різними показниками заломлення вздовж та перпендикулярно по відношенню до поля.

Незважаючи на те, що цей ефект був передбачений досить давно, ще й досі немає прямого експериментального підтвердження. Але з появою потужних лазерних установок, високочутливих приладів для вимірювання еліптичності й кута повороту площини поляризації електромагнітного випромінювання, надчутливих телескопів, які аналізують поляризацію випромінювання від нейтронних зірок ця задача стає вкрай актуальною.

Так, ефект появи еліптичності у лінійно поляризованої електромагнітної хвилі при проходженні через ділянку з магнітним полем, інтенсивно досліджується на установці PVLAS (Polarization of the vacuum with laser) [1]. Останні результати з цієї установки показують, що чутливості ще не вистачає для спостереження даного ефекту [2, 3].

Поява потужних лазерних установок, таких як PHELIX (Facility for Antiproton and Ion Research, Germany) [4], Vulcan (Central Laser Facility, United Kingdom) [4], Apollon (Orme des Merisiers, Saclay, France) [5] привела до ідеї перевірки нелінійних КЕД ефектів у лазерних полях. Вона полягає у зіткненні між двома лазерними променями, один з яких виконує роль фонового електромагнітно-

го поля з високою інтенсивністю, а інший – мало інтенсивне лінійно поляризоване рентгенівське випромінювання, яке досліджується на появу еліптичності. Поляризаційні властивості фізичного вакууму за таким сценарієм будуть досліджуватися в HIBEF (the Helmholtz international beamline for extreme fields) на установці XFEL (European X-ray Free Electron Laser, Germany) [6].

В даний час також створюється лазерна установка ELI (Extreme Light Infrastructure, Czech Republic, Romania, Hungary) [7], яка відкриє нові можливості у вивченні взаємодії лазерного випромінювання з речовиною. В рамках даного проєкту також плануються експерименти з перевірки нелінійних ефектів квантової електродинаміки в сильних електромагнітних полях, зокрема, дослідження ефекту подвійного променезаломлення в лазерному полі. Слід зазначити, що збільшення інтенсивності лазерного поля приводить до нових наукових задач щодо дослідження впливу лазерного поля різної конфігурації на фізичні явища, що охоплюють дуже різномірні області як фундаментальної, так і прикладної науки. При цьому такі інтенсивні поля дозволяють експериментально перевірити низку нелінійних КЕД ефектів сильних полів.

Слід відзначити, що протягом останнього часу проводяться інтенсивні експериментальні дослідження зміни поляризації фотонів у сильних магнітних полях нейтронних зірок. Зокрема, у 2016 році було вперше визначено зміну поляризації оптичних фотонів при проходженні через магнітосферу ізольованої нейтронної зірки RX J1856.5-3754 та було знайдено ступінь поляризації таких фотонів, що є, за висновками авторів, підтвердженням поляризаційних властивостей фізичного вакууму [8].

Що стосується теоретичних досліджень, перші роботи були [9, 10], в яких описуються флуктуації електрон-позитронного поля в наближенні слабких зовнішніх полів та енергії фотона набагато меншої маси електрона  $E/E_c \ll 1$ ,  $H/H_c \ll 1$ , де  $E_c \approx 1,32 \cdot 10^{16}$  В/см – критичне значення напруженості електричного поля, при якому можливий процес спонтанного народження електрон-позитронних пар із вакууму,  $H_c \approx 4,41 \cdot 10^{13}$  Гс – критичне значення напруженості магнітного поля. Згідно з цією теорією врахування нелінійних ефектів призводить до появи додаткового

доданка в лагранжіан електромагнітного поля, який повинен бути релятивістським інваріантом. Одним з наслідків підходу на основі лагранжіана Гейзенберга–Ейлера є ефект подвійного променезаломлення, тобто у сильних електромагнітних полях фізичний вакуум стає анізотропним середовищем, завдяки чому і протікає даний ефект. Теоретичне дослідження цього ефекту було розвинуто в подальшому за допомогою визначення поляризаційного тензора, який описує поляризацію вакууму в зовнішніх полях. Так, у роботі [11] був вперше отриманий поляризаційний тензор фотона в постійному електромагнітному полі довільної конфігурації використовуючи при цьому метод вільного часу Швінгера [12]. У роботах [13–15] були проведені аналогічні розрахунки для випадку постійного однорідного магнітного поля та розглянуто ряд граничних випадків. Пізніше в [16] були знайдені показники заломлення фізичного вакууму у випадках слабого та сильного магнітного поля в порівнянні з критичним для енергій фотона, меншої від порога народження електрон-позитронної пари. Слід зазначити, що надкритичні магнітні поля спостерігаються в магнетарах, які були відкриті при спостереженні випромінювання в області рентгенівського і гамма-спектрів. Також в [17] чисельно знайдені скалярні функції поляризаційного тензора для довільних значень магнітного поля та для фотонів з  $\omega < 2m$ . Відзначимо роботи [18, 19], де вивчався резонансний випадок, коли проміжні частинки виходять на масову поверхню і становляться реальними. Слід відзначити, що роботи [11–18] оснований на функції Гріна електрона, яка була отримана за допомогою методу вільного часу Швінгера. При цьому поляризаційний тензор не містить явної залежності від номерів рівнів Ландау. Останнім часом з'явилися роботи, в яких отримані такі вирази, але це був результат математичних перетворень формул, які знайдені з використанням функції Гріна Швінгера [20, 21]. Послідовного дослідження поляризаційного тензора з використанням функцій Гріна в магнітному полі, яка визначається через суму по рівнях Ландау у базисі точних рішень рівняння Дірака, ще не проводилося. Відзначимо, що загальний вигляд поляризаційного оператора в наближенні найнижчих рівнів Ландау був отриманий в роботі [22] і був використаний у проблемі магнітного каталізу в роботі [23].

На відміну від раніше проведених досліджень, в даній роботі розглянуто поляризаційний тензор у магнітному полі на основі функції Гріна електрона через суму по рівнях Ландау. У розділі 2 розглянуто явний вигляд пропагатора електрона в магнітному полі. Розділ 3 містить послідовні математичні розрахунки поляризаційного тензора для довільного випадку. У розділі 4 проведено аналіз випадку найнижчих рівнів Ландау для фотонів з енергією нижче порога народження електрон-позитронної пари. У розділі 5 знайдено, в даному наближенні, показники заломлення фізичного вакууму, які характеризують ефект вакуумного подвійного променезаломлення.

## 2. Функція Гріна електрона через суму по рівнях Ландау

Надалі в роботі проводяться розрахунки в релятивістській системі одиниць ( $\hbar = c = 1$ ). Будемо використовувати калібровку Ландау, коли 4-потенціал  $A = (0, 0, xH, 0)$ .

Слід відзначити, що ефект вакуумного подвійного променезаломлення в магнітному полі пов'язаний з процесом народження віртуальної електрон-позитронної пари фотоном та її анігіляцією в один фотон. При цьому поляризаційні властивості фізичного вакууму описуються поляризаційним тензором, який в однопетльовому наближенні має такий вигляд:

$$\Pi^{\mu\nu}(x, x') = -ie^2 \text{Sp} \{ \gamma^\mu G(x, x') \gamma^\nu G(x', x) \}. \quad (1)$$

Діаграма Фейнмана поляризаційного тензора зображена на рис. 1.

У виразі (1)  $G(x, x')$  – функція Гріна електрона в магнітному полі, яка вперше була отримана в роботі [24] і дещо іншим методом у статтях [25, 26], а також був знайдений з використанням точних рішень рівняння Дірака у роботі [27]. Слід відзначити, що даний пропагатор використовувався для обчислення амплітуд процесів другого порядку, де проміжна частинка – електрон, зокрема в роботах [28–31]. Даний пропагатор має такий вигляд:

$$G(x, x') = -\frac{m\sqrt{\hbar}}{(2\pi)^3} \int d^3g e^{-i\Phi} \sum_n \frac{G_H(x, x')}{g_0^2 - E_n^2}, \quad (2)$$

де

$$G_H(x, x') = (\gamma P + m) [\tau U_n U'_n + \tau^* U_{n-1} U'_{n-1}] + im\sqrt{2nh}\gamma^1 [\tau U_{n-1} U'_n - \tau^* U_n U'_{n-1}], \quad (3)$$

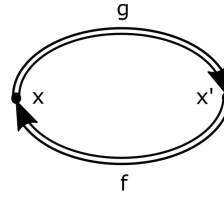


Рис. 1. Діаграма Фейнмана для поляризаційного тензора в магнітному полі

$$\Phi = g_0(x'_0 - x_0) - g_y(x'_2 - x_2) - g_z(x'_3 - x_3),$$

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} e^{-\frac{\rho^2}{2}} H_n(\rho),$$

$$\tau = \frac{1}{2}(1 + i\gamma^2\gamma^1),$$

$$P = (g_0, 0, 0, g_z),$$

$h = H/H_c$ ,  $H_c = m^2/e = 4,41 \cdot 10^{13}$  Гс – критичне магнітне поле Швінгера,  $d^3g = dg_0 dg_y dg_z$ ,  $\Phi$  – фаза,  $\gamma$  – матриці Дірака,  $H_n$  – поліном Ерміта,  $\rho(x) = m\sqrt{\hbar}x + g_y/m\sqrt{\hbar}$  – аргумент  $U_n$  та штриховані функції в (3) залежать від  $x'$ . У виразі (2)  $E_n$  – енергія електрона, який в однорідному магнітному полі займає дискретні рівні енергії:

$$E_n = \sqrt{g_z^2 + \tilde{m}^2}, \quad \tilde{m} = m\sqrt{1 + 2nh}, \quad (4)$$

де  $g_z$  – поздовжня полю компонента імпульсу,  $n$  – номер рівня Ландау.

Після інтегрування виразу (2) за  $g_y$  можна отримати:

$$G(x, x') = -e^{-i\Phi'(x, x')} G(z), \quad (5)$$

де

$$G(z) = \frac{m^2 \hbar}{(2\pi)^3} \int dg_0 dg_z e^{i(zP)} \sum_n \frac{G_H(z_1, z_2)}{g_0^2 - E_n^2}, \quad (6)$$

$$G_H(z_1, z_2) = e^{-\frac{\xi}{2}} \left\{ (\gamma P + m) (\tau L_n + \tau^* L_{n-1}) - 2in\gamma^1 \left( \frac{\tau}{z_1 + iz_2} + \frac{\tau^*}{z_1 - iz_2} \right) (L_n - L_{n-1}) \right\}, \quad (7)$$

$z = x - x'$ ,  $\Phi'(x, x') = (x_1 + x'_1)(x_2 - x'_2) m^2 \hbar / 2$ ,  $\xi = (z_1^2 + z_2^2) m^2 \hbar / 2$  – аргумент полінома Лагерра.

Після врахування виразу для функції Гріна (5) можна переписати поляризаційний тензор у магнітному полі (1) в такому вигляді:

$$\Pi^{\mu\nu}(z) = -ie^2 \text{Sp} \{ \gamma^\mu G(z) \gamma^\nu G(-z) \}. \quad (8)$$

### 3. Поляризаційний тензор у магнітному полі

В роботі для аналізу поляризаційних властивостей вакууму будемо використовувати фур'є-образ поляризаційного тензора:

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \int d^4z e^{-ikz} \Pi^{\mu\nu}(z). \quad (9)$$

З врахуванням виразу (6) та провівши інтегрування за змінними  $z_0$  і  $z_3$  можна знайти (9) у вигляді:

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -ie^2 \frac{m^4 h^2}{(2\pi)^4} \int d^2z_{\perp} d^2g_{\parallel} e^{i(k_1 z_1 + k_2 z_2)} \text{Sp} A^{\mu\nu}, \quad (10)$$

де

$$d^2z_{\perp} = dz_1 dz_2, \quad d^2g_{\parallel} = dg_0 dg_3,$$

$$A^{\mu\nu} = e^{-\xi} \sum_{n, n'=0}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^{16} B_j^{\mu\nu}}{(g_0^2 - E_n^2)(f_0^2 - E_{n'}^2)}. \quad (11)$$

У виразі (11) також введено  $B_j^{\mu\nu}$ , явний вигляд яких наведено в додатку А.

Без втрати загальності виберемо систему відліку, в якій відсутня поздовжня компонента хвильового вектора по відношенню до напрямку магнітного поля:

$$k_z = 0, \quad (12)$$

оскільки перетворення Лоренца вздовж магнітного поля не змінюють саме поле.

Для проведення інтегрування за змінними  $g_0$  та  $g_z$  у виразі (10) будемо використовувати  $\alpha$  - представлення [32], яке аналогічне методу власного часу Швінгера [12]:

$$\frac{1}{g_0^2 - E_n^2 + i\epsilon} = -i \int_0^{\infty} d\alpha e^{i\alpha(g_0^2 - E_n^2 + i\epsilon)}. \quad (13)$$

При інтегруванні в (10) також використаємо заміну змінних:

$$\alpha = \lambda \frac{1 - \xi}{2}, \quad \beta = \lambda \frac{1 + \xi}{2}. \quad (14)$$

Добре відомо, що поляризаційний тензор має розбіжність. Тому проведемо процедуру регуляризації або перенормування. Використаємо для цього метод регуляризації Боголюбова [32], згідно з яким

знаменник у виразі для функції Гріна можна переписати так:

$$\frac{1}{g_0^2 - E_n^2 + i\epsilon} = \frac{1}{g_0^2 - E_n^2 + i\epsilon} - \frac{1}{g_0^2 - E_n^2 - M^2 + m^2 + i\epsilon}, \quad (15)$$

де  $M$  - додаткова маса, яка прямує до нескінченності при знятті регуляризації,  $\epsilon$  - мала додатна величина.

Після проведення процедури регуляризації (15) та використовуючи  $\alpha$  - представлення (13), загальний поляризаційний тензор можна знайти у вигляді:

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = i \frac{e^2 m^4}{8\pi^2} h \sum_{n, n'=0}^{\infty} \int_{-1}^1 d\xi \int_0^{\infty} d\lambda E(\lambda, \xi) \sum_{j=1}^{15} \Pi_j^{\mu\nu}. \quad (16)$$

У формулі (16) введені такі позначення:

$$E(\lambda, \xi) = e^{-\epsilon\lambda} (e^{-i\lambda A} + e^{-i\lambda B} - e^{-i\lambda C} - e^{-i\lambda D}),$$

$$A = m^2 (1 + \Phi), \quad B = m^2 \left( \Phi + \frac{M^2}{m^2} \right),$$

$$C = m^2 \left\{ \Phi + \frac{1}{2} (1 + \xi) + \frac{M^2}{2m^2} (1 - \xi) \right\},$$

$$D = m^2 \left\{ \Phi + \frac{1}{2} (1 - \xi) + \frac{M^2}{2m^2} (1 + \xi) \right\},$$

$$\Phi = \tilde{\omega}^2 \xi^2 - h(n - n') \xi + h(n + n') - \tilde{\omega}^2,$$

а також  $\tilde{\omega} = \omega/2m$  та  $\Pi_j^{\mu\nu}$ , які приведені у додатку Б.

### 4. Випадок м'яких фотонів та сильного магнітного поля

Розглянемо випадок, коли енергія фотона менша від порогової енергії, необхідної для народження електрон-позитронної пари (м'які фотони) та надкритичного магнітного поля:

$$\tilde{\omega} < 1, \quad h \gg 1. \quad (17)$$

У цьому випадку працює наближення найнижчих рівнів Ландау і поляризаційний тензор (16) можна записати таким чином:

$$\Pi_{0,0}^{\mu\nu}(k) = i \frac{e^2 m^4}{8\pi^2} h e^{-\eta} \int_{-1}^1 d\xi \Pi_0^{\mu\nu} \int_0^{\infty} d\lambda E(\lambda, \xi), \quad (18)$$

де

$$\Pi_0^{\mu\nu} = \eta_{\parallel}^{\mu\nu} - \tilde{\omega}^2 (1 - \xi^2) U_{\parallel}^{\mu\nu}, \quad (19)$$

$$\eta_{\parallel}^{\mu\nu} = \text{diag}(1, 0, 0, -1), \quad U_{\parallel}^{\mu\nu} = \text{diag}(1, 0, 0, 1).$$

Після проведення процедури регуляризації можна записати інтеграл за змінною  $\lambda$  у такому вигляді:

$$\int_0^{\infty} d\lambda E(\lambda, \xi) = -\frac{i}{m^2} \frac{1}{1 + \Phi - i\tilde{\epsilon}}, \quad (20)$$

де  $\tilde{\epsilon} = \epsilon/m^2$ .

З врахуванням виразу (20) поляризаційний тензор (18) можна знайти у вигляді:

$$\Pi_{0,0}^{\mu\nu}(k) = e^2 \frac{m^2 h}{8\pi^2} e^{-\eta} \left[ (\eta_{\parallel}^{\mu\nu} - U_{\parallel}^{\mu\nu}) I_{0,0} + 2U_{\parallel}^{\mu\nu} \right], \quad (21)$$

де

$$I_{n-n',n'} = \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{1 + \Phi - i\tilde{\epsilon}}. \quad (22)$$

На рис. 2 та 3 наведені залежності реальної та уявної частин інтеграла (22) для деяких рівнів Ландау від  $\tilde{\omega}^2$  при  $h = 0.1$  і  $\tilde{\epsilon} = 0.01$ .

Для випадку найнижчих рівнів Ландау та довільної енергії фотона (при  $\tilde{\epsilon} \rightarrow 0$ ) можемо записати інтеграл (22) у вигляді:

$$I_{0,0} = \begin{cases} \frac{2}{\tilde{\omega}\sqrt{1-\tilde{\omega}^2}} \arctan\left(\frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{1-\tilde{\omega}^2}}\right), & \tilde{\omega} < 1; \\ \frac{1}{\tilde{\omega}\sqrt{\tilde{\omega}^2-1}} \left[ \ln \left| \frac{\tilde{\omega} - \sqrt{\tilde{\omega}^2-1}}{\tilde{\omega} + \sqrt{\tilde{\omega}^2-1}} \right| + i\pi \right], & \tilde{\omega} > 1. \end{cases} \quad (23)$$

З виразу (23) видно, що для енергії фотона, меншої від порога народження електрон-позитронної пари, поляризаційний тензор має лише дійсну частину (надалі будемо розглядати саме цей випадок), а для більшої – з'являється уявна частина, яка характеризує процес народження електрон-позитронної пари. Слід зазначити, що у випадку, коли енергія фотона дорівнює порогу процесу  $e^-e^+$  пари, проміжні частинки виходять на масову поверхню, іншими словами, виконується резонансна умова. При цьому потрібно враховувати ширину процесу, яку звичайно пов'язують з сумарною ймовірністю процесу розпаду проміжного стану [29–31]. З виразу (22) видно, що  $\tilde{\epsilon}$  відіграє роль ширини резонансного процесу.

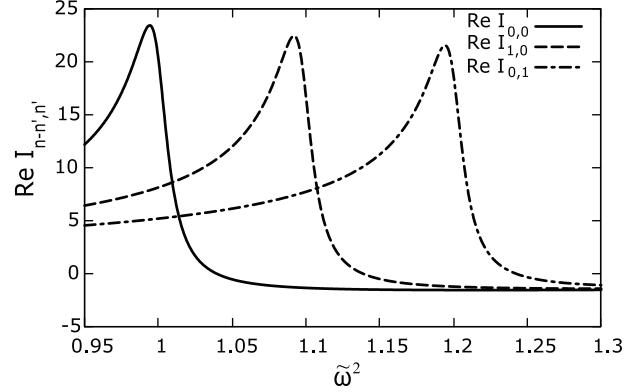


Рис. 2. Залежність реальної частини інтеграла (22) від  $\tilde{\omega}^2$  при  $h = 0,1$

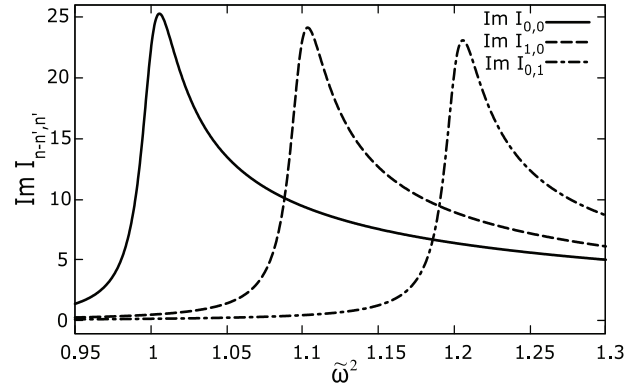


Рис. 3. Залежність уявної частини інтеграла (22) від  $\tilde{\omega}^2$  при  $h = 0,1$

Також відомо, що при  $\tilde{\omega} = 0$  поляризаційний тензор теж повинен дорівнювати нулю [20, 33], але з виразу (21) видно, що

$$\Pi_{0,0}^{\mu\nu}(0) = e^2 \frac{m^2 h}{4\pi^2} e^{-\eta} \eta_{\parallel}^{\mu\nu}. \quad (24)$$

Тому остаточний вигляд поляризаційного тензора для найнижчих рівнів Ландау можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{0,0}^{\mu\nu}(k) &= \Pi_{0,0}^{\mu\nu}(k) - \Pi_{0,0}^{\mu\nu}(0) = \\ &= e^2 \frac{m^2 h}{8\pi^2} e^{-\eta} \left[ (\eta_{\parallel}^{\mu\nu} - U_{\parallel}^{\mu\nu}) (I_{0,0} - 2) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Вираз (25) повністю збігається з результатами роботи [33], де використовувався інший метод дослідження. Слід відзначити, що з виразу для поляризаційного тензора у наближенні найнижчих рівнів

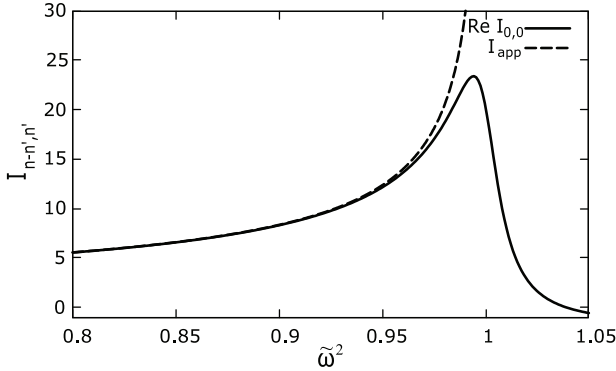


Рис. 4. Залежність реальної частини інтеграла (22) з врахуванням ширини та наближеної функції (26) для найнижчих рівнів Ландау від  $\tilde{\omega}^2$

Ландау видно, що він має явну поперечну структуру після проведення процедури, яка показана в (25). У той самий час загальний вираз (10), (11) для поляризаційного тензора в магнітному полі і (16) не є поперечними.

### 5. Показник заломлення в надкритичному магнітному полі

Знайдемо за допомогою поляризаційного тензора (25) показники заломлення фізичного вакууму вздовж та перпендикулярно по відношенню до напрямку магнітного поля. Розглянемо випадок, коли фотон розповсюджується вздовж осі  $Ox$  та має енергію меншу порогової для народження пари, а магнітне поле направлено вздовж  $Oz$ . У цьому випадку:

$$I_{0,0} = \frac{2}{\tilde{\omega}\sqrt{1-\tilde{\omega}^2}} \arctan\left(\frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{1-\tilde{\omega}^2}}\right). \quad (26)$$

На рис. 4 наведені залежності реальної частини інтеграла (22) з врахуванням ширини та наближена функція (26) для найнижчих рівнів Ландау від  $\tilde{\omega}^2$ .

Показники заломлення при цьому можна знайти таким чином:

$$n_{\parallel,\perp} = 1 - \frac{1}{2\tilde{\omega}^2} \text{Re}\Pi_{\parallel,\perp}, \quad (27)$$

де

$$\Pi_{\parallel,\perp} = e_{\mu}^{\parallel,\perp} \Pi^{\mu\nu} e_{\nu}^{\parallel,\perp}, \quad (28)$$

$$e_{\mu}^{\parallel} = (0, 0, 0, 1), \quad e_{\mu}^{\perp} = (0, 0, 1, 0). \quad (29)$$

Тоді виходячи з (27) показники заломлення вздовж та перпендикулярно по відношенню до магнітного поля мають вигляд:

$$n_{\parallel} = 1 + \frac{e^2 h}{32\pi^2 \tilde{\omega}^2} (I_{0,0} - 2), \quad (30)$$

$$n_{\perp} = 1. \quad (31)$$

В частинному випадку, коли  $\tilde{\omega} \ll 1$  та  $h \gg 1$  можна знайти:

$$n_{\parallel} - n_{\perp} = \frac{\alpha}{6\pi} h. \quad (32)$$

### 6. Висновки

У даній роботі проведено дослідження ефекту подвійного променезаломлення при розповсюдженні фотона в області з сильним магнітним полем. Для дослідження були використані методи квантової теорії поля у випадку присутності зовнішніх полів (картина Фаррі, коли зовнішнє поле враховується точно і розглядається як класичне, а взаємодія решти частинок розглядається в рамках квантової механіки).

У рамках цього підходу було досліджено поляризаційний тензор у постійному зовнішньому магнітному полі на основі функції Гріна електрона через суму по рівнях Ландау. Розглянуто випадок найнижчих рівнів Ландау (надкритичне магнітне поле) для фотонів з енергією нижче порога народження  $e^-e^+$  пари. Знайдено, в даному наближенні, показники заломлення фізичного вакууму та показано, як видно з виразу (32), що різниця показників заломлення аномальної та нормальної хвилі лінійно залежить від магнітного поля на відміну від випадку слабого магнітного поля, де різниця показників заломлення пропорційна квадрату від напруженості магнітного поля. Отриманий результат узгоджується з роботами [16], [34], в яких використовувався інший підхід для дослідження, а саме метод вільного часу Швінгера.

*Дана робота виконана в рамках держбюджетної наукової роботи № 0116U005848.*

### ДОДАТОК А

У даному додатку наведено явний вигляд тензорів  $B_j^{\mu\nu}$ , які входять у вираз (10):

$$B_1^{\mu\nu} = \gamma^\mu (\gamma g + m) \tau \gamma^\nu (-\gamma f + m) \tau L_n L_{n'},$$

$$B_2^{\mu\nu} = \gamma^\mu (\gamma g + m) \tau \gamma^\nu (-\gamma f + m) \tau^* L_n L_{n'-1},$$

$$\begin{aligned}
B_3^{\mu\nu} &= 2in'\gamma^\mu(\gamma g + m)\tau\gamma^\nu\gamma^1\tau(z_1 + iz_2)^{-1} \times \\
&\times L_n(L_{n'} - L_{n'-1}), \\
B_4^{\mu\nu} &= 2in'\gamma^\mu(\gamma g + m)\tau\gamma^\nu\gamma^1\tau^*(z_1 - iz_2)^{-1} \times \\
&\times L_n(L_{n'} - L_{n'-1}), \\
B_5^{\mu\nu} &= \gamma^\mu(\gamma g + m)\tau^*\gamma^\nu(-\gamma f + m)\tau L_{n-1}L_{n'}, \\
B_6^{\mu\nu} &= \gamma^\mu(\gamma g + m)\tau^*\gamma^\nu(-\gamma f + m)\tau^*L_{n-1}L_{n'-1}, \\
B_7^{\mu\nu} &= 2in'\gamma^\mu(\gamma g + m)\tau^*\gamma^\nu\gamma^1\tau(z_1 + iz_2)^{-1} \times \\
&\times L_{n-1}(L_{n'} - L_{n'-1}), \\
B_8^{\mu\nu} &= 2in'\gamma^\mu(\gamma g + m)\tau^*\gamma^\nu\gamma^1\tau^*(z_1 - iz_2)^{-1} \times \\
&\times L_{n'}(L_n - L_{n-1}), \\
B_9^{\mu\nu} &= -2in\gamma^\mu\gamma^1\tau\gamma^\nu(-\gamma f + m)\tau(z_1 + iz_2)^{-1} \times \\
&\times L_{n'}(L_n - L_{n-1}), \\
B_{10}^{\mu\nu} &= -2in\gamma^\mu\gamma^1\tau\gamma^\nu(-\gamma f + m)\tau^*(z_1 + iz_2)^{-1} \times \\
&\times L_{n'-1}(L_n - L_{n-1}), \\
B_{11}^{\mu\nu} &= 4nn'\gamma^\mu\gamma^1\tau\gamma^\nu\gamma^1\tau(z_1 + iz_2)^{-2} \times \\
&\times (L_n - L_{n-1})(L_{n'} - L_{n'-1}), \\
B_{12}^{\mu\nu} &= 4nn'\gamma^\mu\gamma^1\tau\gamma^\nu\gamma^1\tau^*(z_1^2 + z_2^2)^{-1} \times \\
&\times (L_n - L_{n-1})(L_{n'} - L_{n'-1}), \\
B_{13}^{\mu\nu} &= -2in\gamma^\mu\gamma^1\tau^*\gamma^\nu(-\gamma f + m)\tau(z_1 - iz_2)^{-1} \times \\
&\times L_{n'}(L_n - L_{n-1}), \\
B_{14}^{\mu\nu} &= -2in\gamma^\mu\gamma^1\tau^*\gamma^\nu(-\gamma f + m)\tau^*(z_1 - iz_2)^{-1} \times \\
&\times L_{n'-1}(L_n - L_{n-1}), \\
B_{15}^{\mu\nu} &= 4nn'\gamma^\mu\gamma^1\tau^*\gamma^\nu\gamma^1\tau(z_1^2 + z_2^2)^{-1} \times \\
&\times (L_n - L_{n-1})(L_{n'} - L_{n'-1}), \\
B_{16}^{\mu\nu} &= 4nn'\gamma^\mu\gamma^1\tau^*\gamma^\nu\gamma^1\tau^*(z_1 - iz_2)^{-2} \times \\
&\times (L_n - L_{n-1})(L_{n'} - L_{n'-1}).
\end{aligned}$$

## ДОДАТОК Б

У додатку Б наведено вирази  $\Pi_j^{\mu\nu}$ , які входять в поляризаційний тензор (16):

$$\begin{aligned}
\Pi_1^{\mu\nu} &= J_{n,n'}^2 \left\{ \eta_{\parallel}^{\mu\nu} - \tilde{\omega}^2 (1 - \xi^2) U_{\parallel}^{\mu\nu} \right\}, \\
\Pi_2^{\mu\nu} &= -J_{n,n'-1}^2 \left\{ 1 + \tilde{\omega}^2 (1 - \xi^2) - \frac{i}{\lambda m^2} \right\} l^{\mu*} l^{\nu}, \\
\Pi_3^{\mu\nu} &= \frac{\sqrt{2n'h}}{2m} e^{-i\phi} J_{n,n'} J_{n,n'-1} (1 + \xi) k_{\parallel}^{\mu} l^{\nu}, \\
\Pi_4^{\mu\nu} &= \frac{\sqrt{2n'h}}{2m} e^{i\phi} J_{n,n'} J_{n,n'-1} (1 + \xi) l^{\mu*} k_{\parallel}^{\nu}, \\
\Pi_5^{\mu\nu} &= -J_{n-1,n'}^2 \left\{ 1 + \tilde{\omega}^2 (1 - \xi^2) - \frac{i}{\lambda m^2} \right\} l^{\mu} l^{\nu*}, \\
\Pi_6^{\mu\nu} &= J_{n-1,n'-1}^2 \left\{ \eta_{\parallel}^{\mu\nu} - \tilde{\omega}^2 (1 - \xi^2) U_{\parallel}^{\mu\nu} \right\}, \\
\Pi_7^{\mu\nu} &= \frac{\sqrt{2n'h}}{2m} e^{-i\phi} J_{n-1,n'} J_{n-1,n'-1} (1 + \xi) l^{\mu} k_{\parallel}^{\nu}, \\
\Pi_8^{\mu\nu} &= \frac{\sqrt{2n'h}}{2m} e^{i\phi} J_{n-1,n'} J_{n-1,n'-1} (1 + \xi) k_{\parallel}^{\mu} l^{\nu*},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_9^{\mu\nu} &= \frac{\sqrt{2n'h}}{2m} e^{-i\phi} J_{n,n'} J_{n-1,n'} (1 - \xi) l^{\mu} k_{\parallel}^{\nu}, \\
\Pi_{10}^{\mu\nu} &= \frac{\sqrt{2n'h}}{2m} e^{-i\phi} J_{n,n'-1} J_{n-1,n'-1} (1 - \xi) k_{\parallel}^{\mu} l^{\nu}, \\
\Pi_{11}^{\mu\nu} &= 2\sqrt{nn'h} e^{-2i\phi} J_{n,n'-1} J_{n-1,n'} l^{\mu} l^{\nu}, \\
\Pi_{12}^{\mu\nu} &= 4\sqrt{nn'h} J_{n,n'} J_{n-1,n'-1} \eta_{\parallel}^{\mu\nu}, \\
\Pi_{13}^{\mu\nu} &= \frac{n}{2m} \sqrt{\frac{2h}{n'}} e^{i\phi} J_{n,n'} J_{n-1,n'} (1 - \xi) k_{\parallel}^{\mu} l^{\nu*}, \\
\Pi_{14}^{\mu\nu} &= \frac{n}{2m} \sqrt{\frac{2h}{n'}} e^{i\phi} J_{n,n'-1} J_{n-1,n'-1} (1 - \xi) l^{\mu*} k_{\parallel}^{\nu}, \\
\Pi_{15}^{\mu\nu} &= 2\sqrt{nn'h} e^{2i\phi} J_{n,n'-1} J_{n-1,n'} l^{\mu*} l^{\nu*},
\end{aligned}$$

де  $k_x = |\mathbf{k}| \cos \phi$ .

У наведених вище виразах введено спецфункцію  $J_{n,n'}$ , яка була отримана в роботі [35] та в [27] розглянута велика кількість її властивостей. Для  $n > n'$ :

$$J_{n,n'} = e^{-\frac{\eta}{2}} \eta^{\frac{|n-n'|}{2}} \sqrt{\frac{n!}{n'!}} \frac{1}{(n-n')!} \times \\
\times F(-n', n - n' + 1, \eta),$$

та для  $n < n'$ :

$$J_{n,n'} = e^{-\frac{\eta}{2}} \eta^{\frac{|n-n'|}{2}} (-1)^{n-n'} \sqrt{\frac{n!}{n'!}} \frac{1}{(n'-n)!} \times \\
\times F(-n, n' - n + 1, \eta),$$

де  $\eta = (k_x^2 + k_y^2) / 2hm^2$ ,  $l^\mu = (0, 1, i, 0)$ ,  $k_{\parallel}^\mu = (\omega, 0, 0, 0)$   $F$  – вироджена гіпергеометрична функція.

1. E. Zavattini, G. Zavattini, G. Ruoso, G. Raiteri, E. Polacco, E. Milotti, V. Lozza, M. Karuza, U. Gastaldi, G. Di Domenico, F. Della Valle, R. Cimino, S. Carusotto, G. Cantatore, M. Bregant. New PVLAS results and limits on magnetically induced optical rotation and ellipticity in vacuum. *Phys. Rev. D* **77**, 032006 (2008).
2. F. Della Valle, E. Milotti, A. Ejlli, G. Piemontese, G. Zavattini, U. Gastaldi, R. Pengo, G. Ruoso. First results from the new PVLAS apparatus: A new limit on vacuum magnetic birefringence. *Phys. Rev. D* **90**, 092003 (2014).
3. F. Della Valle, A. Ejlli, U. Gastaldi, G. Messineo, E. Milotti, R. Pengo, G. Ruoso, G. Zavattini. The PVLAS experiment: Measuring vacuum magnetic birefringence and dichroism with a birefringent Fabry-Perot cavity. *Eur. Phys. J. C* **76**, 24 (2016).
4. A.Di. Piazza, C. Muller, K.Z. Hatsagortsyan, C.H. Keitel. Extremely high-intensity laser interactions with fundamental quantum systems *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1177 (2012).
5. J.P. Zou, C. Le Blanc, D.N. Papadopoulos, G. Cheriaux, P. Georges, G. Mennerat, F. Druon, L. Lecherbourg, A. Pellegrina, P. Ramirez *et al.* Design and current progress of the Apollon 10 PW project. *High Power Laser Sci. Eng.* **3**, e2 (2015).

6. H.P. Schlenvoigt, T. Heinzl, U. Schramm, T. Cowan, R. Sauerbrey. Prospects for studying vacuum polarisation using dipole and synchrotron radiation. *Phys. Scr.* **91**, 023010 (2016).
7. O. Tesileanu, D. Ursescu, R. Dabu, and N. V. Zamfir. Extreme light infrastructure. *J. Phys.: Conf. Ser.* **420** 012157 (2013).
8. R.P. Mignani, V. Testa, D. Gonzalez Caniulef, R. Taverna, R. Turolla, S. Zane, K. Wu. Evidence for vacuum birefringence from the first optical-polarimetry measurement of the isolated neutron star RX J1856.5–3754. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **465**, 492 (2017).
9. H. Euler, B. Kockel, The scattering of light by light in the Dirac theory. *Naturwissenschaften* **23**, 246 (1935).
10. W. Heisenberg, H. Euler. Folgerungen aus der Diracschen theorie des positrons. *Zeitschrift fur Physik* **98**, 714 (1936).
11. I.A. Batalin, A.E. Shabad. Green's function of a photon in a constant homogeneous electromagnetic field of general form. *JETP* **33**, 483 (1971).
12. J. Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).
13. S. Adler. Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field. *Ann. Phys.* **67**, 599 (1971).
14. W. Tsai. Vacuum polarization in homogeneous magnetic fields. *Phys. Rev. D* **10**, 2699 (1974).
15. В.М. Катков. Поляризаційний оператор фотона в магнітному полі. *ЖЭТФ* **150**, 229 (2016).
16. W. Tsai, T. Erber. Propagation of photons in homogeneous magnetic fields: Index of refraction. *Phys. Rev. D* **15**, 1132 (1975).
17. K. Kohri, S. Yamada. Polarization tensors in strong magnetic fields. *Phys. Rev. D* **65**, 043006 (2002).
18. A. Shabad. Photon dispersion in a strong magnetic field. *Ann. Phys.* **90**, 166 (1975).
19. M. Diachenko, O. Novak, R. Kholodov. A cascade of  $e^-e^+$  pair production by a photon with subsequent annihilation to a single photon in a strong magnetic field. *Laser Physics* **26**, 066001 (2016).
20. K. Hattori, K. Itakura. Vacuum birefringence in strong magnetic fields: (I) Photon polarization tensor with all the Landau levels. *Ann. Phys.* **330**, 23 (2013).
21. K. Hattori, K. Itakura. Vacuum birefringence in strong magnetic fields: (II) Complex refractive index from the lowest Landau level. *Ann. Phys.* **334**, 58 (2013).
22. G. Calucci, R. Ragazzon. Nonlogarithmic terms in the strong field dependence of the photon propagator. *J. Phys. A* **27**, 2161 (1994).
23. V.P. Gusynin, V.A. Miransky, I.A. Shovkovy. Dimensional reduction and catalysis of dynamical symmetry breaking by a magnetic field. *Nucl. Phys. B* **462**, 249 (1996).
24. A. Chodos, K. Everding, D.A. Owen. QED with a chemical potential: The case of a constant magnetic field. *Phys. Rev. D* **42**, 2881 (1990).
25. V.P. Gusynin, V.A. Miransky, I.A. Shovkovy. Dynamical chiral symmetry breaking by a magnetic field in QED. *Phys. Rev. D* **52**, 4747 (1995).
26. V.P. Gusynin, V.A. Miransky, I.A. Shovkovy. Dimensional reduction and dynamical chiral symmetry breaking by a magnetic field in  $3 + 1$  dimensions. *Phys. Lett. B* **349**, 477 (1995).
27. D.B. Melrose, A.J. Parle. Quantum electrodynamics in strong magnetic fields. I. Electron states. *Aust. J. Phys.* **36**, 755 (1983).
28. П.І. Фомін, Р.І. Холодов. До теорії резонансних квантово-електродинамічних процесів у зовнішньому магнітному полі *Укр. фіз. журн.* **44**, 1526 (1999).
29. М.М. Дяченко, О.П. Новак, Р.І. Холодов. Resonant threshold two-photon  $e^-e^+$  pair production onto the lowest Landau levels in a strong magnetic field. *Ukr. J. Phys.* **59**, 849 (2014).
30. М.М. Diachenko, O.P. Novak, R.I. Kholodov. Pair production in a magnetic and radiation field in a pulsar magnetosphere. *Mod. Phys. Lett. A* **30**, 1550111 (2015).
31. М.М. Diachenko, O.P. Novak, R.I. Kholodov. Resonant generation of an electron-positron pair by two photons to excited Landau levels. *JETP* **121**, 813 (2015).
32. N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov. *Introduction to the Theory of Quantized Field* (Interscience Publishers, 1959).
33. K. Fukushima. Magnetic-field induced screening effect and collective excitations. *Phys. Rev. D* **83**, 111501 (2011).
34. A.E. Shabad. Interaction of electromagnetic radiation with supercritical magnetic field. *Workshop SMFNS/ICIMAF, Havana*, 0307214 (2004).
35. А.А. Соколов, И.М. Тернов, В.Г. Багров, Р.А. Рзаев. *Синхротронное излучение* (Наука, 1966).

Одержано 28.01.19

*M. Diachenko, O. Novak, R. Kholodov*

VACUUM BIREFRINGENCE  
IN SUPERCRITICAL MAGNETIC FIELDS

S u m m a r y

The birefringence effect in vacuum in strong magnetic fields has been considered. The polarization tensor in a constant external magnetic field is analyzed in the framework of quantum field theory and on the basis of the electron Green's function calculated as the sum over the Landau levels. The case of the lowest Landau levels for photons with the energies below the electron-positron pair creation threshold is considered, and the corresponding refractive indices of the physical vacuum for anomalous and normal waves are determined.