Г.Г. РОДЕ
Інститут фізики НАН України
*(Просп. Науки, 46, Київ 03680; e-mail: ifanrode@gmail.com)*

УДК 53.088.3

# ПЕРЕНОС ПОХИБОК ТА СЕРЕДНІХ ВИМІРІВ ФІЗИЧНОЇ ВЕЛИЧИНИ ДЛЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ $a^x$ ТА $\log_a x$

*Отримані "правила переносу похибки та середнього" однієї вимірюваної фізичної величини на іншу, пов'язану з нею зв'язком $a^x$ або $\log_a x$. В ці правила по природі закладена вагова схема Гауса. Тому вони мають добре працювати в рамках реальної вагової схеми Гауса з дискретними даними реального фізичного дослідження (з "вибірками"). Аналітична форма, в якій представлені згадані правила ("аналітичні правила переносу"), а також їх характер дозволяють спростити і прискорити процедуру обробки й аналізу експериментальних даних.*

*Ключові слова*: перенос похибок, перенос відхилень, перенос помилок.

## 1. Вступ

Дана робота присвячена актуальній темі оцінки похибок фізичних величин при непрямих вимірюваннях і вирішує частину загальної проблеми переносу похибок. Більш детально проблема переносу похибок описана в [1, 2]. Також вона піднята в [3]. Є два підходи для вирішення цієї проблеми. Всі сучасні теоретичні й практичні застосування, методики й розробки перенос помилок будують виключно на основі розкладу в ряд Тейлора ("диференціювання") [4–13]. Проблематика "аналітичного" переносу помилок найкраще окреслена в [1]. В даній роботі робляться певні зусилля в цьому напрямку, а саме розглянуті дві поширені елементарні функції $a^x$ та $\log_a x$ ($e^x$ та $\ln(x)$ і вона є логічним продовженням робіт [2, 3].

## 2. Нові правила обчислення середніх та переносу похибок для елементарних функцій $a^x$ та $\log_a x$

Для отримання аналітичних правил для двох вибраних функцій ($a^x$ та $\log_a x$) середнє $x_{\text{сер}}$ та "похибка" $k\sqrt{(\Delta x)^2_{\text{сер}}}$ були прив'язані (формалізовані) до базових понять математичної статистики:

$$x_{\text{сер}} \approx E_x; \quad k^2(\Delta x)^2_{\text{сер}} \approx D_x,$$

де $E_x$ і $D_x$ є, відповідно, математичне очікування й дисперсія вимірюваної величини $x$. При такій формалізації вважається, що при вимірюванні фізичної величини $x$ окремі значення $x_i$ з'являються у відповідності з деякою функцію $f(x)$ розподілу ймовірності появи $x_i$. Ця функція природно має бути пов'язана з умовами вимірів (неявно залежить від приладу, вибраної методики, тощо). Зазвичай $f(x)$ нормують і тоді вона зветься функцією "щільності" або "густини" ймовірності появи фізичної величини $x$ з безперервним розподілом [1]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{1}$$

В цьому випадку справжнє значення фізичної величини $x$ або, як кажуть, її математичне очікування можна обчислити за відомою функцією $f(x)$:

$$\mu = E_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \tag{2}$$

Рівняння (2) є також визначенням математичного очікування $E(x)$ [1]. Одночасно $f(x)$ визначає також дисперсію фізичної величини $x$ [1] (розкид її значень при вимірах, зумовлених $f(x)$ ):

$$D_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - E_x)^2 f(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx; \quad (3)$$
$$\mu = E_x.$$

Найважливішим серед розподілів $f(x)$ вважається т.з. нормальний (Гаусів) розподіл ймовірності [1]:

$$f(x) = \frac{p}{\sqrt{\pi}} \exp[-p^2 (x - \mu)^2], \quad p^2 = \frac{1}{2D_x}, \quad \mu = E_x. \quad (4)$$

У випадку зв'язку через функцію $y = h(x)$ математичне очікування й дисперсія для функції $h(x)$ будуть [1] (у різних записах):

$$\chi = E_h = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx, \quad (5)$$

$$D_h = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [h(x) - E_h]^2 f(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [h(x) - \chi]^2 f(x) dx. \quad (6)$$

Вираз (6) можна переписати у більш зручному для нас вигляді (згідно з [1]):

$$D_h = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [h^2(x) - 2\, h(x)\, E_h + E_h^2] f(x) dx =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} h^2(x)\, f(x) dx - E_h^2. \quad (7)$$

В рівняннях (4)–(7) $\mu = E_x$ та $D_x$ входять до $f(x)$ як параметри, тому, строго кажучи, $f(x)$ можливо записати, як $f(x,\, E_x,\, D_x)$:

$$E_h = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x, E_x, D_x) dx, \quad (8)$$

$$D_h + E_h^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h^2(x)\, f(x, E_x, D_x) dx. \quad (9)$$

Легко помітити, що (8) та (9) є інтегральні рівняння, вирішивши які ми отримали б бажаний аналітичний зв'язок між $E_h$, $D_h$ (аналогами середніх для функції $h(x)$) з одного боку та $E_x$, $D_x$ (аналогами виміряних середніх) з іншого. Виявилося, що можливо підібрати табличні інтеграли [4], подібні до (8) та (9) і таким чином вирішити задачу елементарної функції $a^x$, а з її допомогою і $\log_a x$ (див. Додаток).

Тут слід зробити одне зауваження. Змінна $x$ має розподіл Гауса. Значення нелінійної функції $h(x)$ будуть точно розподілені не за законом Гауса, тому вирази (8), (9) можна вважати наближеними до виразів, де інтегрування проводиться за "правильним" розподілом:

$$E_h = \int\limits_a^b h\, Z(h, E_h, D_h) dh \quad D_h =$$
$$= \int\limits_a^b h^2 Z(h, E_h, D_h) dh - E_h^2,$$

де $Z(h, E_h, D_h)$ – "чистий" розподіл не-Гауса для $h$; межі інтегралів $a, b$ залежні від функції $h = h(x)$. Для $h = \cos(x)$ – це буде $a = -1$, $b = 1$.

Однак переважна більшість експериментальних робіт ґрунтується саме на "класичній" змішаній схемі підсумовування (8), (9) , викладеній в [1]. Це в повній мірі стосується і випадків наближеного вирішення (8), (9), шляхом розкладу $h(x)$ в ряд Тейлора [1]. Отримані нами вирази також побудовані в рамках цієї ідеології (див. Додаток). Більше того, всі наведені приклади теж обчислені за цією схемою (див. "3. Застосування нових правил до експериментальних даних"). Тобто і $x_i$ і $h(x_i)$ були просумовані з ймовірностями Гауса.

Обчислення середніх $E_x$, $D_x$ вхідної множини $\{x_i\}$:

$$E_x = \sum x_i\, f_i; \;\; D_h = \sum (x_i - E_x)^2\, f_i); \;\; \Delta_x = \sqrt{D_x}.$$

Обчислення середніх $E_h$, $D_h$ вихідної множини $\{h_i = h(x_i)\}$:

$$E_h = \sum h(x_i)\, f_i; \quad D_h = \sum (h(x_i) - E_h)^2\, f_i);$$
$$\Delta_x = \sqrt{D_x},$$

де $f_i$ – Гаусові множники: $f_i = \frac{w_i}{\sum w_i}$; $w_i = \frac{p}{\sqrt{\pi}} \times$ $\times \exp[-p^2 (x_i - \mu)^2]$, $p^2 = \frac{1}{2D_x}$.

Згадані співвідношення для функції $a^x$ мають вигляд:

$$E_h = E_{a^X} = a^{E_X}\, a^{D_X\ \ln a/2};\\ D_h = D_{a^X} = a^{2E_X}\, a^{D_X\ \ln a}(a^{D_X\ \ln a} - 1), \tag{10}$$

де $E_X$ і $D_X$ – відповідають середньому та похибці виміряних даних, а $E(a^X)$, $D(a^X)$ – середньому та похибці переносу результатів вимірів через функцію $a^x$.

Для функції $\log_a x$ співвідношення мають вигляд як:

$$E_h = E_{\log} = \frac{1}{2}\,\log_a\left(\frac{E_X^4}{D_X + E_X^2}\right);\\ D_h = D_{\log} = \frac{1}{\ln a}\log_a\left(\frac{D_X + E_X^2}{E_X^2}\right); \tag{11}$$

$E_X$ і $D_X$ – відповідають середньому та похибці виміряних даних, а $E_{\log}$, $D_{\log}$ – середньому та похибці переносу результатів вимірів через функцію $\log_a(x)$.

Для "чистої" експоненціальної функції ($h = e^x = \exp x;$) та "чистої" логарифмічної функції ($h = \ln x;$) отримані вирази набувають простішого вигляду:

$$E_h = E_{\exp} = \exp E_X\ \exp\left(\frac{1}{2}\,D_X\right);\\ D_h = D_{\exp} = \exp 2E_X\ \exp D_X\,(\exp D_X - 1); \tag{12}$$

$$E_h = E_{\ln} = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{E_x^4}{D_x + E_x^2}\right);\\ D_h = D_{\ln} = \ln\left(\frac{D_x + E_x^2}{E_x^2}\right); \tag{13}$$

де $E_x$ і $D_x$ – відповідають середньому та похибці виміряних даних, а $E_{\exp}$, $D_{\exp}$ та $D_{\ln}$,$D_{\ln}$ середньому та похибці переносу результатів вимірів відповідно через функції $\exp(x)$ та $\ln(x)$.

Таким чином, ми отримали (див. додаток) бажані правила "переносу похибки" та обчислення "зміщеного середнього" типу $E_h = E_h(E_x, D_x)$ та $D_h = D_h(E_x, D_x)$ для функцій $h(x) = a^x$ та $h(x) = \log_a(x)$ (відповідно $\exp(x)$ та $\ln(x)$).

Зауважимо, що в граничному випадку, при $D_x = 0$:

$$E_h = E_{a^x} = a^{E_x}; \qquad D_h = D_{a^x} = 0;$$
$$E_h = E_{\log} = \log_a E_x; \qquad D_h = D_{\log} = 0;$$
$$E_h = E_{\exp} = \exp E_x; \qquad D_h = D_{a^x} = 0;$$
$$E_h = E_{\ln} = \ln E_x; \qquad D_h = D_{\ln} = 0;$$

тому при цьому можна користуватись "звичайними" правилами переносу:

$$E_{a^x} = a^{E_x};\ \ E_{\exp} = \exp E_x;\ \ E_{\log} = \log_a E_x;\\ E_{\ln} = \ln E_x.$$

## 3. Застосування нових правил до експериментальних даних

Набір експериментальних даних являє собою сукупність окремих випадкових значень $x_i$ виміряної фізичної величини $x$, т. з. "вибірку" $\{x_i\}$. Величина $x$ може мати безперервний розподіл [1] (іншими словами, працюють з величинами, що випадково "вибрані приладом" з безперервної множини).

Розглянемо, як будуть виконуватись отримані співвідношення саме у випадку вибірок. Для цього обчислимо середні звичайним способом (який ми беремо за взірець) по 4-х вибірках: за 2-ма наборами експериментальних даних $\{x_i\}$ та за 2-ма наборами обчислених функцій $\exp(x)$ і $\ln(x)$. І порівняймо їх з результатами, отриманими за співвідношеннями (12), (13).

### *3.1. Два приклади для* $\exp(x)$

Як приклад для $e^x$ візьмемо довільну вибірку $\{x_i\}$ з 20 "вимірів" в "логарифмічній" шкалі:
$\{x_i\}$ = 8, 8,047, 8,094, 8,141, 8,188, 8,235, 8,282, 8,329, 8,376, 8,423, 8, 7,953, 7,906, 7,859, 7,812, 7,765, 7,718, 7,671, 7,624, 7,577.

Арифметичні середні (обчислені по цій виборці з сталою ймовірністю $w_i = 1/20$) дадуть нам такі значення:

$$E_n = 8; \quad D_n = 0{,}06296; \quad \Delta_n = 0{,}25092.$$

Використавши ці значення, як перше наближення, обчислюємо вже Гаусові середні (2–3 ітерації) згідно з ваговою схемою Гауса:

$$E_x = \left(\sum x_i w_i\right) / \left(\sum w_i\right);\\ D_x = \left(\sum (x_i - E_x)^2 w_i\right) / \left(\sum w_i\right); \quad \Delta_x = \sqrt{D_x}, \tag{14}$$

де

$$w_i = \frac{p}{\sqrt{\pi}}\exp[-p^2(x_i - \mu)^2], \qquad p^2 = \frac{1}{2D_x}. \tag{15}$$

Отримуємо $E_x = 8$; $D_x = 0{,}01726$; $\Delta_x = 0{,}13138$. Іншими словами, по цій виборці маємо $E_x = 8 \pm 0{,}1$.

Для того, щоб правильно обчислити середні для функції $e^x$ необхідно побудувати нову статистичну

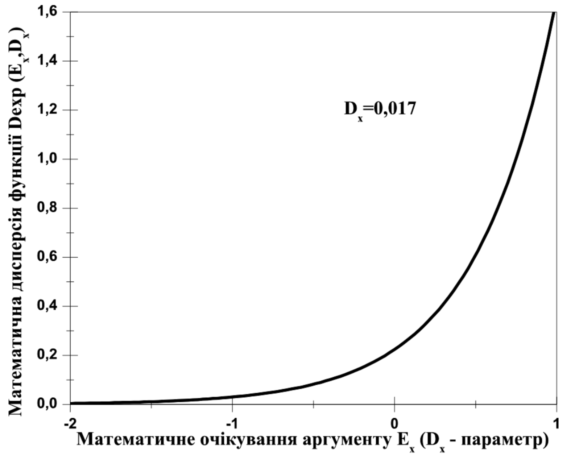


***Рис. 1.*** Залежність дисперсії функції $D_{\exp(E_x,D_x)}$ від $E_x$

вибірку $\exp(x_i)$ і вже по ній обчислити потрібні середні. Нова вибірка буде:
$\{\exp x_i\}$ = 2980,95799, 3124,40767, 3274,76045, 3432,3485, 3597,52001, 3770,6399, 3952,09066, 4142,27321, 4341,60772, 4550,5346, 2980,95799, 2844,09445, 2713,51467, 2588,93015, 2470,06563, 2356,65849, 2248,45816, 2145,2256, 2046,73271, 1952,76188.

Використавши значення $E_x$, $D_x$ та $\Delta_x$ і "покрутившись" згідно з (14) та (15) отримаємо бажані середні для функції $e^x$ звичайним способом:

$$E_{\exp} = 3006{,}8068; \quad D_{\exp} = 157799{,}52;$$

$$\Delta_{\exp} = 397{,}23987.$$

"Перенос помилок" за отриманими співвідношеннями (12) дає такі значення:

$$E_{\exp} = 3006{,}7946; \quad D_{\exp} = 157398{,}77;$$

$$\Delta_{\exp} = 396{,}735.$$

Маємо цікавий приклад з великими дисперсіями для функції $e^x$

Тут і далі ми навмисне залишили на розгляд більше знаків, ніж потрібно ($D_x$ – 2 знаки; $\Delta_x$ – взагалі 1), щоб мати змогу повніше слідкувати за всіма обчисленнями.

Другий приклад побудований для іншої області значень аргументу функції $e^x$ (рис. 1).
$\{x_i\}$ = 0, 0,047, 0,094, 0,141, 0,188, 0,235, 0,282, 0,329, 0,376, 0,423, 0, –0,047, –0,094, –0,141, –0,188, –0,235, –0,282, –0,329, –0,376, –0,423.

Арифметичні середні для аргументу (обчислені по цій виборці з сталою ймовірністю $w_i = 1/20$) дадуть нам такі значення:

$$E_n = 0; \quad D_n = 0{,}06296; \quad \Delta_n = 0{,}25091.$$

Використавши ці значення, як перше наближення, обчислюємо вже Гаусові середні згідно з ваговою схемою Гауса (14), (15) (тут 4 ітерації). Це дасть нам:

$$E_x = 0; \quad D_x = 0{,}02194; \quad \Delta_x = 0{,}14812.$$

Таким чином, по цій виборці маємо $E_x = 0 \pm 0{,}1$.

Для того, щоб правильно обчислити середні для функції $e^x$ необхідно побудувати нову статистичну вибірку $\exp(x_i)$ і вже по ній обчислити потрібні середні. Нова вибірка буде:
$\{\exp x_i\}$ = 1, 1,04812, 1,09856, 1,15142, 1,20683, 1,26491, 1,32578, 1,38958, 1,45645, 1,52653, 1, 0,95409, 0,91028, 0,86849, 0,82861, 0,79057, 0,75427, 0,71964, 0,6866, 0,65508.

Використавши значення $E_x$, $D_x$ та $\Delta_x$, згідно з (14) та (15) отримаємо бажані середні для функції $e^x$ звичайним способом:

$$E_x = 1{,}01103; \quad D_x = 0{,}02269; \quad \Delta_x = 0{,}15067.$$

"Перенос помилок" за отриманими співвідношеннями (12) дасть нам такі значення:

$$E_{\exp} = 1{,}01103; \; D_{\exp} = 0{,}02267; \; \Delta_{\exp} = 0{,}15058.$$

Враховуючи обидва приклади, можна стверджувати, що оцінки похибок (дисперсії та відхилення) за співвідношеннями (12) співпадають зі взірцем, тобто, у випадку функції $e^x$ "перенос помилок" за співвідношеннями (12) функції $e^x$ – правильний і добре працює для вибірок.

### *3.2. Приклад для* $\ln(x)$

Розглянемо ще один приклад, для функції $\ln x$ (рис. 2–4). Використаємо вибірку вимірів експонентного вигляду (скажімо інтенсивність, вимірювану при визначенні квантового виходу та енергії активації):
$\{y_i\}$ = 2000, 2100, 2200, 2300, 2400, 2500, 2600, 2700, 2800, 2900, 2000, 1900, 1800, 1700, 1600, 1500, 1400, 1300, 1200, 1100.

Тут маємо приклад з дуже великими дисперсіями аргументу.

Згідно з використаною вище стандартною схемою обчислень середніх для вибірки:

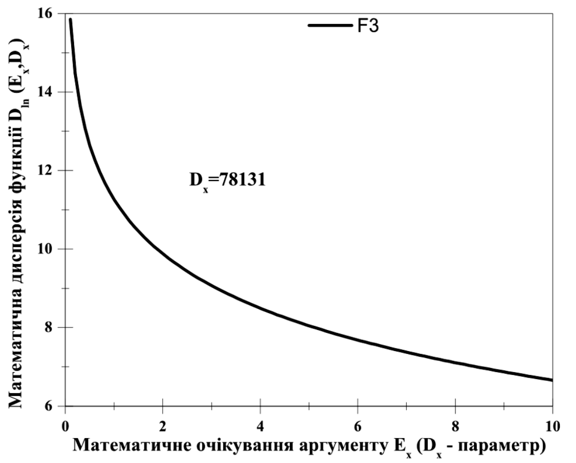


***Рис. 2.*** Залежність дисперсії функції $D_{\ln}(E_x, D_x)$ від $E_x$

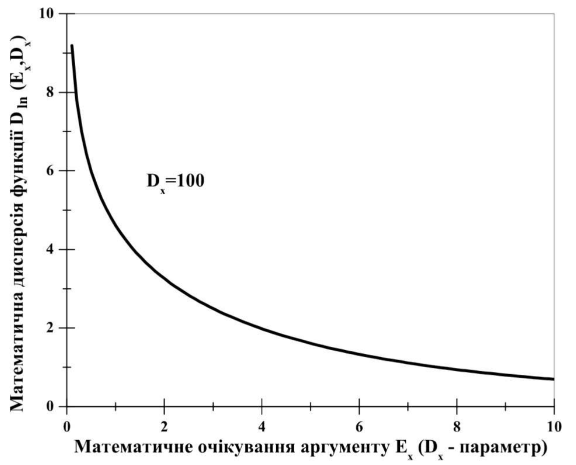


***Рис. 3.*** Залежність дисперсії функції $D_{\ln}(E_x, D_x)$ від $E_x$

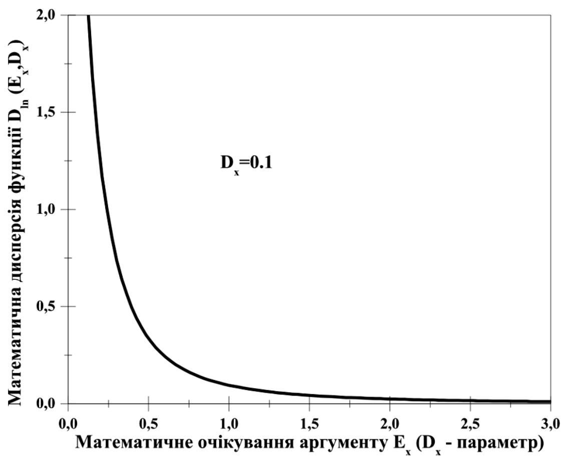


***Рис. 4.*** Залежність дисперсії функції $D_{\ln}(E_x, D_x)$ від $E_x$

а) обчислюємо спочатку арифметичні середні (ймовірність $w_i = 1/20$) – $E_n = 2000$; $D_n = 285000$; $\Delta_n = 533{,}8539$; б) далі обчислюємо Гаусові середні (з ваговою схемою (14), (15) – $E_y = 2000$; $D_y = 78130{,}595$; $\Delta_y = 279{,}5185$; в) утворюємо масив-вибірку (згідно з функцією $\ln y$): $\{\ln y_i\} = 7{,}6009$, 7,64969, 7,69621, 7,74066, 7,78322, 7,82405, 7,86327, 7,90101, 7,9373, 7,97247, 7,6009, 7,54961, 7,49554, 7,43838, 7,37776, 7,31322, 7,24423, 7,17012, 7,09008, 7,00307. Робимо статистичну обробку цієї вибірки, використавши значення $E_y$, $D_y$ та $\Delta_y$: $E_{\ln} = 7{,}59081$; $D_{\ln} = 0{,}02068$; $\Delta_{\ln} = 0{,}1438$. Розрахунки за співвідношеннями (13) одразу дають нам такі значення: $E_{\ln} = 7{,}59123$; $D_{\ln} = 0{,}019344$; $\Delta_{\ln} = 0{,}13908$.

Як ми бачимо в цьому випадку співпадіння – добре. Тобто і випадку функції $\ln x$ "перенос помилок" за співвідношеннями (13) – правильний і добре працює для вибірок.

## 4. Деякі загальні риси отриманих співвідношень

Аналітичний вигляд отриманих правил переносу дозволяє легко виділити особливості відповідних співвідношень і навіть побудувати графічні залежності, що дуже корисно для планування фізичного експерименту та його аналізу.

Слід наголосити, що величини $E_h$, $D_h$, $E_x$, $D_x$ взаємно пов'язані, а також і те, що $E_h$ й $D_h$ є функції 2-х змінних, а не однієї: $E_h = E_h \times (E_x, D_x)$; $D_h = D_h(E_x, D_x)$.

До цього буває важко звикнути, як наприклад, до факту, що похибки функцій $h(x)$ $\Delta_{\exp}$ або $\Delta_{\ln}$ залежать від наміряного середнього значення $x$. Все це добре видно на рис. 1–4, де подані залежності дисперсій функцій

$$D_h = D_{\exp}(E_x,\, D_x);\ D_h = D_{\ln}(E_x,\, D_x)$$

від значень вимірюваних "середніх" відповідних аргументів $E_x$ ($D_x$ – параметр).

Крім того, сама можливість мати графічний вигляд отриманих співвідношень дає змогу обговорювати характер майбутніх вимірів, планувати їх.

## 5. Висновки

1. Співвідношення (11), (13), на кшталт [6], будемо вважати напівемпіричними, через побудову на

основі обернених функцій. Однак всі обернені функції, побудовані у такий спосіб [2, 3], а також співвідношення (10)–(13) даної роботи дають правильний результат для вибірок і можуть бути широко застосовані для скорочення і суттєвого спрощення обчислювальних процедур обчислень для функцій $a^x$ та $\log_a x$; 2). Оскільки $D_h$ та похибки $\sigma$ для обох розглянутих функцій практично співпадають з дійсними значеннями, можливий перенос похибок для ланцюжку функцій типу $\log a(b^{\log(\ldots)})$ чи $a^{(\log(b(\ldots)))}$ або ж другою сумішшю вказаних функцій та функцій $x^2$, $\sqrt{x}$, $\cos(x)$, $\arccos(x)$, розглянутих в [2, 3].

2. Тому на основі отриманих аналітичних співвідношень можливо побудувати 2 простих універсальних програмних алгоритми (загального призначення) для обчислення пар окремих значень $E(a^x)$; $D(a^x)$) та ($E_{\log}$; $D_{\log}$), для $x$ з розподілом Гауса. Вони можуть бути вбудовані, як окремі модулі (підпрограми), в будь - які програмні процедури. При цьому цей алгоритм буде прозорим (легким для читання).

Це принципово неможливо при інших методах переносу, оскільки в них потрібно розкладати в ряд або диференціювати всю суперпозицію функцій, як єдине ціле. І для кожної задачі треба будувати окрему процедуру.

3. Можливо передбачити величину похибки функції і побудувати її графічну залежність від планованої області вимірів фізичної величини.

4. Цікавою є можливість отримати значення зміщення середнього для $E(a^x)$ та $E_{\log}$. В наведених прикладах це зміщення ніяк не впливає на значення цих середніх і не відіграє ніякої ролі, але воно існує і в деяких застосуваннях його значення може використовуватись.

5. Оскільки аналітичні значення середніх ($E(a^x)$; $D(a^x)$) та ($E_{\log}$; $D_{\log}$) пов'язані з розподілом Гауса, то обчислене значення дозволяє порівнювати їх зі значеннями таких самих величин, обчислених за іншими розподілами. По мінімуму $D(a^x)$ (або $D_{\log}$) вирішувати, який розподіл краще підходить.

## ДОДАТОК

В цьому додатку наведений математичний доказ правильності отриманих співвідношень для 2-х функцій $a^x$ та $\log_a x$, тобто шлях зведення інтегральних рівнянь (8) і (9) до табличних інтегралів і приведення отриманих співвідношень до зручного вигляду (10)–(13).

### Математичне очікування $E_h$ для функції $h(x) = a^x$

Якщо в рівнянні (8) зробити заміни:

$$k = \ln a; \quad h(x) = a^x = \exp(\ln a\, x) = \exp(k\, x); \qquad y = x - \mu; \quad x = y + \mu, \tag{16}$$

то, з урахуванням розподілу Гауса для $h(x)$, з (4) послідовно отримаємо:

$$\chi = E_h = E_{a^x} = \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a^x \exp[-p^2(x-\mu)^2]dx =$$

$$= \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[k\,(y+\mu)] \exp[-p^2y^2]dy =$$

$$= \frac{p}{\sqrt{\pi}} \exp[k\mu] \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[-p^2y^2+ky]dy = \frac{p}{\sqrt{\pi}} \exp[k\mu]\, J =$$

$$= \frac{p}{\sqrt{\pi}} \exp[\ln a\mu]\, J = \frac{p}{\sqrt{\pi}} a^\mu\, J. \tag{17}$$

Інтегральний вираз $J$ – подібний до табличного інтеграла $T_2$ (3.923.2) [4]:

$$T_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[-a_1y^2 - 2by - c] \cos[p^2y^2 + qy + r]dy,$$

який при $c = p = q = r = 0$ має таке рішення:

$$T_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[-a_1y^2 - 2by]dy = \sqrt{\frac{\pi}{a_1}} \exp\frac{b^2}{a_1}. \tag{18}$$

Інтегральний вираз $J$ стає повністю тотожним $T_2$, у вигляді (18), якщо в (18) зробити такі заміни:

$$a_1 = p^2; \quad -2b = k; \quad b = -\frac{k}{2}.$$

Врахувавши $k = \ln a$ з (16) і $1/p^2 = 2D_x$ з (4), одразу отримаємо:

$$J = \sqrt{\frac{\pi}{p^2}} \exp\frac{k^2}{4p^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp[(\ln a)^2\, 2D/4] =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{p}\, a^{D\, \ln a/2}.$$

Підставивши $J$ в вираз (17), маємо остаточний зв'язок інтеграла $E_h = E_{a^x}$ з інтегралами $E_x$ та $D_x$, який з урахуванням ($\mu = E_x$ з (2) та $p^2 = = 1/(2D_X)$ з (4)), виглядає як:

$$E_h = E_ax = \frac{p}{\sqrt{\pi}} a^\mu \frac{\sqrt{\pi}}{p}\, a^{D_X\, \ln a/2} = a^\mu\, a^{D_X\, \ln a/2} =$$

$$= a^{E_X}\, a^{D_X\, \ln a/2}. \tag{19}$$

Якщо $a = e$:

$$E_h = E_{\exp} = e^{E_X}\, e^{D_X/2} = \exp E_x\, \exp(D_X/2). \tag{20}$$

Це "інтуїтивно" очікуваний результат. При невеликих $D_x \approx$ $\approx 0$ існує невеличке зміщення, що зумовлене множником $\exp(D_X/2) \approx 1$, і (19), (20) набувають "природного" вигляду:

$$E_h = E_{a^x} \approx a^{E_x};\ E_h = E_{\exp} \approx \exp E_x.$$

Множник при певних умовах можна ігнорувати, але (19), (20) – це точні робочі формули для $h(x) = a^x$ та $h(x) = \exp x$.

### Дисперсія $D_h$ для функції $h(x) = a^x$

З рівняння (9), використавши (4), маємо "перенос похибки":

$$D_h = D_{a^x} = \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a^{2x} \exp[-p^2(x-\mu)^2]dx - E_h^2 =$$

$$= \frac{p}{\sqrt{\pi}} J_0 - E_h^2. \qquad (21)$$

Перетворюємо $J_0$ до табличного вигляду, використавши заміни $y = x - \mu$; $x = y + \mu$ та $k = \ln a$ (8):

$$J_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a^{2x} \exp[-p^2(x-\mu)^2]dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} a^{2y+2\mu} \exp[-p^2y^2]dy =$$

$$= a^{2\mu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} a^{2y} \exp[-p^2y^2]dy =$$

$$= a^{2\mu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[\ln a\, 2y] \exp[-p^2y^2]dy =$$

$$= a^{2\mu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[-p^2y^2 + 2ky] = a^{2\mu} J_{01}. \qquad (22)$$

Очевидно, що $J_{01}$ – цілком табличний інтеграл $T_2$ (3.923.2) [4], у формі (18), тобто при $c = p = q = r = 0$ і при $b = -k = -\ln a$; $a_1 = p^2$ та $1/p^2 = 2D_x$:

$$T_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[-a_1y^2 - 2by]dy =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a_1}} \exp\frac{b^2}{a_1} = J_{01} = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp\frac{k^2}{p^2},$$

$$J_{01} = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp\frac{(\ln a)^2}{p^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{p} a^{\ln a/(p\,p)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{p} a^{2D \ln a}.$$

Використовуючи $J_{01}$ та $E_h^2 = a^{2\,E_X} a^{D_X \ln a}$ з (19), отримуємо $D_h$ для функції $h(x) = a^x$ з (21) та (22):

$$D_h = D_{a^X} = \frac{p}{\sqrt{\pi}} J_0 - E_h^2 = \frac{p}{\sqrt{\pi}} a^{2\mu} J_{01} - E_h^2 =$$

$$= \frac{p}{\sqrt{\pi}} a^{2E_X} \frac{\sqrt{\pi}}{p} a^{2\,D_X \ln a} - a^{2E_X} a^{D_X \ln a} =$$

$$= a^{2E_X} a^{2\,D_X \ln a} - a^{2E_X} a^{D_X \ln a} =$$

$$= a^{2E_X} a^{D_X \ln a}(a^{D_X \ln a} - 1).$$

Остаточно:

$$D_h = D_{a^x} = a^{2E_X} a^{D_X \ln a}(a^{D_X \ln a} - 1). \qquad (23)$$

Для $a = e$ (23) має спрощений вигляд:

$$D_h = D_{\exp} = e^{2E_X} e^{D_X}(e^{D_X} - 1) =$$

$$= \exp 2E_x \exp D_x (\exp D_x - 1). \qquad (24)$$

Тобто це і буде правило "переносу похибок" для функції $h(x) = a^x$.

### Середнє $E_h$ та дисперсія $D_h$ для функції $h(x) = \log_a x$

Безпосередній шлях обчислення $E(\log_a x)$ та $D(\log_a x)$ через табличні інтеграли – справа досить проблематична. Бажані співвідношення можна отримати, розглядаючи функцію $\log_a x$, як обернену до $a^x$, використавши співвідношення (19) та (23).

Дійсно, рівняння (19) та (23) дають нам явний зв'язок між 4 інтегралами $E_{a^x}$, $D_{a^x}$, $E_x$, $D_x$. Грубо кажучи, між 4-ма числами $E_{a^x}$, $D_{a^x}$, $E_x$, $D_x$:

$$E_{a^x} = E_{a^x}(E_x, D_x) \quad \text{і} \quad D_{a^x} = D_{a^x}(E_x, D_x). \qquad (25)$$

Якщо з рівнянь (19) та (23) визначити функції

$$E_x = E_x(E_{a^x}, D_{a^x}) \quad \text{і} \quad D_x = D_x(E_{a^x}, D_{a^x}), \qquad (26)$$

обернені до функцій (25), то вони також мусять правильно описувати математичні зв'язки між $E_{a^x}$, $D_{a^x}$, $E_x$, $D_x$. Причому, якщо $E_{a^x}$ та $D_{a^x}$ будуть отримані в якийсь інший спосіб (наприклад, виміряні) і будуть мати ті ж числові значення, що й обчислені за (25), то вони знов-таки задовільнять рівняння зв'язку 4-х інтегралів (8) та (9) тоді і тільки тоді, коли пара $E_x$ та $D_x$ матиме ті самі значення, що й задані в (25).

Іншими словами, якщо $y = a^x$ і, відповідно, обернена до неї функція $x = \log y$, то співвідношення (26), обернені рівнянням (19) та (23), дадуть нам вірні значення інтегральних виразів для математичного очікування $E_x$ і дисперсії $D_x$, визначених згідно з (8) та (9), для функції випадкової величини $y$, яка зв'язана зі змінною $x$ законом $y = a^x$ або $x = \log y$.

Тобто, вирішивши (19) і (23) відносно $x$, ми простим обчисленням можемо отримувати значення $E_x$ і $D_x$ по значенням $E_y$, $D_y$, які є середніми для вимірів випадкової величини $y$, яка пов'язана з $x$ співвідношенням $x = \log y$.

Вирішимо (19) і (23). Для цього перепишемо їх, відповідно, у вигляді:

$$E_y = a^{E_X} a^{\ln a\, D_X/2} \quad \text{або} \quad a^{\ln a\, D_X/2} = \frac{E_y}{a^{E_X}} \quad \text{або} \quad a^{D_X \ln a} = \frac{E_y^2}{a^{2\cdot E_X}}; \qquad (27)$$

$$D_y = D_{a^X} = a^{2E_X} a^{D_X \ln a}(a^{D_X \ln a} - 1). \qquad (28)$$

Пам'ятаючи, що інтеграли $E_y$ і $D_y$ пов'язані з функцією $y = a^x$, а інтеграли $E_x$ та $D_x$ з функцією $x = \log y$, вирішимо ці рівняння відносно інтегралів $E_x$ та $D_x$, тобто отримаємо рівняння, зворотні (19) і (23) та (27) і (28).

В (28) "напрошується" природна заміна через (27):

$$D_y = a^{2\,E_X} \frac{E_y^2}{a^{2\,E_X}} \left(\frac{E_y^2}{a^{2\,E_X}} - 1\right) = E_y^2 \left(\frac{E_y^2}{a^{2\,E_X}} - 1\right);$$

звідси маємо:

$$\frac{D_y}{E_y^2} + 1 = \frac{D_y + E_y^2}{E_y^2} = \frac{E_y^2}{a^{2\,E_X}};$$

і виділяємо $E_x$:

$$a^{2\,E_X} = \frac{E_y^4}{D_y + E_y^2}; \qquad (29)$$

звідки остаточно: $2\,E_X = \log_a\left(\frac{E_y^4}{D_y+E_y^2}\right)$, або

$$E_X = \frac{1}{2}\log_a\left(\frac{E_y^4}{D_y+E_y^2}\right). \quad (30)$$

Підставивши вираз (29) в третю рівність (27), отримаємо $D_x$:

$$a^{D_X\ \ln a} = \frac{E_y^2}{a^{2\,E_X}} = \frac{E_y^2\ (D_y+E_y^2)}{E_y^4} = \frac{D_y+E_y^2}{E_y^2};$$

і

$$D_X\ \ln a = \log_a\left(\frac{D_y+E_y^2}{E_y^2}\right).$$

Остаточно маємо вираз для $D_X$:

$$D_X = \frac{1}{\ln a}\ \log_a\left(\frac{D_y+E_y^2}{E_y^2}\right). \quad (31)$$

Наостанок перепишемо отримані співвідношення (19), (24) та (30),(31) у більш зрозумілому символічному вигляді, де $x$ – позначена вимірювана фізична величина (аргумент), а $h$ – відповідна функція ($a^x$; $\log_a x$; $e^x = \exp(x)$; $\ln(x)$):

$$\begin{aligned}
&E_h = E_{a^X} = a^{E_X}\ a^{D_X\ \ln a/2};\\
&D_h = D_{a^X} = a^{2E_X}\ a^{D_X\ \ln a}(a^{D_X\ \ln a} - 1);\\
&E_h = E_{\log} = \frac{1}{2}\ \log_a\left(\frac{E_X^4}{D_X+E_X^2}\right);\\
&D_h = D_{\log} = \frac{1}{\ln a}\ \log_a\left(\frac{D_X+E_X^2}{E_X^2}\right).
\end{aligned} \quad (32)$$

Для "чистої" експоненціальної функції ($e^x = \exp(x)$, $\ln(x)$) отримані вирази набувають простішого вигляду:

$$\begin{aligned}
&E_h = E_{\exp} = \exp E_X\ \exp\left(\frac{D_X}{2}\right);\\
&D_h = D_{\exp} = \exp 2E_X\ \exp D_X(\exp D_X - 1);\\
&E_h = E_{\ln} = \frac{1}{2}\ \ln\left(\frac{E_X^4}{D_X+E_X^2}\right);\\
&D_h = D_{\ln} = \ln\left(\frac{D_X+E_X^2}{E_X^2}\right).
\end{aligned} \quad (33)$$

Враховуючи результати [2], а також [3], корисно привести ще "аналітичні" переноси для 2-х функцій ($\cos(x)$, $\arccos(x)$):

$$\begin{aligned}
&E_h = E_{\cos} = \exp\left(-\frac{D_x}{2}\right)\ \cos E_x;\\
&D_h = D_{\cos} = \frac{1}{2}\ [1-\exp(-D_x)]\ [1-\exp(-D_x)\ \cos 2E_x];\\
&E_h = E_{\arccos} = \arccos\frac{E_x}{\pm\sqrt{E_x^2+\sqrt{(1-E_x^2)^2-2D_x}}};\\
&D_h = D_{\arccos} = \ln\left(\frac{1}{E_x^2+\sqrt{(1-E_x^2)^2-2\,D_x}}\right).
\end{aligned} \quad (34)$$

А також для функцій ($x^2$; $\sqrt{x}$):

$$\begin{aligned}
&E_h = E_{x^2} = E_x^2 + D_x;\\
&D_h = D_{x^2} = 2D_x^2 + 4E_x^2 D_x;\\
&E_h^4 = E_{\sqrt{x}}^4 = E_x^2 - \frac{1}{2}D_x;\\
&D_h = D_{\sqrt{x}} = E_x - \sqrt{E_x^2 - \frac{1}{2}D_x}.
\end{aligned} \quad (35)$$

Якщо зважити на формалізацію:

$x_{\text{сер}} \approx E_x$; $\quad k^2(\Delta x)^2_{\text{сер}} \approx D_x$.

То отримані співвідношення дають нам бажані "правила переносу" середніх та похибок для функцій $a^x$ та $e^x$ $\log_a x$; $\exp(x)$ та $\ln(x)$; $x^2$, $\sqrt{x}$, $\cos(x)$, $\arccos(x)$:

$X_{\text{сер}} \to H_{\text{сер}};\mid \Delta X\mid_{\text{сер}} \to \mid \Delta H\mid_{\text{сер}}$.

*Матеріали по циклу робіт, пов'язаних з оцінкою похибок фізичних величин при непрямих вимірюваннях, були представлені на семінарах 8 відділів Інституту Фізики. Автор щиро вдячний колективам і завідуючим цих підрозділів за увагу і надану можливість озвучити їх, подивитись на них зі сторони іншими очима (І.В. Блонському, М.С. Бродіну, А.Г. Наумовцу, А.М. Негрійко, Ю.А. Резнікову, С.М. Рябченко, П.М. Томчуку та Л.П. Яценко). Без критичних зауважень, висловлених на цих представленнях, можна сміливо стверджувати, що робота значно б програла, якщо б взагалі склалась. Особливо хочу подякувати С.М. Рябченко за прискіпливе обговорення результатів і матеріалу, Г.В. Клімушевій за вичитування статті і критичні зауваження, а також А.І. Войтенко за поради. І подяка всім, хто був не байдужим і підтримав виконану роботу. Робота була виконана в інституті фізики НАН України, в межах теми ВФК 1.4.1 В/174, "Електричні, магнітні та нелінійно оптичні властивості нанодисперсійних частинок різної природи в орієнтованих рідких кристалах".*

1. Д. Худсон. *Статистика для физиков* (Мир, 1970).
2. Г.Г. Роде. Перенос похибок та середніх вимірів фізичної величини для елементарних функцій $\cos(x)$ та $\arccos(x)$. *УФЖ* **61** (4), (2016).
3. Г.Г. Роде. Перенос похибок та середніх вимірів фізичної величини для елементарних функцій $x^2$ та $\sqrt{x}$. *УФЖ* **62** (2), (2017).
4. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и призведений* (Физматгиз, 1963) [ISBN: 0122947606].
5. Propagation of uncertainty (Wikipedia). https://en.wikipedia.org/wiki/Propagation_of_uncertainty.
6. H.H. Ku. Notes on the use of propagation of error formulas. *J. Res. Nat. Bur. Stand. C* **70**, 263 (1966).
7. Ph.R. Bevington, D.K. Robinson. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences* (McGraw-Hill, 2002) [ISBN: 0-07-247227-8].
8. J.R. Taylor. *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements* (University Science Books, Sausalito, Ca, 1997) [ISBN: 0-935702-42-3].

9. B.N. Taylor, C.E. Kuyatt. *Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results, NIST Technical Note 1297* (National Institute of Standards and Technology, 1994).
10. P.K. Sinervo. *Denition and treatment of systematic uncertainties in high energy physics and astrophysics. Proceedings of the PHYSTAT2003 Conference, SLAC, Stanford, Ca* (September 8–11, 2003), p. 122.
11. J. Denker. Nonlinear least squares. http://www.av8n.com/physics/nonlinear-least-squares.htm.
12. E.W. Weisstein. Standard deviation entry at math world. http://mathworld.wolfram.com/StandardDeviation.html.
13. Evaluation of measurement data – An introduction to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" and related documents. http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_104_2009_E.pdf.


Одержано 26.05.17

*G.G. Rode*

PROPAGATION OF THE MEASUREMENT ERROR AND THE MEASURED MEAN OF A PHYSICAL QUANTITY FOR ELEMENTARY FUNCTIONS $a^x$ AND $\log_a x$

S u m m a r y

Rules have been obtained for the propagation of the error and the mean value for a measured physical quantity onto another one with a functional relation of the type $a^x$ or $\log_a x$ between them. In essence, these rules are inherently based on the Gaussian weight scheme. Therefore, they should be valid in the framework of a real Gaussian weight scheme applied to discrete data of a real physical experiment (a sample). An analytical form that was used to present the rules concerned ("analytical propagation rules") and their character allow the processing and the analysis of experimental data to be simplified and accelerated.