

Б.І. ЛЕВ, А.Г. ЗАГОРОДНІЙ

Інститут теоретичної фізики імені М.М. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14-б, Київ 03143; e-mail: blev@bitp.kiev.ua, azagorodny@bitp.kiev.ua)

УДК 536-12

СТАТИСТИЧНЕ ОПИСАННЯ НЕРІВНОВАЖНИХ БАГАТОЧАСТИНКОВИХ СИСТЕМ

Системи частинок, що взаємодіють, в багатьох випадках є нерівноважними. В даному огляді представлено новий підхід, заснований на застосуванні нерівноважного статистичного оператора, який дає змогу врахувати неоднорідний розподіл частинок і температури. Такий метод використовує процедуру сідлової точки для знаходження основних внесків у статистичну суму і надає можливості отримати всі термодинамічні параметри систем. Передбачено можливі особливості поведінки взаємодійних систем, таких як гравітаційні системи, системи з кулонівським відштовхуванням тощо для різних термодинамічних умов. Запропоновано новий підхід для описування нерівноважних систем в енергетичному просторі, що є розширенням підходу Гібса для макроскопічних систем за нерівноважних умов. Цей підхід уможливує описати стаціонарні стани нерівноважних систем та їхню динаміку.

Ключові слова: нерівноважний статистичний оператор, багаточастинкові системи, стаціонарні стани.

1. Вступ

Системи частинок, що взаємодіють, іноді не можуть бути описані в термінах звичайного термодинамічного ансамблю (наприклад, самогравітаційні системи) [1, 2], а тому їх не можна розглядати на основі стандартних методів рівноважної статистичної механіки. Зокрема, коли енергія не є адитивною, канонічний ансамбль непридатний до вивчення систем з далекосяжними взаємодіями. В таких системах рівноважні стани відповідають лише локальним максимумам ентропії [3, 4]. Для того, щоб визначити рівноважні стани системи частинок, що взаємодіють, та описати ймовірні фазові переходи, розроблено два типи підходів – статистичні та термодинамічні. Загалом вважається, що для таких систем теорія середнього поля є повністю прийнятною, хоча в цій теорії будь-яка термодинамічна функція залежить від термодинамічних параме-

трів лише в термінах безрозмірних комбінацій, і система може бути термодинамічно нестабільною, хоча термодинамічна межа існує [4].

Системи частинок з далекосяжними взаємодіями, наприклад, самогравітаційні системи або системи з кулонівським відштовхуванням, не досягають термодинамічної рівноваги Больцмана–Гібса. Вони потрапляють в квазістаціонарні стани, час життя яких може бути як завгодно великий, коли кількість частинок більшає. Кількісний опис порога нестабільності спонтанного порушення симетрії для d -вимірних систем наведено в роботі [5]. Однорідний розподіл частинок у системі частинок із взаємодіями за рахунок далекосяжної сили є нестійким. Розподіл частинок у такій системі просто-риво неоднорідний від самого початку. Поведінка систем для різних рівноважних ансамблів потребує різних способів описання, головним чином тому, що будь-який стан системи частинок з далекосяжною взаємодією далекий від рівноваги, а час релаксації його рівноважного стану дуже великий.

© Б.І. ЛЕВ, А.Г. ЗАГОРОДНІЙ, 2020

Нерівноважні стаціонарні стани були описані в роботі [6]. Тривимірні системи можуть потрапляти в пастку нерівноважних квазістаціонарних станів і не еволюціювати до термодинамічної рівноваги. Таким чином, виникає дилема: або використати постулати рівноважної статистичної механіки і отримати лише критерії нестабільності, або врахувати можливі просторово неоднорідні розподіли частинок, використовуючи інші підходи. Неоднорідний розподіл частинок, температури і хімічного потенціалу можна розглядати в термінах нерівноважного статистичного оператора [3], що враховує ймовірність локальних змін термодинамічних параметрів. Цей підхід, базується на тому, що рівняння стану має впливати з явного виду функції розподілу просторово неоднорідної системи, яку можливо визначити у термодинамічній границі [7, 8]. Система є нерівноважною *a priori*, а неоднорідність розподілу частинок допускає неоднорідні розподіли температури, хімічного потенціалу та інших термодинамічних параметрів.

Формування просторово неоднорідного розподілу частинок із взаємодією є типовою проблемою фізики конденсованої речовини. При цьому статистичний опис має використовувати процедуру для обчислення основних внесків до функції розподілу та не призводити до розбіжностей ентропії для нескінченного об'єму системи. Нетрадиційний метод для розв'язання цієї проблеми запропоновано в роботах [9, 12]. Він використовує представлення Хаббарда–Стратоновича функції розподілу [13] і застосовується до опису системи частинок з далекосяжними взаємодіями, щоб знайти розв'язок для розподілу частинок, не використовуючи обмежень на об'єм та кількість частинок. Важливо, щоб цей розв'язок не мав розбіжностей в термодинамічній границі. Для цього можна скористатися наближенням сідлової точки, що дає змогу врахувати збереження числа частинок в обмеженому об'ємі. Функції розподілу для обох випадків однорідних і неоднорідних розподілів частинок були отримані в [10, 11, 15]. Такий підхід, однак, визначає лише умову формування ймовірних неоднорідних розподілів у системі частинок з далекосяжними взаємодіями.

Важливою фундаментальною проблемою є пошук адекватного підходу до статистичного опису самогравітувальних систем. Загальна проблема

поведінки таких систем вивчалася довгий час [16] і виявилася набагато складнішою, ніж вивчення інших систем багатьох тіл. У цьому контексті самогравітні системи є об'єктами, що дають змогу перевірити і розвинути ідеї статистичної механіки і термодинаміки [17]. Статистичний опис самогравітної системи привертає постійну увагу з огляду на астрофізичні проблеми [18, 28] і формулювання загальних методів, які можуть бути використані в інших фізичних ситуаціях.

У випадку самогравітної системи термодинамічні ансамблі є нееквівалентними. В канонічному описанні не існує негативного значення теплоємності [1], що його можна спостерігати для мікроканонічних ансамблів [19]. У мікроканонічному ансамблі саморуйнування відповідає “гравітермічній катастрофі”, тоді як в канонічному ансамблі воно пов'язане з “ізотермічним колапсом” [19]. Самогравітна система може збільшувати ентропію, не обмежуючись зростанням густини, оскільки рівноважні стани пов'язані тільки з максимумом локальної ентропії. Однак, якщо ввести відштовхувальний потенціал на короткій відстані, що запобігає повному колапсові, то глобальний максимум ентропії тепер може бути досягнутий для всіх доступних значень енергії. Ефективне відштовхування може бути введено різними способами, оскільки фізичні результати досить нечутливі до точної форми регуляризації. Як альтернативу ми можемо розглядати класичний газ твердих сфер з урахуванням введення виключених об'ємів навколо кожної частинки [20]. Для газу з чисто гравітаційною взаємодією між частинками функція розподілу розбігається. Переважно через те, що стани самогравітних систем у більшості випадків далекі від рівноваги, то час релаксації до рівноваги дуже великий. Однорідний розподіл однорідних частинок у такій системі є нестійким, а відтак розподіл частинок є просторово неоднорідним від самого початку. Система розбивається на комплекс неоднорідних кластерів, що еволюціонують до більш конденсованого стану.

Поведінку самогравітної системи для різних рівноважних ансамблів описують різними методами. Зроблено неодноразові спроби врахувати неоднорідність розподілів частинок, але задача і досі не розв'язана. Причина полягає в тому, що при врахуванні неоднорідності хімічний потенціал залежить від просторових змінних, а рівняння ста-

ну має співвідносити температуру і густину, а отже, температура, як термодинамічний параметр, також має залежати від просторових координат. Стандартний підхід використовує політропне рівняння, яке визначає концентраційну залежність температури, а відтак і залежність тиску від концентрації. Це генерує, зокрема, стабільні розв'язки при гравітаційному утворенні зірок. Цей підхід є дещо неузгодженим, оскільки рівняння стану має впливати з визначення функції розподілу, яка, однак, невідома для просторово неоднорідних систем, [7, 8].

У цьому огляді ми представляємо новий підхід, що ґрунтується на використанні нерівноважного статистичного оператора [3], який більше пристосований для опису систем частинок з далекосяжним характером взаємодії. Рівняння стану і всі необхідні термодинамічні характеристики регулюються рівняннями, які визначають стани, що дають найбільший внесок в статистичну суму. Тому немає необхідності вводити додаткову гіпотезу про залежність густини від температури. Остання залежність впливає з розв'язку відповідних термодинамічних співвідношень, які визначають нерівноважну функцію розподілу. Для простих випадків отримано ймовірні просторово неоднорідні розподіли частинок і температури. Для випадку рівноваги відтворюється добре відомий результат [21, 22] для функції розподілів. Показано, що цей підхід описує неоднорідний розподіл частинок і визначає необхідні параметри системи.

Основна ідея роботи полягає в тому, щоб надати детальний опис системи з далекосяжною взаємодією, заснованої на принципах нерівноважної статистичної механіки, і отримати ймовірні розподіли частинок для випадку фіксованого числа частинок і енергії системи.

Дотепер статистичний опис неоднорідності передбачав просторово неоднорідні розподіли частинок, температури і хімічного потенціалу при фіксованому числі частинок і енергії системи. У багатьох випадках, однак, неоднорідність викликана зовнішніми енергетичними змінами, пов'язаними з впливом навколишнього середовища. Таким чином, нам необхідно розробити метод, який має забезпечити можливість врахування впливу навколишнього середовища на поведінку окремої макроскопічної системи і знайти відповідні стани останніх. Флуктуації параметрів як системи, так і се-

редовища також мають бути враховані. Підказку для такого підходу свого часу надав Гібс [53].

У всіх випадках макросистема, що взаємодіє із середовищем, після релаксації переходить в рівноважний стан. Властивості такої системи визначаються в залежності від характеристик середовища. Рівноважного стану окремої макросистеми можна досягти в ідеальних умовах [21, 52, 54]. В результаті впливу навколишнього середовища термодинамічні параметри окремої макросистеми збігаються з характеристиками термостата.

Як відомо, будь-який стан системи можна описати в термінах функцій розподілу, які визначають всі термодинамічні властивості макроскопічної системи [21, 52]. На практиці статистичний опис макроскопічної системи вимагає знання лише кількох макроскопічних параметрів, таких як, наприклад, енергія. Отже, фундаментальним завданням є розроблення методу дослідження властивостей стаціонарних станів відкритих систем і виявлення умов існування таких станів. Один з можливих шляхів розв'язання цієї загальної проблеми може бути опис, заснований на підході Гібса [53]. Основна мета нашого огляду якраз і полягає в тому, щоб запропонувати простий спосіб описання нерівноважних систем в енергетичному просторі [24] та застосувати його для формулювання нової концепції розв'язання космологічної проблеми.

2. Статистичний опис нерівноважних систем взаємодійних частинок

Статистична термодинаміка нерівноважних систем базується на законах збереження для динамічних змінних. Для визначення термодинамічних функцій нерівноважної системи використовують представлення відповідних статистичних ансамблів, які враховують нерівноважні стани цих систем. Можна припустити, що концепція ансамблів Гібса застосована для описування нерівноважних стаціонарних станів системи. У цьому випадку можна визначити нерівноважний ансамбль як сукупність системи, що відповідає одній і тій самій стаціонарній зовнішній дії. Ці системи в один і той самий спосіб взаємодіють з термостатом і можуть мати всі можливі значення макроскопічних параметрів, сумісних з наявними умовами. У системах, що перебувають в однакових стаціонарних зовнішніх умовах, формуються локальні стаціо-

нарні розподіли. Якщо зовнішні умови залежать від часу, то локальний рівноважний розподіл не буде стаціонарним. Для нелокально рівноважного ансамблю необхідно визначити функцію розподілу або статистичний оператор системи [3].

Нарешті можна нагадати, що стаціонарні стани є лише метастабільними, оскільки відповідають локальному максимальному значенню ентропії. Якщо припустити, що нерівноважні стани системи можна визначати за допомогою неоднорідного розподілу енергії $H(\mathbf{r})$ і кількості частинок $n(\mathbf{r})$, то функцію розподілу для класичної системи можна записати у вигляді [3]:

$$f_l = Q_l^{-1} \exp \left\{ - \int (\beta(\mathbf{r})H(\mathbf{r}) - \eta(\mathbf{r})n(\mathbf{r})) d\mathbf{r} \right\}, \quad (1)$$

де

$$Q_l = \int D\Gamma \exp \left\{ - \int (\beta(\mathbf{r})H(\mathbf{r}) - \eta(\mathbf{r})n(\mathbf{r})) d\mathbf{r} \right\}. \quad (2)$$

Інтегрування у формулі має здійснюватися по всьому фазовому простору системи. Треба зазначити, що у випадку локального рівноважного розподілу множники Лагранжа $\beta(\mathbf{r})$ та $\eta(\mathbf{r})$ є функціями просторової координати. Мікроскопічна густина частинок може бути представлена в стандартній формі

$$n(\mathbf{r}) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (3)$$

Введення локального рівноважного розподілу можливе, якщо час релаксації у всій системі більший за час релаксації в локальній макроскопічній ділянці. Визначивши нерівноважний статистичний оператор, можна описати всі термодинамічні параметри нерівноважної системи. Для цього узагальнимо термодинамічне співвідношення для неоднорідних систем. Для визначення невідомих множників Лагранжа запишемо необхідне термодинамічне співвідношення у вигляді [3]:

$$-\frac{\delta \ln Q_l}{\delta \beta(\mathbf{r})} = \langle H(\mathbf{r}) \rangle_l, \quad \frac{\delta \ln Q_l}{\delta \eta(\mathbf{r})} = \langle n(\mathbf{r}) \rangle_l. \quad (4)$$

Ці співвідношення є природним узагальненням добре відомих співвідношень для рівноважної системи, на випадок неоднорідної системи. Збереження частинок і енергії в системі можна записати у вигляді

$$\int n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = N, \quad \int H(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = E. \quad (5)$$

Для подальшого статистичного опису нерівноважної системи необхідно визначити гамільтоніан системи

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), \quad (6)$$

де потенціальна енергія взаємодії складається з двох частин

$$V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = -W(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + U(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), \quad (7)$$

$W(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ описує притягування, а $U(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ відштовхування. Тоді густина енергії має вигляд

$$H(\mathbf{r}) = \frac{p^2(\mathbf{r})}{2m(\mathbf{r})} n(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \int W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \frac{1}{2} \int U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (8)$$

Це представлення можна використовувати, якщо весь простір розбити на рівні області з однаковою масою і розглянути їхнє переміщення у фазовому просторі як нестислі рідини. Для системи взаємодійних частинок нерівноважний статистичний оператор можна записати у вигляді

$$Q_l = \int D\Gamma \exp[S(\mathbf{r})] Q_{\text{int}}, \quad (9)$$

$$S(\mathbf{r}) = - \int \left[\beta(\mathbf{r}) \frac{p^2(\mathbf{r})}{2m(\mathbf{r})} - \eta(\mathbf{r}) \right] n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (10)$$

$$Q_{\text{int}} = \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int \beta(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \right\}. \quad (11)$$

Інтегрування у фазовому просторі означає

$$D\Gamma = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \prod_i dr_i dp_i.$$

Для того, щоб здійснити формальне інтегрування у другій частині такого представлення, можна ввести додаткові змінні поля, використовуючи теорію інтегралів Гаусса [12, 13]:

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ - \frac{\nu^2}{2} \int \beta \omega n n' d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \right\} = \\ & = \int D\sigma \exp \left\{ - \frac{\nu^2}{2} \int (\beta \omega)^{-1} \sigma \sigma' d\mathbf{r} d\mathbf{r}' - \nu \int \sqrt{\beta} \sigma n d\mathbf{r} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$D\sigma = \frac{\prod_s d\sigma_s}{\sqrt{\det 2\pi\beta\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}} ,$$

а $\omega^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ є оберненим оператором, який задовольняє умову $\omega^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\omega(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')$. Енергія взаємодії є функцією Гріна для цього оператора, а $\nu^2 = \pm 1$ в залежності від знака взаємодії або потенціальної енергії. Після запропонованого перетворення поле змінної $\sigma(\mathbf{r})$ містить ту саму інформацію, що і первісна функція розподілу, тобто всю інформацію про можливі просторові стани систем. Тепер статистичний оператор можна переписати у вигляді:

$$Q_l = \int D\Gamma D\varphi D\psi \times \exp \left\{ - \int s(\mathbf{r})n(\mathbf{r})d\mathbf{r} - \int v(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \right\}, \quad (13)$$

де

$$s(\mathbf{r}) = \beta(\mathbf{r}) \frac{p^2(\mathbf{r})}{2m(\mathbf{r})} + \eta(\mathbf{r}) + \sqrt{\beta(\mathbf{r})}\psi(\mathbf{r}) + i\sqrt{\beta(\mathbf{r})}\varphi(\mathbf{r}), \quad (14)$$

а частина, яка походить від взаємодії,

$$v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2} [\beta(\mathbf{r})W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]^{-1} \psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}') - \frac{1}{2} [\beta(\mathbf{r})U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]^{-1} \varphi(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}'). \quad (15)$$

У загальному функціональному інтегралі можна провести інтегрування на фазовому просторі, якщо використовувати визначення густини, а також просумувати за числами заповнення. Математичні перетворення цього функціонала можна знайти в оригінальних роботах [37–40]. Після цього нерівноважний статистичний оператор можна переписати у вигляді

$$Q_l = \int D\varphi D\psi d\xi \exp \{ -S(\varphi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}), \xi(\mathbf{r}), \beta(\mathbf{r})) \}, \quad (16)$$

де ефективний нерівноважний “локальний термодинамічний потенціал” набуває вигляду

$$S = -\frac{1}{2} \int [\beta(\mathbf{r})W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]^{-1} \psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}') - \frac{1}{2} \int [\beta(\mathbf{r})U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]^{-1} \varphi(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}d\mathbf{r}' -$$

$$- \int \left[\xi(\mathbf{r}) \left(\frac{2\pi m(\mathbf{r})}{\hbar^3 \beta(\mathbf{r})} \right)^{3/2} \times \exp \sqrt{\beta(\mathbf{r})}\psi(\mathbf{r}) \cos \left(\sqrt{\beta(\mathbf{r})}\varphi(\mathbf{r}) \right) \right] d\mathbf{r}. \quad (17)$$

Тут введено нову змінну $\xi(\mathbf{r}) \equiv \exp \eta(\mathbf{r})$, яку можна інтерпретувати як хімічну активність. Статистичний оператор в представленій формі дає можливість застосовувати ефективні методи, розроблені в квантовій теорії поля, без накладення додаткових обмежень інтегрування на змінні поля і без використання теорії збурень. Функціонал $S(\varphi(\mathbf{r}), \xi(\mathbf{r}), \beta(\mathbf{r}))$ залежить від розподілу змінних поля $\varphi(\mathbf{r})$, хімічної активності $\xi(\mathbf{r})$ та оберненої температури $\beta(\mathbf{r})$. Тепер можна використати метод сідлової точки для пошуку асимптотичного значення статистичного оператора Q_l при збільшенні кількості частинок N до ∞ . Домінуючим внеском є стани, які задовольняють екстремальні умови функціонала. Очевидно, що рівняння сідлової точки представляють термодинамічні співвідношення і їх можна записати як рівняння для змінної поля

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi(\mathbf{r})} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta \psi(\mathbf{r})} = 0 \quad (18)$$

за умов збереження кількості частинок

$$\frac{\delta S}{\delta (\eta(\mathbf{r}))} = - \int \frac{\delta S}{\delta (\xi(\mathbf{r}))} \xi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = N \quad (19)$$

та збереження енергії системи

$$- \int \frac{\delta S}{\delta (\beta(\mathbf{r}))} \xi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = E. \quad (20)$$

Розв'язки отриманих таким чином рівнянь повністю визначають всі термодинамічні параметри і описують загальну поведінку взаємодійної системи незалежно від того, чи є цей розподіл частинок просторово неоднорідним, чи ні. Вищенаведені рівняння, в принципі, описують багаточастинкову задачу в термодинамічній границі. Просторово неоднорідний розв'язок цих рівнянь відповідає розподілу взаємодійних частинок. Така неоднорідна поведінка пов'язана з природою та інтенсивністю взаємодії. Іншими словами, накопичення частинок в скінченій просторовій області (формування неоднорідності) відображає просторовий розподіл полів, активності і температури. Дуже важливо зазначити, що саме в цьому підході можна врахувати неоднорідну температуру розподілу, яка може

залежати від просторового розподілу частинок у системі.

3. Системи частинок з далекосяжною взаємодією

У визначенні Q_f присутній обернений оператор енергії взаємодії, і тому для дальшого опису нам необхідно визначити цей оператор. Розпочнімо із розгляду системи з притягувальною гравітаційною взаємодією. У загальному випадку далекосяжних взаємодій, таких як кулонівська або ньютонівська гравітаційна взаємодія, в неперервній границі обернений оператор можна розглядати як оператор

$$U^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi G m^2} \Delta_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = L_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^{\psi} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (21)$$

де $\Delta_{\mathbf{r}}$ – оператор Лапласа в реальному просторі. Кількість реалістичних взаємодій, для яких можна знайти обернений оператор, обмежена. Труднощів в отриманні оберненого оператора можна уникнути шляхом введення колективної змінної, яка відповідає взаємозв'язку між введеними полями на траєкторіях сідлової точки. З космології відомо, що дві маси розбігаються зі швидкістю $v = H(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, де H – константа Габла, $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ – відстань між ними. Кінетичну енергію відносного руху кожної маси запишемо у вигляді

$$T = \frac{m(\mathbf{r})}{2} H^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2$$

і трансформуємо її в енергію взаємодії між двома масами в різних просторових точках

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{m(\mathbf{r})}{2} H^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + \frac{m(\mathbf{r}')}{2} H^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2, \quad (22)$$

яку для однорідного розподілу маси можна переписати як $W(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = m(\mathbf{r}) H^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2$. Для такої енергії взаємодії обернений оператор набуває вигляду

$$L_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^{\varphi} = \frac{1}{m H^2} \frac{d^2}{dr^2}. \quad (23)$$

У нашому випадку за умови такого далекосяжного притягування і ще далекосяжнішого відштовхування між частинками нерівноважний статистичний

оператор перепишемо у вигляді

$$Q_l = \int D\varphi D\psi d\xi \exp \{-S(\varphi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}), \xi(\mathbf{r}), \beta(\mathbf{r}))\}, \quad (24)$$

де ефективний нерівноважний “локальний термодинамічний потенціал” набуває вигляду

$$\int \frac{1}{2r_{\varphi}} \varphi(\mathbf{r}) L_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^{\varphi} \varphi(\mathbf{r}') + \frac{1}{2r_{\psi}} \psi(\mathbf{r}) L_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^{\psi} \psi(\mathbf{r}') + \xi(\mathbf{r}) \Lambda^{-3} \exp \sqrt{\beta(r)} \psi(\mathbf{r}) \cos \left[\sqrt{\beta(\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{r}. \quad (25)$$

Тут величини β, φ, ψ є залежними від просторової точки. У цьому представленні ми використали термічну довжину хвилі де Бройля і визначили довжину взаємодії як

$$\Lambda(\mathbf{r}) = \left(\frac{2m(\mathbf{r})}{\hbar^2 \beta(\mathbf{r})} \right)^{1/2}, \quad (26)$$

$$r_{\psi}(\mathbf{r}) = 4\pi G m^2 \beta(r),$$

$$r_{\varphi}(\mathbf{r}) = \frac{2}{m H^2}.$$

Маючи представлення для функції розподілу ми можемо описати різні реальні системи і визначити термодинамічні параметри для нерівноважної системи.

4. Система частинок з відштовхувальною взаємодією

Перш за все розглянемо систему з лише відштовхувальною взаємодією між частинками. В цьому випадку $\psi = 0$, і ми можемо переписати “локальний термодинамічний потенціал” у простій формі:

$$S = \int \left\{ \frac{1}{2} \varphi(\mathbf{r}) L_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^{\varphi} \varphi(\mathbf{r}') + \xi(\mathbf{r}) \Lambda^{-3}(\mathbf{r}) \cos \left[\sqrt{\beta(\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r}) \right] \right\} d\mathbf{r}. \quad (27)$$

Функціонал $S(\varphi(\mathbf{r}), \xi(\mathbf{r}), \beta(r))$ залежить від розподілу поля, хімічної активності та оберненої температури. Далі для знаходження асимптотичного значення статистичного оператора Q_l можна використати метод сідлових точок, якщо кількість частинок N прямує до нескінченності. Домінівні внески при цьому дають стани, які задовольняють

екстремальні умови функціонала. Можна показати, що сідлоподібне рівняння являє собою термодинамічне співвідношення і може бути зведене до рівняння для змінної поля

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi(\mathbf{r})} = 0$$

та умов збереження кількості частинок

$$\frac{\delta S}{\delta(\eta(\mathbf{r}))} = \int \frac{\delta S}{\delta(\xi(\mathbf{r}))} \xi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = N,$$

і закону збереження енергії для системи

$$\int \frac{\delta S}{\delta \beta(\mathbf{r})} \xi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = E.$$

Розв'язки наведених рівнянь повністю визначають всі термодинамічні функції і описують загальну поведінку взаємодійних систем з просторово однорідними і неоднорідними розподілами частинок. Вищенаведена система рівнянь в принципі розв'язує багаточастинкову задачу в термодинамічній границі. Дуже важливо зазначити, що лише цей підхід дає змогу враховувати неоднорідний розподіл температури, що може залежати від просторового розподілу частинок у системі.

Щоб отримати більше інформації про поведінку взаємодійних систем, введемо деякі нові змінні. З умови збереження кількості частинок $\int \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = N$ введемо макроскопічну функцію густини

$$\rho(\mathbf{r}) \equiv \Lambda^{-3}(\mathbf{r}) \xi(\mathbf{r}) \cos(\sqrt{\beta(\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r})). \quad (28)$$

За відсутності взаємодії (вільні частинки $\varphi(\mathbf{r}) = 0$), якщо задати хімічну активність в термінах хімічного потенціалу $\xi(\mathbf{r}) = \exp(\mu(\mathbf{r})\beta(\mathbf{r}))$, отримуємо відоме співвідношення $\beta(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r}) = \ln \rho(\mathbf{r})\Lambda^3(\mathbf{r})$, що узагальнює співвідношення в рівноважній статистичній механіці [21]. Рівняння для збереження енергії тепер набуває вигляду

$$\frac{1}{2} \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{\beta(\mathbf{r})} \left\{ 3 - \sqrt{\beta(\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r}) \operatorname{tg}[\sqrt{\beta(\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r})] \right\} d\mathbf{r} = E. \quad (29)$$

З цього рівняння отримуємо співвідношення для хімічного потенціалу, тобто

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\delta V} \frac{\delta V}{\delta N} &= \frac{1}{2} \frac{\rho(\mathbf{r})}{\beta(\mathbf{r})} \left\{ 3 - \sqrt{\beta(\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r}) \operatorname{tg}[\sqrt{\beta(\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r})] \right\} = \\ &= \mu(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (30)$$

що для хімічного потенціалу дає

$$\mu(\mathbf{r})\beta(\mathbf{r}) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\beta(\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r}) \operatorname{tg}[\sqrt{\beta(\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r})]. \quad (31)$$

Цей підхід також встановлює рівняння стану типу

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\delta S}{\delta V}.$$

Локальне рівняння стану при цьому набуває вигляду

$$P(\mathbf{r})\beta(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \left[\mu(\mathbf{r})\beta(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \right]. \quad (32)$$

Для ідеального газу отримуємо відоме рівняння стану, оскільки $\varphi(\mathbf{r}) = 0$ та $P\beta = \rho$. У цьому випадку ми отримуємо $\mu(\mathbf{r})\beta(\mathbf{r}) = 3/2$, і рівняння стану відтворює рівняння стану ідеального газу. Енергія системи дорівнює $E = (3/2)NkT$. Ця формула відповідає добре відомим результатам [21]. У контексті визначення (32) можна зробити висновок, що за умови $\mu(\mathbf{r})\beta(\mathbf{r}) < 1/2$ з'являється негативний тиск $P(\mathbf{r})\beta(\mathbf{r}) < 0$, і це задовольняє необхідну умову вакууму в загальній теорії відносності. Ця умова виконується в реалістичному стані $\sqrt{\beta(\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r}) \operatorname{tg}[\sqrt{\beta(\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r})] < 2$ як для сталої температури, так і для загальної енергії системи $E < (1/2)NkT$. Вона передбачає, що енергія кожної частинки є нижчою від теплової енергії. У цьому особливому випадку енергія системи є нижчою від загальної теплової енергії частинок. Ця дуже особлива умова може бути пов'язана із своєрідними властивостями вакууму. Якщо врахувати визначення хімічного потенціалу, то можна переписати густину у вигляді

$$\rho(\mathbf{r}) \equiv \Lambda_e^{-3}(\mathbf{r}) \exp\left[\frac{1}{2}\sigma(\mathbf{r}) \operatorname{tg} \sigma(\mathbf{r})\right] \cos \sigma(\mathbf{r}), \quad (33)$$

де введено нову змінну $\sigma = \sqrt{\beta(\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r})$ і перевизначено довжину де-Бройля

$$\Lambda_e = \left(\frac{\hbar^2 \beta(\mathbf{r}) e}{2m(\mathbf{r})} \right)^{1/2}.$$

Локальний термодинамічний потенціал переписуємо як

$$S = \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\sqrt{\beta(\mathbf{r})}} L_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{\sqrt{\beta(\mathbf{r}')}} + \right.$$

$$+ \Lambda_e^{-3}(\mathbf{r}) \exp \left[\frac{1}{2} \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{tg} \sigma(\mathbf{r}) \right] \cos \sigma(\mathbf{r}) \} d\mathbf{r}. \quad (34)$$

При сталій температурі для фіксованої маси частинок можна визначити локальну ентропію в наближенні середнього поля

$$S = \int \left\{ \frac{1}{2\beta} \sigma(\mathbf{r}) L_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \sigma(\mathbf{r}') + \Lambda_e^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{tg} \sigma(\mathbf{r}) \right] \cos \sigma(\mathbf{r}) \right\} d\mathbf{r}. \quad (35)$$

Тепер рівняння для змінної поля переписуємо як

$$L_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \sigma(\mathbf{r}') - \beta \frac{dV(\sigma)}{d\sigma} = 0, \quad (36)$$

де потенціальна енергія

$$V = \Lambda_e^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma(\mathbf{r}) \operatorname{tg} \sigma(\mathbf{r}) \right] \cos \sigma(\mathbf{r})$$

є функцією змінної поля. Цей потенціал має мінімальне значення $3 \sin 2\sigma = -2\sigma$. За малих значень σ ми маємо два різних розв'язки $\sigma = 0$ і $\sigma^2 = 1$. Для малих σ ефективний потенціал набуває дуже простої форми $V(\sigma) = (1 - \sigma^2)$, і рівняння для змінної поля набуває вигляду $L_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \sigma(\mathbf{r}') + 2\beta\psi = 0$. У загальному випадку потенціальна енергія поля має коливальний характер із меншанням амплітуди. Після цього можна проаналізувати можливий просторовий розв'язок для змінної поля та поведінки такого поля в часі.

Після визначення оберненого оператора можна знайти просторову залежність фундаментального скалярного поля на основі розв'язку рівняння

$$\frac{1}{mH^2} \frac{d^2\sigma}{dr^2} - \beta \frac{dV(\sigma)}{d\sigma} = 0, \quad (37)$$

яке при малих значеннях σ трансформується в рівняння

$$\frac{d^2\sigma}{dr^2} + 2\beta mH^2 \sigma = 0 \quad (38)$$

і має періодичний розв'язок $\sigma = \cos(\sqrt{2m\beta}Hr)$ з просторовим періодом $2\pi/(\sqrt{2m\beta}H)$. На менших відстанях від цієї величини можна вважати, що фундаментальне скалярне поле є незмінним в просторі, але може змінюватися з часом. Для визначення еволюції такого поля можна сформулювати

динамічне рівняння. Цей розв'язок може описувати формування бульбашки нової фази в теорії інфляції Всесвіту [42–44], а введена змінна поля відіграє роль фундаментального скалярного поля і враховує відштовхувальну взаємодію в розглянутій системі. У цьому сенсі в ролі динамічного рівняння для поля можна використовувати рівняння Гінзбурга–Ландау для фундаментального скалярного поля в стандартній формі

$$\frac{\partial \sigma(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\gamma \frac{\delta S}{\delta \sigma(\mathbf{r})} = -\gamma \frac{dV(\sigma)}{d\sigma}, \quad (39)$$

де γ – динамічний в'язкий коефіцієнт [50]. Це еволюційне рівняння, фактично застосовне до ряду систем з неконсервативним параметром порядку. Можна припустити, що динаміку Всесвіту зумовлює підвищення ентропії. Еволюція в нерівноважному стані буде генеруватися під впливом ентропійного ландшафту і морфологічної нестійкості параметрів. Динаміка системи дисипативна, що може призвести до зменшення локальної ентропії.

5. Система із взаємодією кулонівського типу

Системи частинок з кулонівською взаємодією (кулоноподібні системи), такі як плазма, колоїдні системи, розчини електролітів, електронний газ у твердих тілах тощо, широко представлені як в природі, так і в лабораторних умовах. Багато видів м'якої речовини, наприклад, розчини поверхнево-активних речовин, колоїди в різних розчинниках і частинки пилу в плазмі проявляють самоорганізацію. Однією з найважливіших проблем тут є статистичний опис кулонівських систем з високими концентраціями взаємодійних частинок. При підвищенні концентрації спостерігаються утворення різних кристалічних структур, переходи між кристалічними фазами різної симетрії та плавлення. Теретичний опис таких систем є досить складним, оскільки традиційні методи статистичної механіки не можуть бути застосовані до неоднорідних систем з кулонівськими взаємодіями. Виникає необхідність у застосуванні методів, які одночасно мали би враховувати внесок домінуючих конфігурацій у функцію розподілу і не приводили б до розбіжностей вільної енергії, коли об'єм зростає нескінченно. Мета даного розгляду полягає у за-

стосуванні квантово-польового підходу до статистичного опису кулонівської системи та розрахунку термодинамічних характеристик як для однорідних, так і неоднорідних розподілів взаємодійних частинок, а також дослідженні конденсованих просторово-періодичних структур. Ми розглянемо електрично нейтральні системи і використаємо потенціал кулонівської взаємодії або ефективний екранований потенціал в залежності від використовуваної моделі. У випадку нейтральної в цілому кулонівської системи, обернений оператор для екранованої взаємодії в граничному випадку континууму слід розглядати в операторному сенсі, тобто

$$U^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi G Q^2} (\Delta_{\mathbf{r}} - \varkappa^2(\mathbf{r})) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = L_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^{\psi} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (40)$$

де, як і раніше $\Delta_{\mathbf{r}}$ – оператор Лапласа в реальному просторі, а $\varkappa(\mathbf{r})$ – обернена довжина екранування. У нашому випадку для визначення “локального термодинамічного потенціалу” можна використати співвідношення $(\nabla\varphi(\mathbf{r}))^2 = \nabla(\varphi(\mathbf{r})\nabla\varphi(\mathbf{r})) - \varphi(\mathbf{r})\Delta\varphi(\mathbf{r})$. Першу частину інтегрування можна представити як поверхневий інтеграл, де $\varphi(\mathbf{r}) = 0$ на поверхні. Після цього ми можемо представити локальну ентропію як

$$S = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2r_e} [(\nabla\varphi(\mathbf{r}))^2 + \varkappa^2\varphi^2\mathbf{r}] - \xi(\mathbf{r})\Lambda^{-3}(\mathbf{r}) \cos\varphi(\mathbf{r}) \right\},$$

де $r_e = 4\pi Q^2\beta$ при сталій температурі. Розглянемо одновимірну систему з лінійною густиною частинок. Заряди, розподілені вздовж макромолекул, можна розглядати як приклад такої системи. Візьмемо циліндричну молекулу з довжиною L і радіусом r , значно меншим від L . Нехай кулонівські заряди лежать на осі циліндра. У цьому випадку задача може бути розв’язана точно. Локальний термодинамічний потенціал системи заряджених частинок в одновимірному випадку може бути представлений як

$$S = \frac{V}{L} \int_0^L dz \left\{ \frac{1}{r_e} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 - \xi\Lambda^{-3} \cos\varphi \right\},$$

і рівняння для сідлового поля набувають форми рівняння Синус–Гордона

$$\frac{1}{r_e} \left(\frac{d^2\varphi}{dz^2} \right) + \xi\Lambda^{-3} \sin\varphi = 0,$$

з першим інтегралом

$$\frac{1}{r_e} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 + \xi\Lambda^{-3} \cos\varphi = C$$

і точним розв’язком

$$\varphi = 4 \arctan \exp \left(z \sqrt{r_e \xi \Lambda^{-3}} \right).$$

Підставивши розв’язок цього рівняння у вираз для локальної ентропії, отримаємо

$$S = 2\xi\Lambda^{-3}V \left\{ \frac{2E(p)}{p^2 K(p)} - \frac{1}{p^2} + 1 \right\} - \xi\Lambda^{-3}V,$$

де

$$p = \sqrt{\frac{2\xi\Lambda^{-3}}{C + \xi\Lambda^{-3}}}.$$

З умови нормування отримуємо точне значення локальної ентропії

$$S = S_B + 8 \left(N \frac{L}{r_e} \right)^{1/2}.$$

При цьому локальна ентропія взаємодійних частинок зростає з більшанням кількості частинок і розмірів системи. Можлива періодична структура може бути зумовлена просторовими граничними умовами. Період структури $l = L \left(\frac{L}{N r_e} \right)^{1/2}$ зростає із меншанням кількості частинок. Така система однорідна на макроскопічному масштабі, але розподіл частинок може бути просторово періодичним. У випадку двовимірної системи можна отримати точний розв’язок для однорідного розподілу частинок. Розглянемо кулоноподібний потенціал

$$\omega_{ij} = \frac{Q^2}{\langle r \rangle} \ln \varkappa r_{ij},$$

де r_{ij} – відстань між частинками, $\langle r \rangle$ – середня відстань між частинками. Цей модельний потенціал має таку саму форму, що й для взаємодії двох однорідно заряджених ліній в тривимірному просторі. Таким чином, рух реальних зарядів на двовимірній площині подібний до руху паралельних

ліній, орієнтованих перпендикулярно до площини двовимірної системи. У неперервній межі статистичну суму у цьому випадку можна записати в стандартній формі

$$Z_N = \int \exp[-\beta H(r, p)] d^N \mathbf{r} d^N \mathbf{p},$$

де гамільтоніана системи взято як

$$H(r, p) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij}.$$

У двовимірному випадку рівняння стану може бути отримане із співвідношення

$$P = kT \frac{\partial \ln Z_N}{\partial S},$$

де S – квадрат радіуса кола R . Ввівши безрозмірну змінну $r_i = r_i/S^{1/2}$ ми можемо переписати статистичну суму у вигляді

$$Z_N = S^N \int \exp[-\beta H(r, p)] d^N \mathbf{r}' d^N \mathbf{p}', r'_i = \frac{r_i}{S^{1/2}}.$$

Похідну статистичної суми за “об’ємом” у цьому випадку можна представити як

$$\frac{\partial Z_N}{\partial S} = \frac{NZ}{S} - \frac{S^N}{kT} \times \int \exp(-\beta H) \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{r_{ij}}{2S} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial r_{ij}} d^N \mathbf{r}' d^N \mathbf{p}'$$

або

$$\frac{\partial Z_N}{\partial S} = \frac{NZ}{S} - \frac{N(N-1)Z}{4SkT}.$$

Підставляючи цей результат у рівняння стану, отримуємо точний розв’язок для двовимірної кулонівської системи у вигляді

$$PS = NkT \left\{ 1 + \frac{(N-1)Q^2}{4kT \langle r \rangle} \right\}.$$

Якщо взяти до уваги, що середня відстань між частинками $\langle r \rangle$ пропорційна до $n^{-1/2}$, де n – поверхнева густина частинок, то можна показати, що у випадку великої густини система взаємодійних частинок стане нестійкою, і може виникнути неоднорідний розподіл частинок. Такі неоднорідні розподіли зумовлені далекосяжною природою кулонівської взаємодії. У випадку інтенсивної взаємодії

кулоноподібна система є нестабільною в цілому, тому мінімальне значення термодинамічного потенціалу досягається у випадку неоднорідного розподілу частинок.

Далі ми використовуємо запропонований підхід, щоб знайти стани, пов’язані з вігнерівськими кристалами. У двовимірному випадку ефективний термодинамічний потенціал може бути записаний як

$$S = \frac{V}{S} \int dx dy \left\{ \frac{1}{r_e} ((\nabla \varphi)^2 + \varkappa^2 \varphi^2) - \xi \Lambda^{-3} \cos \varphi \right\},$$

де $V/S = h$ – товщина двовимірного шару. У загальному випадку рівняння для сідлоточкових станів набуває вигляду

$$\frac{1}{r_e} \{ \Delta_2 \varphi - \varkappa^2 \varphi \} + \xi \Lambda^{-3} \sin \varphi = 0,$$

де Δ_2 – оператор Лапласа в двовимірному випадку. Таким чином отримуємо перший інтеграл у вигляді

$$\frac{1}{r_e} [(\nabla \varphi)^2 - \varkappa^2 \varphi^2] + \xi \Lambda^{-3} \cos \varphi = E,$$

де E – невідома константа інтегрування, яка повинна бути знайдена з умови існування розв’язку для поля. Хоча це рівняння не може бути розв’язане в загальному випадку, воно надає інструмент для вивчення багатьох взаємодійних кулонівських систем для різних зовнішніх умов. Хімічну активність можна отримати з умови нормування $V/S \int dx dy \xi \Lambda^{-3} \cos \varphi = N$. В термінах функції густини ρ перший інтеграл також можна записати як

$$S = \frac{V}{S} \int dx dy \left\{ E + 2 \frac{\varkappa^2}{r_e} \arccos^2 \left(\frac{\rho}{\xi \Lambda^{-3}} \right) - 2\rho \right\},$$

де значення інтеграла за координатним простором оцінюється в термінах усередненої концентрації.

З умови мінімальної ефективної локальної ентропії ми робимо висновок, що розв’язок існує, якщо $\xi \Lambda^{-3} = \rho_0$ і ефективна локальна ентропія набуває вигляду

$$S \simeq S_B + N \left\{ \frac{\pi^2 \varkappa^2}{4nr_e} - 1 \right\}.$$

Застосуємо далі запропонований вище підхід до описання стаціонарної системи порошків в слабоіонізованій плазмі. У цьому випадку ми знову використовуємо метод, що дає змогу визначити стани

з домінімним внеском у функцію розподілу, тобто наближення сідлової точки. У загальному випадку рівняння для сідлових точок має вигляд

$$\frac{1}{r_e} \{ \Delta \varphi - \varkappa^2 \varphi \} + \xi \Lambda^{-3} \sin \varphi = 0.$$

Проблема полягає в тому, що ми не знаємо тривимірний розв'язок рівняння синус-Гордона, що визначає змінну поля для умови нормування

$$\int dV \xi \Lambda^{-3} \cos \varphi = N.$$

Слід зазначити, що ця умова дає можливість ввести концентрацію частинок як $\rho(\mathbf{r}) = \xi \Lambda^{-3} \cos \varphi(\mathbf{r})$. З цього випливає, що перший інтеграл рівняння можна визначити як

$$\frac{1}{r_e} \{ (\nabla \varphi)^2 + \varkappa^2 \varphi^2 \} + \xi A \cos \varphi = E,$$

де E – невідома константа інтегрування. За аналогією з двовимірним випадком це рівняння не може бути розв'язане у явному вигляді.

Як і двовимірна кулонівська система у випадку інтенсивної взаємодії система стає нестабільною в цілому, тому мінімальне значення вільної енергії досягається у випадку неоднорідного розподілу частинок. Знайдемо стани, пов'язані з утворенням вігнерівських кристалів. Беручи до уваги, що густина розподілу є лише позитивною, і припускаючи, що вігнерівський кристал існує, візьмемо функцію періодичного розподілу густини у вигляді

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= \xi \Lambda^{-3} \cos \varphi(\mathbf{r}) = \\ &= \xi \Lambda^{-3} \{ 1 + \cos(k_x x) + \cos(k_y y) + \cos(k_z z) \}, \end{aligned} \quad (41)$$

що відповідає кубічній ґратці з хвильовим вектором $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Якщо припустити, що одна заряджена частинка присутня на кожному вузлі ґратки, а ґратка ізотропна $k_x = k_y = k_z = 2\pi n^{1/3}$, де $n = N/V$ – густина частинок, то з умови нормування знаходимо $\xi = \frac{N}{\Lambda^{-3} V}$. З першого інтеграла для змінної поля можна зробити висновок, що локальна ентропія має вигляд

$$S = S_B + N \left\{ \frac{\pi^2 \varkappa^2}{4nr_e} - 1 \right\}.$$

Ввівши параметр зв'язку $\Gamma_e = r_e n^{1/3}$, який є відношенням кулонівської взаємодії до кінетичної енергії, можна отримати співвідношення для критичного значення параметра зв'язку

$$\Gamma_e \geq 4\pi^2 \varkappa^2 n^{2/3} \equiv (2\pi \varkappa L)^2, \quad \Gamma_e \equiv r_e n^{1/3},$$

де L – період ґратки. За виконанням цієї умови можна очікувати формування кристалічної структури.

Саме такі структури спостерігаються у випадку запорошеної плазми. В ролі параметра структури використовуємо сталу ґратки L (відстань між частинками, нормована на ефективну довжину екранування). В результаті отримуємо

$$\Gamma_e \geq (2\pi l)^2, \quad l \equiv \varkappa L.$$

Це співвідношення дає значення того самого порядку, що й результат числового моделювання.

6. Самогравітвна система

Не менш цікавими є системи із суто притягувальною взаємодією. Прикладом для такої ситуації є поведінка самогравітвної системи. Розв'язок рівняння сідлової точки повністю визначає всі термодинамічні параметри для поля ψ , що описує загальну поведінку самогравітвної системи як для просторово однорідних, так і для неоднорідних розподілів частинок. В інших підходах залежність температури від просторової точки вводиться через політропну залежність температури від густини частинок у рівнянні стану [19]. У цьому підході така залежність впливає з необхідного термодинамічного стану і може бути знайдена для різних розподілів частинок.

Виведемо сідлове рівняння для граничних значень локальної термодинамічної функції $S(\psi, \xi, \beta)$:

$$Q_l = \int D\varphi D\psi d\xi \exp \{ S(\psi(\mathbf{r}), \xi(\mathbf{r})) \}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} S &= \int \left[\frac{1}{2r_\psi} \psi(\mathbf{r}) L_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^\psi \psi(\mathbf{r}') + \right. \\ &\left. + \xi(\mathbf{r}) \Lambda^{-3} \exp \sqrt{\beta(r)} \psi(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (43)$$

Рівняння для польової змінної $\delta S / \delta \psi = 0$ у випадку відсутності відштовхувальної взаємодії $\varphi = 0$

дає

$$\frac{1}{r_m} \Delta \psi(\mathbf{r}) + \xi(\mathbf{r}) \left(\frac{2\pi m}{\hbar^2 \beta(\mathbf{r})} \right)^{3/2} \times \exp(\sqrt{\beta(r)} \psi(\mathbf{r})) = 0, \quad (44)$$

де введено позначення $r_m \equiv 4\pi G m^2$ довжини гравітаційної взаємодії. Умову нормування можна записати як

$$\int \xi(\mathbf{r}) \left(\frac{2m}{\hbar^2 \beta(\mathbf{r})} \right)^{3/2} \exp(\sqrt{\beta(r)} \psi(\mathbf{r})) d\mathbf{r} = N \quad (45)$$

і рівняння для збереження енергії в системі має вигляд

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{2\pi m}{\hbar^2 \beta(\mathbf{r})} \right)^{3/2} \frac{\xi(\mathbf{r})}{\beta(\mathbf{r})} \left[3 - \sqrt{\beta(r)} \psi(\mathbf{r}) \right] \times \exp(\sqrt{\beta(r)} \psi(\mathbf{r})) d\mathbf{r} = E. \quad (46)$$

Щоб отримати більше інформації про поведінку самогравітаційної системи, ми вводимо нові змінні. Збереження кількості частинок $\int \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = N$ дає визначення функції густин, тобто

$$\rho(\mathbf{r}) \equiv \left(\frac{2\pi m}{\hbar^2 \beta(\mathbf{r})} \right)^{3/2} \xi(\mathbf{r}) \exp(\sqrt{\beta(r)} \psi(\mathbf{r})), \quad (47)$$

що зводить отримане раніше рівняння до простішої форми. При цьому рівняння для змінної поля задаємо у вигляді

$$\Delta \psi(\mathbf{r}) + r_m \sqrt{\beta(\mathbf{r})} \rho(\mathbf{r}) = 0. \quad (48)$$

У випадку сталої температури і хімічної активності це рівняння перетворюється на рівняння для гравітаційного потенціалу $\psi = \sqrt{\beta(\mathbf{r})} \psi$ добре відомого вигляду

$$\Delta \psi(\mathbf{r}) = -4\pi G m^2 \beta \rho(\mathbf{r}). \quad (49)$$

Рівняння для збереження енергії набуває форми

$$\frac{1}{2} \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{\beta(\mathbf{r})} \left[3 - \sqrt{\beta(r)} \psi(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{r} = E. \quad (50)$$

Отримані таким чином рівняння не можна розв'язати в загальному випадку, але можна проаналізувати ряд випадків поведінки самогравітаційної системи в різних зовнішніх умовах. Хімічну активність перепишемо в термінах хімічного потенціалу $\xi(\mathbf{r}) = \exp(\mu(\mathbf{r})\beta(\mathbf{r}))$. Диференціюючи рівняння

(50) за об'ємом, отримуємо співвідношення для хімічного потенціалу

$$\frac{1}{2} \frac{\rho(\mathbf{r})}{\beta(\mathbf{r})} \left[3 - \sqrt{\beta(r)} \psi(\mathbf{r}) \right] = \frac{\delta E}{\delta V} = \frac{\delta E}{\delta N} \frac{\delta N}{\delta V} = \mu(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}), \quad (51)$$

що дає

$$\mu(\mathbf{r}) \beta(\mathbf{r}) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\beta(r)} \psi(\mathbf{r}). \quad (52)$$

В термінах визначення зменшеної термічної довжини хвилі де Бройля і довжини тяжіння

$$\Lambda(\mathbf{r}) = \left(\frac{\hbar^2 \beta(\mathbf{r})}{2me} \right)^{1/2}, \quad R_g(\mathbf{r}) = 2\pi G m^2 \beta(\mathbf{r}), \quad (53)$$

ми можемо переписати всі рівняння і умови нормування в термінах густини і температури

$$\Delta \left(\frac{\ln(\Lambda^3(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}))}{\sqrt{\beta(\mathbf{r})}} \right) + \frac{R_g(\mathbf{r})}{\sqrt{\beta(\mathbf{r})}} \rho(\mathbf{r}) = 0. \quad (54)$$

Хімічний потенціал зводиться до

$$\mu(\mathbf{r}) \beta(\mathbf{r}) = \frac{3}{2} - \ln(\Lambda^3(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r})). \quad (55)$$

Таким чином можна отримати рівняння стану для самогравітаційної системи, якщо використовувати термодинамічне співвідношення для збереження енергії E ,

$$P = -\frac{1}{\beta} \frac{\delta S}{\delta V}. \quad (56)$$

З визначення густини частинок випливає

$$S = \int [-\rho(\mathbf{r}) \ln(\Lambda^3(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) - \rho(\mathbf{r}))] d\mathbf{r}, \quad (57)$$

звідки локальне рівняння стану можна записати як

$$P(\mathbf{r}) \beta(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) (1 - \ln(\Lambda^3(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}))) = \rho(\mathbf{r}) \left(\mu(\mathbf{r}) \beta(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \right). \quad (58)$$

У класичному випадку $\Lambda^3(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \ll 1$ і $P\beta \equiv \rho$. При $\Lambda^3(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) = 1$ отримуємо рівняння стану ідеального газу.

7. Розподіл частинок і температури в самогравітаційній системі

7.1. Однорідний розподіл частинок

Перш за все розглянемо ситуацію рівноваги, коли параметри не залежать від координат простору. У цьому випадку енергія і загальна кількість частинок фіксуються, і, крім того, температура і хімічний потенціал не змінюються в просторі. При цьому рівняння для розподілу частинок

$$\Delta\psi(\mathbf{r}) + r_m \sqrt{\beta(\mathbf{r})} \rho(\mathbf{r}) = 0 \quad (59)$$

приводить до простого стану $\sqrt{\beta}\rho = 0$, що може бути реалізовано тільки для $T \rightarrow \infty$. Розподіл частинок в самогравітаційній системі може бути однорідним тільки при дуже високих температурах.

Інший цікавий випадок, коли тільки густина частинок залежить від координати, поки температура фіксується. У цьому випадку рівняння для густини набуває вигляду

$$\Delta(\ln \Lambda^3 \rho(\mathbf{r})) + R_g \rho(\mathbf{r}) = 0 \quad (60)$$

і може бути перетворене в

$$\Delta(\ln \rho(\mathbf{r})) + R_g \rho(\mathbf{r}) = 0. \quad (61)$$

Останнє рівняння має точний розв'язок $\rho(\mathbf{r}) = 2/R_g r^2$, але умова нормування виконується тільки для випадку фіксованого об'єму з розміром $R = (NGm^2)/(4kT)$, а фіксована енергія $E = NkT$, і зміна хімічного потенціалу в обмеженому об'ємі задається як

$$\mu = kT \left(\frac{3}{2} - \frac{2\Lambda^3}{4kTR_g r^2} \right).$$

Якщо ввести нову змінну функцію $f(\mathbf{r}) = \ln \rho(\mathbf{r})$, то рівняння (61) може перетворитися у рівняння Лейна–Емдена (Lane–Emden) у вигляді [10, 19]:

$$\Delta f(\mathbf{r}) + R_g \exp f(\mathbf{r}) = 0, \quad (62)$$

що дає точний розв'язок для густини частинок тільки в одновимірному випадку [10, 45, 49]:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\cosh^2(r/R_g)}.$$

Це рівняння не узгоджується з результатами молекулярно-динамічного моделювання [49] та не

описує загального просторово неоднорідного розподілу частинок в самогравітаційних системах [10]. Як впливає з рівняння для сталої температури, однорідний розподіл частинок є нестійким, а рівняння для збурень густини $\rho(\mathbf{r}) = \rho + \delta\rho(\mathbf{r})$ має вигляд

$$\Delta\delta\rho(\mathbf{r}) + R_g \rho \delta\rho(\mathbf{r}) = 0, \quad (63)$$

який відтворює рівняння Гельмгольца. Загальним розв'язком хвильового рівняння є нестабільний радіальний розподіл $\delta\rho(\mathbf{r}) = (\exp ikr)/r$ з хвильовим числом $k = \sqrt{2\pi Gm^2 \beta \rho}$. Це означає, що довжина хвилі нестабільності вдвічі менша від довжини Джинса. Це – статистична довжина нестабільності розподілу частинок в системі. Поняття гравітаційної нестабільності Джинса обговорюється в рамках рівноважної статистики та пов'язаної з нею кінетичної теорії [31].

7.2. Неоднорідні розподіли частинок і температури

Тепер розглянемо нерівноважний опис самогравітаційної системи і врахуємо ймовірний просторово неоднорідний розподіл частинок і температури. Введемо нову змінну $\phi = \Lambda^3(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})$, спростимо рівняння для густини і одержимо

$$\Delta \left(\frac{\ln \phi}{\sqrt{\beta(\mathbf{r})}} \right) + \frac{R_g(\mathbf{r})}{\sqrt{\beta(\mathbf{r})} \Lambda^3(\mathbf{r})} \phi = 0. \quad (64)$$

Загалом, точні розв'язки цього нелінійного рівняння невідомі. Ми пропонуємо спосіб аналізування цього рівняння.

Перш за все ми можемо знайти загальніший розв'язок задачі. У тривимірному випадку дію оператора Лапласа можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{\ln \phi}{\sqrt{\beta(\mathbf{r})}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \ln \phi - \\ &- \frac{\ln \phi}{\sqrt{\beta^3}} \left(\frac{d^2 \beta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\beta}{dr} - \frac{3}{2\beta} \left(\frac{d\beta}{dr} \right)^2 \right) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{\beta^3}} \frac{d \ln \phi}{dr} \frac{d\beta}{dr}. \end{aligned} \quad (65)$$

Розв'язок для температури можна шукати у вигляді $\beta = \gamma^3 r^n$, тоді при $n = 2$ ми отримуємо рівняння лише для ϕ

$$\frac{d^2 \ln \phi}{dr^2} + \frac{a_m}{B\gamma r} \phi = 0, \quad (66)$$

які можна переписати в термінах нової змінної $\bar{r}^2 = r$

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{d\bar{r}} \right) + \frac{4a_m}{B\gamma} \phi = 0. \quad (67)$$

Ми помножимо це рівняння на $(1/\phi)(d\phi/d\bar{r})$ і обчислимо перший інтеграл рівняння

$$\left(\frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{d\bar{r}} \right)^2 + \frac{4a_m}{B\gamma} \phi = \Delta, \quad (68)$$

а точний розв'язок запишемо так

$$\phi = \frac{\Delta}{8a_m/B\gamma \sinh^2 \sqrt{\Delta r/4}}. \quad (69)$$

Використовуючи останню формулу, знаходимо точний розв'язок для неоднорідного розподілу частинок

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\Delta}{8a_m\gamma^2 r^3 \sinh^2 \sqrt{\Delta r/4}}. \quad (70)$$

Така поведінка корелює з результатами, отриманими в статтях [47, 48], де використано рівняння Больцмана і функцію розподілу для сферичної ізольованої зоряної системи. Розподіл частинок неоднорідний для розміру $R = 1/4\Delta$ і розбігається при $r \rightarrow 0$ до $\rho(\mathbf{r}) = 1/2a_m\gamma^2 r^4$. При цьому енергія системи зберігається. Однак, ми все ще не знаємо коефіцієнтів. Для розв'язання цієї проблеми пропонується підхід, наведений нижче. Якщо частинки концентруються на малих відстанях, і їхня концентрація дуже висока, то квантовий ефект стає вирішальним, і класичний підхід неприйнятний. Зв'язок між критичною температурою і концентрацією частинок у такому випадку визначається природним чином

$$\Lambda^3(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) = \left(\frac{\hbar^2 \beta_c}{2me} \right)^{3/2} \rho_c = 1. \quad (71)$$

Це співвідношення, разом з формулою для збереження числа частинок, $4\pi/2a_m R_c = N$, визначають всі необхідні параметри, тобто критичну відстань $R_c = \hbar^2/ma_m N^{1/3}$, коефіцієнт $\gamma^2 = (2\pi me)/(\hbar^2 N^{2/3})$, критичну температуру $\beta_c = \gamma^2 R_c^2$ і густину $\rho_c = 1/2a_m R_c^4$. Енергія системи в даному випадку $E = 3/2NkT$, тобто дорівнює енергії вільних частинок!

Опишемо систему з $\Lambda^3(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) = \alpha = \text{const} \ll 1$. У цьому випадку можна визначити тільки поведінку температури, яка регулюється рівнянням

$$\Delta \left(\frac{1}{\sqrt{\beta(\mathbf{r})}} \right) + \frac{a_m e^\alpha}{B \ln \alpha} \frac{1}{\beta} = 0. \quad (72)$$

Аналогічно із попереднім випадком ми запишемо розв'язок цього рівняння у формі $\beta = \gamma^{-2} r^{-2n}$, і, таким чином, виявимо, що воно виконується для $n = -2$, тобто температура змінюється так, як $kT = \gamma^2 r^{-4}$, а концентрація змінюється як $\rho = Ar^{-6}$. При цьому задовольняються умови нормування для збереження кількості частинок і енергії.

Таким чином, ми маємо розв'язок, що описує просторову залежність концентрації і температури.

8. Стаціонарні стани нерівноважних систем

Будь-яка макроскопічна система, перебуваючи в термостаті, наближається до рівноваги протягом деякого часу релаксації. У стані рівноваги властивості системи не залежать від способу встановлення рівноваги. Стан рівноваги, однак, реалізується тільки при певних ідеалізованих умовах, тому насправді властивості системи в квазістаціонарному (стаціонарному) стані можуть залежати як від специфіки взаємодії системи з термостатом, так і від характеристик системи [21–55]. Те саме стосується нерівноважних систем, які проте можуть демонструвати рівноважну поведінку. За певних умов може існувати рівноважний стан системи як стаціонарний стан, при якому енергетичний обмін між системою і середовищем є збалансованим. Такий стан системи є результатом балансу між прямим впливом навколишнього середовища на систему та процесом дисипації енергії, викликаним взаємодією з навколишнім середовищем. Неважко уявити собі макроскопічну систему, яка може отримати енергію з навколишнього середовища, але не може повернути її всю назад, що залежить від особливості системи. Прикладами таких систем є: гарячі електрони в напівпровідниковій системі [3]; система фотонів, що дифрагують завдяки розсіянню на неоднорідностях, причому коефіцієнт дифракції залежить від частоти цих фотонів [51, 55]; система частинок з

великою енергією, які можуть народитися в процесі зіткнення в прискорювачі; система звичайних броунівських частинок з коефіцієнтом тертя, що залежить від швидкості. Всі перераховані системи далекі від теплової рівноваги, а їхній новий стан повністю визначається процесами енергообміну. Характеристикою цієї системи може бути функція розподілу таких станів, яка відрізняється від рівноважної функції розподілу, зокрема як і добре відома функція розподілу теплових станів. Не існує чіткого визначення функції розподілу нерівноважної системи, які враховують можливі стани макроскопічної системи [3]. Стандартний метод дає змогу розглядати нерівноважні стани як рівноважний тепловий стан при малих відхиленнях від цього стану. Нерівноважність у цьому підході проявляється у вигляді невеликих модифікацій функції рівноважного розподілу. Відкрита система може існувати дуже далеко від рівноваги, але проте виявляє стаціонарну поведінку. У цій частині огляду ми розглянули проблему описання нерівноважної системи та дамо одне з можливих визначень нового стаціонарного стану з урахуванням поглинання енергії та процесів розсіяння, викликаних взаємодією з навколишнім середовищем. Почнемо з формулювання статистичного підходу.

Функція канонічного розподілу у фазовому просторі у випадку рівноваги може бути записана у вигляді

$$\rho(q, p)d\Gamma = \exp\left\{\frac{F - H(q, p)}{\Theta}\right\} d\Gamma, \quad (73)$$

де $H(q, p)$ – гамільтоніан, $d\Gamma = \prod_i dq_i dp_i$ – елемент фазового простору, $\Theta = kT$, T – температура, F – вільна енергія, яка може бути знайдена з умови нормування

$$\int \exp\left\{\frac{F - H(q, p)}{\Theta}\right\} d\Gamma = 1.$$

Як показано в [53], фазовий простір залежить тільки від енергії системи E та зовнішніх параметрів. Введемо додаткову функцію

$$\Sigma = \ln \frac{d\Gamma}{dE},$$

тоді функція канонічного розподілу має вигляд

$$\rho(E)dE = C \exp\left\{\frac{F - E}{\Theta} + \Sigma(E)\right\} dE. \quad (74)$$

Останнє співвідношення описує залежність функції розподілу від енергії макроскопічної системи [53]. Умову нормування в даному представленні можна записати у формі

$$\int c \exp\left\{\frac{F - E}{\Theta} + \Sigma(E)\right\} dE = 1, \quad (75)$$

що дає змогу знайти константу нормування, яка враховує детермінантне перетворення між фазовим простором і змінною енергії. Для того, щоб виділити стани, які дають домінуючий внесок у функцію розподілу, ми використовуємо умову $d\Sigma/dE = 1/\Theta$, що визначає температуру системи як умову залежності фазового простору як функції лише енергії системи. Використовуючи це визначення і враховуючи основні принципи статистичної механіки [54], ми приходимо до висновку, що $\Sigma = \ln d\Gamma/dE = S$ дорівнює ентропії системи. Слід зауважити, що температура описує залежність ентропії тільки від енергії, а не від інших термодинамічних величин. Іншим важливим висновком є те, що ми можемо розрахувати статистичну суму шляхом інтегрування за енергією. Екстремум функції розподілу реалізується за умови $F = E - \theta S$, і будь-яке ймовірне відхилення від цієї умови дає дуже малий внесок у макроскопічні характеристики подібно до квантового внеску в класичні траєкторії. Це дає змогу розглядати нерівноважні системи як броунівські системи в енергетичному просторі [24]. Виходячи з рівняння Чекмена–Колмогорова для функції розподілу макроскопічної системи в енергетичному просторі, можна отримати стаціонарні стани і флуктуаційні дисипаційні співвідношення для нерівноважних систем [24].

Енергія, як параметр контролю нерівноважної системи, може бути “повільним” параметром, що визначає стан системи. За відсутності будь-яких інших знань про нерівноважну систему, немає підстав на користь будь-якого стану системи, що визначається енергією. Функцію нерівноважного розподілу $\rho(E, t)$, як і у випадку рівноваги, можна визначити як функцію енергії E та часу. В загальному випадку її можна отримати з базисного кінетичного рівняння. У термінах енергії основним кінетичним рівнянням для функції нерівноважного розподілу можна взяти

$$\frac{\partial \rho(E, t)}{\partial t} = \int \{W(E, E')\rho(E', t) -$$

$$-W(E', E)\rho(E, t) \} dE', \quad (76)$$

де $W(E|E')$ – ймовірність переходу між станами з різною енергією системи. Це основне кінетичне рівняння представляє рівняння балансу для ймовірності станів. Енергетичне представлення нерівноважного процесу справедливе лише в тому випадку, коли ця змінна є канонічною і здійснює усереднення за фазою як спряженого значення. Всі розв’язки основного кінетичного рівняння для $t \rightarrow \infty$ мають фундаментальні властивості – зводяться до стаціонарного розв’язку, який можна інтерпретувати як “рівноважний” стан для цієї системи. Цей стаціонарний розв’язок відповідає закону зростання ентропії [58]. У спеціальному випадку малих змін енергії системи базове кінематичне рівняння перетворюється в рівняння Фоккера–Планка

$$\frac{\partial \rho(E, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial E} A(E)\rho(E, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} D(E)\rho(E, t). \quad (77)$$

Фізичний сенс коефіцієнтів $A(E)$ та $D(E)$ можна уточнити, якщо повернутися до динамічного рівняння для енергії. У загальному випадку рівняння дисипації можна записати в стандартній формі рівняння Ланжевена

$$\frac{dE}{dt} = f(E) + g(E)L(t). \quad (78)$$

Це рівняння дисипації залежить від зовнішнього впливу і початкових умов. Зовнішній вплив проявляється насамперед в зміні енергії системи, яка розсіюється або поглинається. Цей процес враховується першим доданком у правій частині цього рівняння, що описує безпосередній вплив середовища на макроскопічну систему. Цю частину можна отримати з динаміки будь-якої макроскопічної системи, якщо врахувати безпосередню взаємодію цієї системи із середовищем. Енергія системи, що змінюється внаслідок випадкового впливу навколишнього середовища, враховується другою частиною рівняння. Випадкова міграція системи є результатом взаємодії цієї системи з оточенням, вплив якого випадковим чином змінює енергію системи. Будемо вважати, що кореляція між двома значеннями флуктуації у двох різних моментах часу $\langle L(t)L(t') \rangle = \phi(t - t')$ може бути ненульовою

тільки впродовж інтервалу, який має певний час дії. Символ $\langle \dots \rangle$ означає статистичне усереднення відповідної величини. Функція $\phi(t - t')$ повинна мати різкий пік в околі нуля і задовольняти умову $\int \phi(\tau) d\tau = \sigma^2$ для білого шуму [58]. Система, яка не може відновити рівновагу після швидких змін навколишнього середовища, має підлаштуватися до нових умов. Цей процес свідчить про можливість дисипацію енергії системи при контакті з навколишнім середовищем.

Енергетичне представлення загального рівняння дисипації має місце і у випадку звичайної броунівської частинки. Динаміку броунівських частинок можна описати в терміні швидкості v за рівнянням Ланжевена

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + F(t), \quad (79)$$

де γ – коефіцієнт тертя і $F(t)$ – випадкова сила, яка описує дію на частинку в рідині. При цьому $\langle F(t) \rangle = 0$ і $\langle F(t)F(t') \rangle = \phi^2 \delta(t - t')$, які задовольняють умову білого шуму і описують некорельований процес руху частинки. Для броунівської частинки енергія $E = Mv^2/2$, а отже можна визначити енергію, що змінюється як

$$\frac{dE}{dt} = Mv \frac{dv}{dt} = -2\gamma E + \sqrt{2ME}F(t), \quad (80)$$

що відповідає рівнянню (78) з $f(E) = -2\gamma E$, $g(E) = \sqrt{E}$ та $L(t) = \sqrt{2MF}(t)$. За допомогою розв’язку рівняння Ланжевена для швидкості можна отримати [58] $\langle v(\infty) \rangle = \phi^2/2\gamma = kT/M$, а також $\langle E \rangle = kT/2$, де вводиться температура T термостата. З розв’язку рівняння (80) в наближенні, яке не враховував енергію кореляції, можна отримати також

$$\sqrt{\langle E \rangle^2} = \frac{\sigma^2}{4\gamma} \equiv \frac{\phi^2}{4\gamma} 2M = kT,$$

що як і в попередньому результаті повністю відповідає за рівноважний стан. Опис процесу в термінах різних змінних є еквівалентним, але енергетичне представлення має ту перевагу, що дає можливість визначити “рівноважні” стани нерівноважної системи. Цей підхід є ефективним у тих випадках, для яких можна визначити прямий вплив взаємодії з навколишнім середовищем та дію випадкових сил, ще й тому, що енергія є найповільнішою змінною, від якої залежить релаксація в системах. Для

аналізування випадкових процесів було запропоновано два різних підходи. Якщо вважати, що коефіцієнт $g(E)$ залежно від енергії в початковий момент часу, рівняння нерівноважної функції розподілу породжує рівняння Фоккера-Планка у формі (77). Якщо ж цей коефіцієнт залежить від енергії до і після переходу, то дифузійне рівняння можна записати у формі Стратоновича:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial E} (f(E)\rho) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial E} g(E) \frac{\partial}{\partial E} g(E)\rho. \quad (81)$$

Далі будемо використовувати останнє представлення Стратоновича, оскільки обидва представлення пов'язані між собою [58, 59]. Рівняння (81) можна записати у вигляді рівняння неперервності:

$$\frac{\partial \rho(E, t)}{\partial t} = \frac{\partial J(\rho(E, t))}{\partial E}, \quad (82)$$

де

$$J = -\left[f(E) - \frac{\sigma^2}{2} g(E) \frac{\partial}{\partial E} g(E) \right] \rho + \frac{\sigma^2}{2} g^2(E) \frac{\partial}{\partial E} \rho. \quad (83)$$

З порівняння (77) і (83) знаходимо

$$A(E) = f(E) - \frac{\sigma^2}{2} g(E) \frac{\partial}{\partial E} g(E),$$

а коефіцієнт дифузії

$$D(E) = \frac{\sigma^2}{2} g^2(E).$$

Стаціонарний розв'язок рівняння Фоккера-Планка для $J(\rho(E, t)) = 0$ можна представити у вигляді

$$\rho_s(E) = A \exp \left\{ \int_{E_0}^E \frac{2f(E')dE'}{\sigma^2 g^2(E')} - \ln \frac{g(E)}{g(E_0)} \right\} \quad (84)$$

або

$$\rho_s(E) = A \exp \{-U(E)\}, \quad (85)$$

де

$$U(E) = \ln \frac{g(E)}{g(E_0)} - \int_{E_0}^E \frac{2f(E')dE'}{\sigma^2 g^2(E')}. \quad (86)$$

Ця функція розподілу має екстремальну величину за енергією, яку можна знайти як розв'язок рівняння

$$U'(\tilde{E}) = \frac{1}{D(\tilde{E})} [D'(\tilde{E}) - f(\tilde{E})], \quad (87)$$

де штрих ' означає похідну енергії. Це рівняння еквівалентне рівнянню

$$D'(\tilde{E}) = f(\tilde{E}), \quad (88)$$

яке встановлює співвідношення між дисипацією (розсіюванням) і дифузією в стаціонарному випадку і повністю визначає новий "рівноважний" стан системи. Стаціонарну нерівноважну функцію розподілу можна задати як

$$\rho_s(E) = \exp \{-U(\tilde{E})\} \exp \{-U''(\tilde{E})E^2\}, \quad (89)$$

де

$$-U''(\tilde{E}) = \frac{1}{D(\tilde{E})} [D''(\tilde{E}) - f'(\tilde{E})].$$

Якщо врахувати попереднє співвідношення (88), то отримаємо $\rho_s(E) = \exp\{-U(\tilde{E})\}$. В загальному випадку $f(E)$ є нелінійною функцією стану, а коефіцієнт дифузії залежить від енергії, що відкриває можливість виявити багато цікавих ситуацій, у тому числі і індуковані шумом переходу в нові, стабільніші, "рівноважні" стани.

Якщо $g(E) = 1$, то стаціонарний розв'язок можна записати у вигляді

$$\rho(E) = A \exp \left\{ \int_{E_0}^E \frac{f(E')}{\sigma^2} dE' \right\}, \quad (90)$$

де E_0 – внутрішня енергія системи. У випадку консервативної системи для $f(E) = 0$ стаціонарний розв'язок не залежить від енергії. Звернімо увагу, що $E = E_0$ є не тільки внутрішньою межею, а й стаціонарною точкою за відсутності енергії дисипації та випадкової дифузії.

У випадку, коли присутня лише дифузія енергії при $g(E) = 1$, рівняння для функції нерівноважного розподілу набувають вигляду простого рівняння дифузії, і розв'язки

$$\rho(E) = A \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2 t}} \exp \left\{ -\frac{(E - E_0)^2}{4\sigma^2 t} \right\}$$

описують міграцію системи за енергією. Середнє квадратичне відхилення енергії збільшується в часі відповідно до закону $\langle (E - E_0)^2 \rangle = 2\sigma^2 t$. Цей розв'язок представляє еволюцію системи, яка в початковому стані описується функцією рівноважного розподілу $\rho(E) = \delta(E - E_0)$.

Якщо коефіцієнт дифузії залежить від енергії, і має місце закон збереження енергії $f(E) = 0$, то стаціонарний розв'язок набуває вигляду

$$\rho_s(E) = A \exp \left\{ -\ln \frac{g(E)}{g(E_0)} \right\}, \quad (91)$$

що відповідає канонічній функції розподілу рівноваги

$$\rho(E) = A \exp \{-\beta(E - E_0)\} \quad (92)$$

тільки за умови $g(E) = e^{\beta E}$, де β – обернена температура середовища. Це можливо при

$$D(E) = \frac{\sigma^2}{2} g^2(E) = \frac{\sigma^2}{2} e^{2\beta E}.$$

Описання в енергетичному просторі може бути ілюстративнішим, якщо описати рівноважні стани звичайним способом. Як приклад для звичайної броунівської частинки стаціонарний розв'язок можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \rho_s(E) &= A \exp \left\{ -\frac{4\gamma}{\sigma^2} E - \ln \sqrt{E} \right\} \equiv \\ &\equiv A \frac{1}{\sqrt{E}} \exp\{-\beta E\}, \end{aligned} \quad (93)$$

де використано добре відоме співвідношення $2\gamma/\sigma^2 = \beta$. Враховуючи нормування $\int \rho_s(E) dE \equiv \int \rho_s(p) dp$, можна отримати функцію розподілу в імпульсному просторі у вигляді

$$\rho_s(p) = A \exp \left\{ -\beta \frac{p^2}{2M} \right\} = A \exp \left\{ -\frac{Mv^2}{2kT} \right\}. \quad (94)$$

Якщо функцію дисипації представити у формі $f(E) = \alpha_t e^{\beta E}$, то рівняння Ланжевена можна переписати в іншій формі

$$\frac{d e^{-\beta E(t)}}{dt} = -\beta \alpha_t, \quad (95)$$

де $\alpha_t = \alpha + \xi_t$ має постійну частину і частину ξ_t , яка описує вплив білого шуму навколишнього середовища [59]. Рівняння Фоккера–Планка для функції нерівноважного розподілу можна представити у новій змінній $z = e^{-\beta E}$ в іншій простішій формі:

$$\frac{\partial \rho(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} [\alpha \beta \rho(z, t)] + \frac{\sigma^2 \beta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \rho(z, t). \quad (96)$$

Стаціонарний розв'язок набуває вигляду

$$\rho_s(z) = \exp \left\{ \frac{2\alpha}{\sigma^2 \beta} z \right\},$$

який у випадку $\beta E > 1$ можна представити як

$$\rho_s(E) = \exp \{-\beta E\} \quad \text{при} \quad \frac{2\alpha}{\sigma^2 \beta} = 1.$$

У випадку білого шуму рівняння Фоккера–Планка можна також записати у вигляді [59]

$$\frac{\partial \rho(E, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial E} (\gamma E \rho(E, t)) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} E^2 \rho(E, t). \quad (97)$$

Стаціонарним розв'язком цього рівняння є [59]

$$\rho_s(E, t) = N E^{-\frac{1}{2}(\frac{2\gamma}{\sigma^2} + 1)}, \quad (98)$$

який можна перевірити шляхом підстановки. Цей стаціонарний розв'язок збігається з розв'язком в стандартному випадку, коли коефіцієнт дифузії і тертя не залежать від енергії. Аналогічний результат

$$\rho_s(v, t) = N v^{-(\frac{2\gamma}{\sigma^2} + 1)}$$

можна також отримати в швидкісному представленні.

Можна уявити ситуацію, коли енергія системи зростає, але існує механізм, який обмежує енергію. Для процесу, який можна описати в термінах функції дисипації $f(E) = \gamma E - E^2$, друга частина враховує таке обмеження. Рівняння Фоккера–Планка при цьому має вигляд [59]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(E, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial E} [(\gamma E - E^2) \rho(E, t)] + \\ &+ \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} E^2 \rho(E, t) \end{aligned} \quad (99)$$

зі стаціонарним розв'язком

$$\rho_s(E, t) = N E^{-(\frac{2\gamma}{\sigma^2} + 1)} \exp \left\{ -\frac{2}{\sigma^2} E \right\}. \quad (100)$$

9. Статистичне описання еволюції Всесвіту

Запропонований статистичний підхід дає змогу зробити спробу описати народження і еволюцію

Всесвіту, виходячи з загальних принципів статистичної механіки і квантової теорії. Для цього ми пропонуємо такі припущення:

i) Всесвіт є а ргіогі нерівноважним, але можна припустити, що стан підсистеми, яка є складовою великої системи, описується локальним розподілом Гібса, який еволюціонує в такий спосіб, щоб забезпечити мінімальну енергію та максимальну ентропію вибраної підсистеми.

ii) В разі спонтанної генерації у вакуумі скалярного поля, енергія основного стану “нового” вакууму (тобто вакууму системи початковий вакуум плюс скалярне поле) для полів іншої природи має бути нижчою за енергію основного стану “початкового” вакууму, а самоузгоджена взаємодія скалярного поля з флуктуаціями будь-якого іншого поля забезпечує збереження енергії нового стану системи. Розрахунок статистичної суми для такої системи вказує на можливість в ній фазового переходу від стану з нульовим скалярним полем до стану зі скінченним спонтанно згенерованим скалярним полем, що приводить до появи реальних частинок за рахунок спонтанного порушення симетрії і може бути інтерпретований як Великий Вибух.

iii) Всесвіт взаємодіє з флуктуаційним вакуумом, а енергія Всесвіту не є фіксованою (термостатом для Всесвіту виступає вакуум, в якому існують флуктуації всіх можливих полів і які взаємодіють зі Всесвітом). Передусім, будемо вважати, що основний стан вакууму має енергію E_0 . При цьому ми припускаємо можливість існування флуктуацій всіх полів, які можуть бути згенеровані в цьому вакуумі. За такого припущення можна записати рівняння стану вакууму. З термодинамічних співвідношень можна визначити тиск

$$P = - \frac{dE_0}{dV} = -\rho_v, \quad (101)$$

де V є об’єм за сталої ентропії. Для чистого вакууму можна записати

$$E_0 = \rho_v V.$$

При цьому ми припускаємо адитивність енергії з густиною ρ_v . Рівняння (101) і є відомим рівнянням стану для вакууму.

Оскільки Всесвіт від свого народження є нерівноважним, то з метою описання його еволюції варто ввести додаткову величину “час” як внутрішній

параметр, що дає змогу записати

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\Theta} \frac{dE}{dt}, \quad (102)$$

звідки випливає, що зміни в часі ентропії пов’язані зі зміною в часі енергії. Оскільки $dS/dt > 0$, то за умови релаксації до стану рівноваги $dE/dt > 0$, тобто ентропія зростає зі зростанням енергії. В термодинаміці тепло є енергією, розподіленою між ступенями вільності, які не є макроскопічними спостережуваними. Тому при зміні стану вакууму будемо вважати, що $dQ/dt = dE/dt > 0$, а отже нагрівання можливе лише при релаксації до стану рівноваги. Наведені вище міркування і співвідношення є добре відомими. Спробуємо скористатися ними для того, щоб запропонувати ще одне з можливих пояснень еволюції Всесвіту. Як вже зазначалося вище, в стандартних космологічних моделях основною причиною формування стану Всесвіту, наслідком якого стався Великий Вибух, є нестійкість фундаментального скалярного поля. Отже, для початку зробимо припущення, що в “початковому” вакуумі внаслідок фазового переходу до нового стану вакууму виникло ненульове скалярне поле. Це означає, що після його появи вакуум для будь-якого поля, яке тільки може існувати, різниться від “первинного” вакууму, оскільки в “новому” вакуумі вже присутнє скалярне поле. Скалярне поле понижує енергію “нового” вакууму по відношенню до енергії “первинного” вакууму, тобто енергія основного стану “нового” вакууму набуває вигляду

$$E = E_0 - \frac{\mu^2}{2} \varphi^2, \quad (103)$$

де другий доданок являє собою енергію скалярного поля, а коефіцієнт μ^2 описує зв’язок нового поля з “первинним” вакуумом, тобто самоузгоджену взаємодію нового поля з флуктуаціями всіх інших полів, які можуть існувати в “первинному” вакуумі. Слід зробити два зауваження. Перше зауваження стосується того, що поява скалярного поля понижує енергію початкового стану вакууму, а друге стосується коефіцієнта зв’язку μ^2 , який тепер за визначенням є додатним, а відтак це не потребує пояснень, які зазвичай наводять у стандартному підході. Внесок такої взаємодії в статистичну суму розподілу Гібса ми можемо описати стандартним

чином:

$$Z \sim \int D\varphi \int D\xi \times \exp \frac{1}{\Theta} \left\{ -E_0 + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \xi\varphi^2 - \frac{\xi^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (104)$$

де ми скористалися представленням $\mu^2 = \mu^2 + \xi$, припустивши, що коефіцієнт зв'язку складається з його середнього значення та флуктуації, зумовленою нелінійною взаємодією поля φ з флуктуаціями полів іншої природи. Ми припустили також, що середньоквадратичне значення флуктуації ξ дорівнює σ^2 . Виконаємо далі інтегрування за полями ξ , що дає

$$Z \sim \int D\varphi \exp \frac{1}{\Theta} \left\{ -E_0 + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + -\frac{\sigma^2\varphi^4}{4} \right\}. \quad (105)$$

Це означає, що ми маємо систему з ефективною (усередненою за флуктуаціями іншого поля, з яким взаємодіє скалярне поле) енергією

$$E = E_0 + V(\varphi) = E_0 - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{\sigma^2\varphi^4}{4}, \quad (106)$$

де

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}\langle\mu^2\rangle\varphi^2 + \frac{\sigma^2\varphi^4}{4}$$

є добре відомим виразом для енергії фундаментального скалярного поля. Повна ефективна енергія “нового” вакууму з фундаментальним скалярним полем може бути записана у вигляді

$$E = E_0 - \frac{\langle\mu^2\rangle^2}{4\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{4} \left(\varphi^2 - \frac{\langle\mu^2\rangle}{\sigma^2} \right)^2. \quad (107)$$

Звідки випливає, що за відсутності скалярного поля ($\varphi = 0$) $E = E_0$, а при

$$\varphi^2 = \frac{\langle\mu^2\rangle}{\sigma^2} \quad (108)$$

ефективна енергія основного стану “нового” вакууму набуває вигляду

$$E = E_0 - \frac{\langle\mu^2\rangle^2}{4\sigma^2}.$$

Як видно з (107), енергія вакууму за наявності скалярного поля менша за енергію первинного вакууму і може дорівнювати нулю за умови

$$E_0 = \frac{\langle\mu^2\rangle^2}{4\sigma^2}.$$

З отриманих співвідношень випливає, що в системі може мати місце фазовий перехід з формуванням нового основного стану вакууму з енергією (107), яка може дорівнювати нулю за умови (108). При цьому скалярне поле може бути як завгодно велике. Надалі скористаємося припущенням про те, що як статистичний розподіл, так і еволюція Всесвіту можуть бути описані функцією розподілу, яка залежить лише від енергії. Приклад застосування цієї ідеї для описання особливостей статистичного розподілу було подано в попередньому розділі. Щодо описання еволюції нерівноважних розподілів (а Всесвіт є *a priori* нерівноважним), то цілком природним виглядає припущення про еволюцію системи в енергетичному просторі як броунівський рух системи у просторі енергетичних станів. На запитання, що ж може слугувати термостатом для Всесвіту, під впливом взаємодії з яким і генерується випадковий рух системи, можна відповісти, що таким термостатом є вакуум, в якому, як вже зазначалося вище, мають місце флуктуації всіх фізичних полів і які взаємодіють з фундаментальним скалярним полем і таким чином впливають навіть на основний стан вакууму. Тобто, флуктуації фізичних полів (окрім виділеного фундаментального скалярного поля) і є тим самим випадковим джерелом у ланжевенівських рівняннях. Це означає, що ми можемо використати в ролі основного рівняння для описання еволюції Всесвіту рівняння Фоккера–Планка у формі Стратоновича (81). Якщо при цьому припустити, що дисипативна функція $f(E)$ нелінійно залежить від енергії і в системі можна реалізувати індукований шумом перехід в новий стійкіший стаціонарний стан, то запропонований формалізм цілком можна застосувати для описання формування Всесвіту. Для того, щоб це зробити, нам потрібно сформулювати рівняння, яке описувало би дисипацію енергії системи зі скалярним полем. В загальному вигляді можна записати

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}, \quad (109)$$

а динамічне рівняння для скалярного поля можна записати в стандартній формі [54]:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\gamma \frac{dF(\varphi)}{d\varphi}. \quad (110)$$

Тут γ – коефіцієнт тертя, що описує дисипацію фундаментального скалярного поля, $F(\varphi)$ – вільна енергія. З теорії фазових переходів для фундаментального поля [42] відомо, що при нульовій температурі $F(\varphi\Theta) = V(\varphi, 0)$ і рівняння (110) набуває вигляду, добре відомого зі стандартної космології. Взявши

$$\frac{dE}{d\varphi} = \frac{dV(\varphi)}{d\varphi}$$

отримаємо

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma \left(\frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \right)^2, \quad (111)$$

тобто ми отримали узагальнене рівняння Ланжевена

$$\frac{dE}{dt} = f(E) \quad (112)$$

з

$$f(E) = -\gamma \left(\frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \right)^2. \quad (113)$$

У найпростішому випадку

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2$$

і

$$f(E) = -2\gamma\mu^2 E.$$

Взявши до уваги зроблене раніше припущення про те, що $\mu^2 = \mu^2 + \xi$, а також рівняння Ланжевена (112), приходимо до виразу $g(E) = 2\gamma E$, що породжує такий стаціонарний розв'язок:

$$\rho(E, t) = N(\gamma E)^{-\frac{\langle \mu^2 \rangle}{\gamma \sigma^2} + 1}. \quad (114)$$

Такий самий розв'язок впливає також з рівняння Фоккера–Планка [59]:

$$\rho(E, t) = N \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-\frac{\langle \mu^2 \rangle}{\gamma \sigma^2} + 1}. \quad (115)$$

З отриманих результатів випливає, що одним з можливих станів Всесвіту є стан з існуванням скалярного параметра порядку і з можливістю формування “бульбашки” нового стану, що має енергію $E = E_0 - \mu^4/4\sigma^2$. Ентропія основного стану

з енергією вакууму E_0 має мінімальну ентропію і більше з утворенням бульбашки нової фази. Всі космологічні моделі починаються з Великого Вибуху, який породжує нагрітий Всесвіт. Наш підхід може змінити відправну точку. Ми можемо починати розгляд з вакуумного стану з флуктуаціями полів різної природи. На початку “часу”, коли з'являється додаткове скалярне поле, більше кількість можливих станів і менша енергія нового вакуумного стану за рахунок утворення збільшуваних бульбашок нового стану. Зокрема, для критичної температури [42] $\Theta_c = 2\mu/\sigma$, симетрія в поведінці фундаментального скалярного поля відновлюється, і ми маємо добре відоме поведінку Всесвіту, але з принциповою різницею. Початковий вакуум не повністю відновлений, і ми можемо спостерігати розширення Всесвіту з прискоренням. Як зазначалося вище, це залежить від дисперсії флуктуацій полів різної природи, але у разі формування “бульбашки” нової фази не всі можливі флуктуації можуть впливати на процеси всередині Всесвіту. Цей ефект відомий як ефект флуктуаційної конденсації [38]. У цьому випадку прискорення ніколи не припиняється. Для розрахунку перехідних ймовірностей слід розглянути взаємодію з мультиплікативним шумом щодо можливих змін як дисперсії флуктуацій, так і потенціалу скалярного поля. При цьому слід враховувати нелінійність потенціалу скалярного поля і флуктуації поля різної природи. Такі флуктуації можуть змінювати мінімум потенціалу і визначати альтернативний шлях формування Всесвіту. Наприклад, у цьому випадку стан Всесвіту можна охарактеризувати як $\varphi = 0$, але з ненульовою постійною Габла. Отже, запропоновано нову модель для опису нерівноважного Всесвіту, що дає можливість визначити нові стаціонарні стани.

10. Висновки

У багатьох випадках системи з далекосяжними взаємодіями є нерівноважними. Перед тим, як релаксувати до термодинамічної рівноваги, системи з далекосяжною взаємодією опиняються в нерівноважних квазістаціонарних станах, час життя яких розходиться з кількістю частинок. Отже, за умови термодинамічної границі взаємодійні системи не можуть релаксувати до рівноваги.

Сучасний нерівноважний статистичний опис розглядає лише ймовірні структури в самогравітійній системі, але не описує метастабільних станів і нічого не говорить про часові шкали кінетичної теорії. Ми запропонували новий підхід, що використовує нерівноважний статистичний оператор з урахуванням неоднорідних розподілів частинок і температури. Для знаходження домінуючого внеску у функцію розподілу використано метод сідлової точки, що дає можливість отримати всі термодинамічні параметри системи, а відтак пролити світло на проблему самогравітації з неоднорідними розподілами частинок і температури. Передбачено ймовірні особливості поведінки самогравітійної системи для різних умов. Визначено рівняння стану для самогравітійної системи. Знайдено нову довжину статистичної нестійкості та параметри просторово-неоднорідного розподілу частинок і температури для реальних гравітійних систем. Запропоновано підхід, який уможливує кількісно прогнозувати розподіл частинок у самогравітійній системі. Вперше наведено опис формування просторово неоднорідних розподілів частинок, що супроводжуються змінами температури. Статистичний опис системи застосовано для трактування гравітаційних частинок моделі у випадку довільних, просторово неоднорідних розподілів частинок. Починаючи із загальних початкових умов, система розвивається до одного з багатьох макроскопічно стаціонарних станів.

Таким чином ми можемо розв'язати складну задачу статистичного опису систем з далекосяжною взаємодією. Крім того, цей метод може бути застосований і для подальшого розвитку фізики самогравітійних і подібних систем, що перебувають поза станом рівноваги. Запропоновано підхід до опису нерівноважних станів макроскопічної системи. На основі рівняння Фоккера–Планка для функції нерівноважного розподілу макроскопічної системи отримано стаціонарні розв'язки. Запропонований підхід враховує броунівську динаміку між різними станами системи, індуковані дисипацією енергії та впливу навколишнього середовища, які залежать від енергії системи. Показано, що як стаціонарний стан, можна визначити рівноважний стан системи, при якому енергетичний обмін між системою і середовищем є збалансованим. Стан системи є результатом рівноваги між

прямим впливом навколишнього середовища на систему і процесом дисипації, викликаним взаємодією з оточенням.

Ця робота виконана в рамках пріоритетної теми Відділення фізики і астрономії Національної академії наук України “Математичні моделі нерівноважних процесів в відкритих системах” RN 0120U100857.

1. W. Thirring. Systems with negative specific heat. *Z. Phys.* **235**, 339 (1970).
2. P.-H. Chavanis, C. Rosier, C. Sire. Thermodynamics of self-gravitating systems. *Phys. Rev. E* **66**, 036105 (2002).
3. D.N. Zubarev. *Non-Equilibrium Statistical Thermodynamics* (Consultants Bureau, 1974).
4. V. Laliena. On the thermodynamical limit of self-gravitating systems. *Nucl. Phys. B* **668**, 403 (2003).
5. R. Pakter, B. Marcos, Y. Levin. Symmetry breaking in d -dimensional self-gravitating systems. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 230603 (2013).
6. F.P.C. Benetti, A.C. Ribeiro-Teixeira, R. Pakter, Y. Levin. Nonequilibrium stationary states of 3D self-gravitating systems. *Phys. Rev. Lett.* **113**, 100602 (2014).
7. R. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (Academic Press, 1980).
8. D. Ruelle. *Statistical Mechanics (Rigorous Results)* (Benjamin, 1969).
9. Y.D. Bilotsky, B.I. Lev. Clustering in condensed media. *Teor. Mat. Fiz.* **60**, 711 (1984) (in Russian).
10. B.I. Lev, A.Ya. Zhugaevych. Statistical description of model systems of interacting particles and phase transitions accompanied by cluster formation. *Phys. Rev. E.* **57**, 6460 (1998).
11. B.I. Lev. Nonequilibrium self-gravitating system. *Int. J. Mod. Phys. B* **25**, 2237 (2011).
12. H. Kleinert. *Gauge Field in Condensed Matter* (World Scientific, 1989).
13. R.L. Stratonovich. On a method of calculating quantum distribution functions. *Sov. Phys. Dokl.* **2**, 416 (1958).
14. J. Hubbard. Calculation of partition functions. *Phys. Rev. Lett.* **3**, 77 (1958).
15. K.V. Grigorishin, B.I. Lev. Cluster formation in the system of interacting Bose particles. *Phys. Rev. E* **71**, 066105 (2005).
16. T. Padmanabhan. Statistical mechanics of gravitating system. *Phys. Rep.* **188**, 285 (1990).
17. P.-H. Chavanis. Phase transitions in self-gravitating systems. *Int. J. Mod. Phys. B* **20**, 3113 (2006).
18. S. Chandrasekhar. *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (Dover, 1942).

19. C. Sire, P.-H. Chavanis. Thermodynamics and collapse of self-gravitating Brownian particles in D dimensions. *Phys. Rev. E* **66**, 046133 (2002).
20. E.B. Aronson, C.J. Hansen. Thermal equilibrium states of a classical system with gravitation. *Astrophys. J.* **117**, 145 (1972).
21. K. Huang. *Statistical Mechanics* (Wiley, 1963) [ISBN: 978-0-471-81518-1].
22. A. Ishihara. *Statistical Physics* (Academic Press, 1971).
23. Shaisha Shaikh, Ajxub Khan. Instability of thermally conducting self-gravitating systems. *J. Mod. Phys.* **1**, 77 (2010).
24. B.I. Lev. Brownian system in energy space. *Eur. Phys. J. Spec. Topics* **216**, 37 (2013).
25. H.-J. de Vega, N. Sánchez. The statistical mechanics of the self-gravitating gas: equation of state and fractal dimension. *Phys. Lett. B* **490**, 180 (2000).
26. H.-J. de Vega, N. Sánchez. Statistical mechanics of the self-gravitating gas: I. Thermodynamic limit and phase diagrams. *Nucl. Phys. B* **625**, 409 (2002).
27. H.-J. de Vega, N. Sánchez. Statistical mechanics of the self-gravitating gas: II. Local physical magnitudes and fractal structures. *Nucl. Phys. B* **625**, 460 (2002).
28. W.C. Saslow. *Gravitational Physics of Stellar and Galactic Systems* (Cambridge Univ. Press, 1987).
29. D. Lynden-Bell, R. Wood. The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **138**, 495 (1968).
30. H.J. de Vega, N. Sánchez, F. Combes. Fractal dimensions and scaling laws in the interstellar medium: A new field theory approach. *Phys. Rev. D* **54**, 6008 (1996).
31. J.A.S. Lima, R. Silva, J. Santos. Jeans' gravitational instability and nonextensive kinetic theory. *Astron. Astrophys.* **396**, 309 (2002).
32. A.P. Boss. Giant planet formation by gravitational instability. *Science* **276**, 1836 (1997).
33. S.M. Fall. Gravitational instability theory of galaxy formation and clustering: Some recent developments. *Ann. NY Acad. Sci.* **336**, 172 (2006).
34. H. Kleinert. Collective quantum fields. *Fortschr. Phys.* **26**, 565 (1979).
35. L.N. Lipatov. Divergence of the perturbation-theory series and the quasi-classical theory. *JETP (Sov)* **72**, 412 (1977).
36. S. Edward, A. Lenard. Exact statistical mechanics of a one-dimensional system with Coulomb forces. II. The method of functional integration. *J. Math. Phys.* **3**, 778 (1962).
37. B.I. Lev, A.G. Zagorodny. Statistical description of Coulomb-like systems. *Phys. Rev. E* **84**, 061115 (2011).
38. B.I. Lev. Statistical induced dynamic of self-gravitating system. *J. Mod. Phys.* **10**, 687 (2019).
39. B.I. Lev. Statistical derivation of the fundamental scalar field. *J. Mod. Phys.* **9**, 2223 (2018).
40. B.I. Lev, S.B. Lev. Statistical description of nonequilibrium self-gravitating systems. *Eur. Phys. J. B* **9**, 3 (2017).
41. S. Samuel. Grand partition function in field theory with applications to sine-Gordon field theory. *Phys. Rev. D* **18**, 1916 (1978).
42. A.D. Linde. *Elementary Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood Academic, 1990).
43. A.D. Linde. Phase transitions in gauge theories and cosmology. *Rep. Prog. Phys.* **42**, 389 (1979).
44. S. Coleman. Fate of the false vacuum: Semiclassical theory. *Phys. Rev. D* **15**, 2929 (1977); **16**, 1762 (1977).
45. G. Rybicki. Exact statistical mechanics of a one-dimensional self-gravitating system. *Astrophys. Space Sci.* **14**, 56 (1971).
46. K.R. Yawn, B.N. Miller. Incomplete relaxation in a two-mass one-dimensional self-gravitating system. *Phys. Rev. E* **68**, 056120 (2003).
47. R. Michie. On the distribution of high energy stars in spherical stellar systems. *Not. R. Astron. Soc.* **125**, 127 (1962).
48. W. Jaffe. A simple model for the distribution of light in spherical galaxies. *Not. R. Astron. Soc.* **202**, 995 (1983).
49. Y. Levin, R. Pakter, F.B. Rizzato, T.N. Teles, F.P.C. Benetti. Nonequilibrium statistical mechanics of systems with long-range interactions. *Phys. Rep.* **535**, 1 (2014).
50. J.W. Cahn. On spinodal decomposition. *Acta Metallurgica* **9**, 795 (1988).
51. C.W. Gardiner, P. Zoller. *Quantum Noise* (Springer, 2000) [ISBN: 978-3-540-22301-6].
52. R. Balescu. *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics* (Wiley, 1978).
53. J.W. Gibbs. *Elementary Principles in Statistical Mechanics, Developed with Especial Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics* (Scribner's Sons, 1902).
54. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Statistical Physics* (Pergamon, 1978).
55. D.F. Wells, G.J. Milburn. *Quantum Optics* (Springer, 2001).
56. P. Colet, F. De Pasquale, M. San Miguel. Relaxation in the subcritical pitchfork bifurcation: From critical to Gaussian scaling. *Phys. Rev. A* **43**, 5296 (1991).
57. F.D.M. Haldane. "Fractional statistics" in arbitrary dimensions: A generalization of the Pauli principle. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 937 (1991).
58. N.G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, 1990).
59. W. Horsthemke, R. Lefever. *Noise-Induced Phase Transitions. Theory, Applications in Physics, Chemistry and Biology* (Springer, 1984).
60. A. Albrecht, P.J. Steinhard. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).

61. B.I. Lev, H. Yokoyama. Selection of states and fluctuation under the first order phase transitions. *Int. J. Mod. Phys. B* **17**, 4913 (2003).

Одержано 21.05.20

B.I. Lev, A.G. Zagorodny

STATISTICAL DESCRIPTION
OF NON-EQUILIBRIUM MANY-PARTICLE SYSTEMS

S u m m a r y

In most cases, the systems of interacting particles are non-equilibrium. In this review, a new approach based on the application of a non-equilibrium statistical operator is presented,

which allows the inhomogeneous distributions of the particles and the temperature to be taken into account. The method uses the saddle-point procedure to find dominant contributions to the partition function of the system and enables all of its thermodynamic parameters to be determined. Probable peculiarities in the behavior of the systems with interaction – such as gravitational systems, systems with Coulombic repulsion, and so forth – under various thermodynamic conditions are predicted. A new approach is proposed to describe non-equilibrium systems in the energy space, which is an extension of the Gibbs approach to macroscopic systems under non-equilibrium conditions. It allows the stationary states and the dynamics of non-equilibrium systems to be described.