

З.М. ЛЯШЕНКО,<sup>1</sup> Я.О. ЛЯШЕНКО<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Сумський державний університет

(Вул. Римського-Корсакова, 2, Суми 40007; e-mail: zinaida.makukha@gmail.com)

<sup>2</sup> Technische Universität Berlin, Institut für Mechanik, FG Systemdynamik und Reibungsphysik

(Sekt. C8-4, Raum M 122, Strasse des 17. Juni 135, 10623 Berlin, Germany;

e-mail: i.liashenko@tu-berlin.de)

## ВПЛИВ ПРОСТОРОВОЇ НЕОДНОРІДНОСТІ НА ФОРМУВАННЯ ХАОТИЧНИХ РЕЖИМІВ ПРОЦЕСУ САМООРГАНІЗАЦІЇ

УДК 004.942

*Чисельно розв'язано систему рівнянь Лоренца з урахуванням градієнтних доданків. Розглянуто три принципово різні режими. У першому режимі просторовий розподіл параметра порядку еволюціонує в часі, утворюючи домени двох типів з додатним і від'ємним значенням параметра порядку. У другому – розподіл близький до стаціонарного. І у третьому режимі по всьому простору параметр порядку приймає однакові значення. Для перших двох випадків розраховано залежності середньої площі доменів, їх кількості та сумарної площі від часу. В останньому випадку внесок градієнтних доданків повністю нівелюється і реалізується класичний аттрактор Лоренца.*

*Ключові слова:* самоорганізація, система Лоренца, дивний аттрактор, параметр порядку, диференціальні рівняння у частинних похідних.

### 1. Вступ

Самоорганізація – це процес утворення упорядкованих структур без зміни структуроутворюючого параметра, тобто за відсутності специфічного зовнішнього впливу [1]. Ми стикаємося з процесами самоорганізації у повсякденному житті як у живій, так і у неживій природі. Яскраві приклади – упорядкування електронів при низьких температурах [2] (явище надпровідності), когерентне випромінювання в лазері [1, 3], виникнення упорядкованих потоків-вихрів у підігрійтій рідині, самоорганізація в наноматеріалах (алотропні форми вуглецю [4]), деякі хімічні реакції [5] (реакція Белоусова–Жаботинського та ін.), утворення впорядкованих структур у в'язких рідинах [6] тощо. У біологічних системах самоорганізація проявляється в узгодженій поведінці бактерій, утворенні океанічних піросом (велика кількість крихітних організмів, які вибудовуються у вигляді порожнистих трубок, закритих з одного кінця), об'єднання птахів і риб у зграї тощо. Часто явища самоорганізації спостерігаються у різноманітних складних системах [7, 8]. Функціонування будь-якого живого організму також є безперервним процесом самоорганізації. Наприклад, жива клітина – складний ме-

ханізм, з магістралями, по яких доставляються поживні речовини і компоненти білків, електростанціями (мітохондрії), майстернями по синтезу білків та багатьма іншими важливими структурами. За структурою клітина нагадує мегаполіс, в якому постійно кипить життя, здавалося б, без будь-якої на те причини, лише за рахунок внутрішніх сил. У клітині відбуваються складні процеси самоорганізації, які сьогодні можна спостерігати в моделюванні, та все ж багато питань при цьому залишаються не вивченими.

Відповідно до другого закону термодинаміки для замкнених систем ентропія може тільки зростати, тобто ступінь упорядкованості з часом завжди зменшується. Проте, якщо взяти підсистему з нелінійною поведінкою, до якої підводиться енергія, то в ній відбувається дисипація і подальше відведення “зайвої” енергії із системи. Як відомо, такі локальні системи здатні спонтанно впорядковуватись. Один із тривіальних прикладів – наша Земля, на якій спонтанно зародилось життя. Земля отримує енергію від Сонця і випромінює її в Космос. Умовою проходження процесу самоорганізації впродовж тривалого часу є приблизна рівність вхідного і вихідного потоків енергії (у випадку Землі, вона не повинна монотонно нагріватися або охолоджуватися). Тобто в самоорганізованих

системах відбуваються стаціонарні нерівноважні процеси, такі системи вивчає наука синергетика, засновником якої вважається Герман Хакен [1, 7].

На сьогодні існує велика кількість відносно простих математичних моделей, які описують процеси самоорганізації в різних фізичних системах. Це добре відома модель хижак-жертва Лотки-Вольтерри, системи диференціальних рівнянь Лоренца і Ресслера, які показують хаотичні аттрактори, різноманітні рівняння хімічних реакцій, моделі нейронних мереж тощо. Ці моделі, як правило, описуються нелінійними рівняннями, що мають додатні (причина самоорганізації) та від'ємні (умова стабілізації) зворотні зв'язки між динамічними змінними. У даній роботі ми зупинимося на широковідомій системі Лоренца [9], якій вже понад 50 років, але яка і до сьогодні активно досліджується завдяки розвитку обчислювальної техніки. Зокрема, система рівнянь Лоренца багато років активно використовувалася у науковій групі О.І. Олемського для опису індукованих шумом нерівноважних фазових переходів [10], самоорганізації процесів квазірівноважної конденсації [11], кінетики фазових переходів першого і другого роду [12], механізмів вибухової кристалізації [13] та самоорганізованої критичності [14]. Крім того, за допомогою системи Лоренца описують хаотичне випромінювання в лазерах [3], потоки в рідині, ефекти в електричних колах при наявності нелінійних елементів (наприклад, діода Ганна), хімічні реакції [5] тощо. У процесі побудови відповідних теорій система Лоренца була детально досліджена з урахуванням доданків, що відповідають за адитивні і мультиплікативні шуми, нелінійних релаксаційних доданків, періодичного зовнішнього впливу тощо. Але при цьому недостатньо уваги приділено дослідженню систем з просторово розподіленими параметрами. Наприклад, кілька таких робіт присвячено вивченню неоднорідного плавлення мастильного матеріалу в зоні контакту між атомарно-гладкими твердими поверхнями [15, 16]. Проте при цьому було розглянуто режими, у яких з часом по всій площі контакту встановлюється єдине значення параметра порядку, тобто система гомогенізується. У даній роботі ми розглянемо випадок, коли у процесі еволюції системи відбувається постійна зміна просторового розподілу параметра порядку.

## 2. Класичний аттрактор Лоренца

Класична система Лоренца має вигляд [9]:

$$\dot{X} = \sigma(Y - X), \quad (1)$$

$$\dot{Y} = X(\rho - Z) - Y, \quad (2)$$

$$\dot{Z} = XY - \beta Z. \quad (3)$$

Точка над змінною у рівняннях означає похідну за часом (позначимо час  $t'$ ), тобто  $\dot{X} \equiv dX/dt'$ . Змінні  $X$ ,  $Y$  і  $Z$ , а також сталі  $\sigma$ ,  $\rho$  і  $\beta$  можуть мати різний фізичний зміст в залежності від задачі, яка описується за допомогою рівнянь (1)–(3). Наприклад, при описі одномодового лазера  $X$  – амплітуда хвиль у резонаторі лазера,  $Y$  – величина поляризації,  $Z$  – інверсія населеності енергетичних рівнів. Константи  $\beta$  і  $\sigma$  описують відношення коефіцієнтів релаксації вищевказаних величин, а параметр  $\rho$  – це інтенсивність накачки. З усіх цих параметрів в конкретній фізичній системі з заданими характеристиками ми можемо змінювати тільки параметр  $\rho$ , який є зовнішнім керуючим параметром. Особливість моделі (1)–(3) полягає в тому, що змінюючи параметр  $\rho$  можна реалізувати різні режими роботи досліджуваної системи. Це може бути як релаксаційний режим, так і режим детерміністичного хаосу, коли поведінка характеризується дивним аттрактором. Система (1)–(3) є найпростішою системою, яка дозволяє представити процес самоорганізації, тому її дослідження є цікавим навіть без прив'язки до конкретного фізичного явища.

Рівняння (1)–(3) можуть бути перетворені до простішого вигляду. Для цього необхідно ввести нові змінні:

$$\begin{aligned} t &\equiv \sigma t'; & u &\equiv X/\sqrt{\beta}; & v &\equiv Y/\sqrt{\beta}; \\ S &\equiv \rho - Z; & \delta &\equiv \sigma/\beta; & S_e &\equiv \rho, \end{aligned} \quad (4)$$

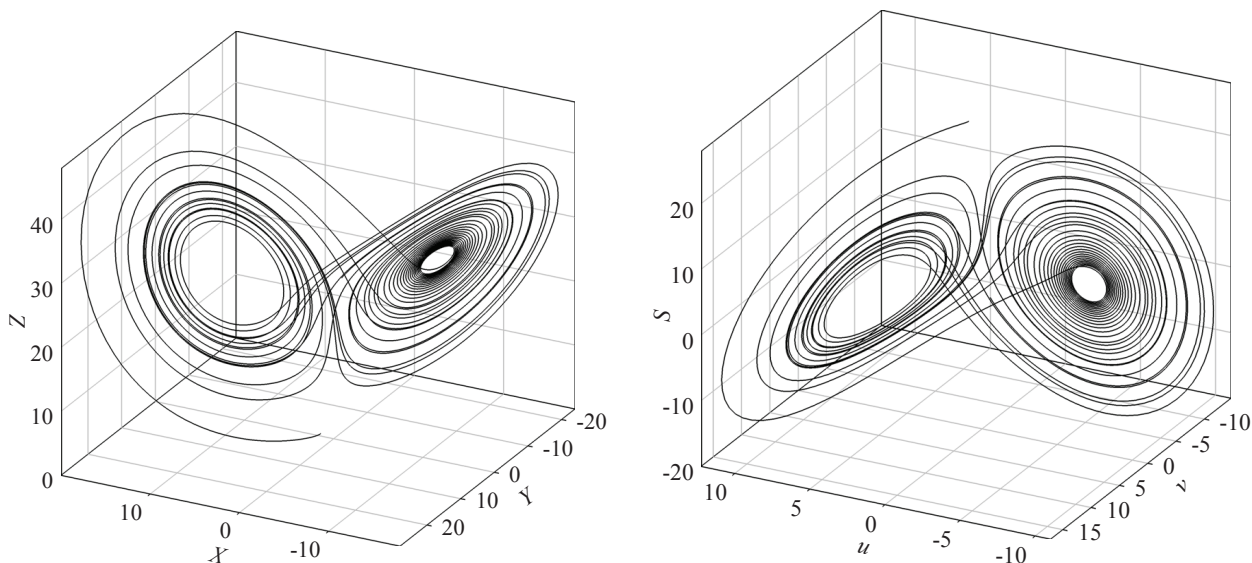
де  $t'$  і  $t$  – час в початковій і перетвореній системі відповідно. Після підстановки нових змінних система Лоренца прийме дещо модифікований вигляд:

$$\dot{u} = -u + v, \quad (5)$$

$$\sigma \dot{v} = -v + Su, \quad (6)$$

$$\delta \dot{S} = (S_e - S) - uv. \quad (7)$$

Саме рівняння вигляду (5)–(7) досліджувалися в роботах [10–14]. Система рівнянь (1)–(3) показує



**Рис. 1.** Аттрактори, одержані при розв'язанні системи початкових рівнянь (1)–(3) (ліва панель) та модифікованої системи (5)–(7) (права панель). Ліва панель побудована при параметрах  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$  і початкових умовах  $X_0 = Y_0 = Z_0 = 1$ ; права –  $\sigma = 10$ ,  $\delta = 3,75$ ,  $S_e = 28$ , початкові умови  $u_0 = v_0 = \sqrt{0,375}$ ,  $S_0 = 27$

режим дивного аттрактора при параметрах  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  і  $\beta = 8/3$ , що в модифікованій системі (5)–(7) відповідно до виразів (4) відповідає значенням  $\sigma = 10$ ,  $S_e = 28$  і  $\delta = 3,75$ . Таким чином, змінюється тільки значення останнього параметра, який у такому представленні може бути записаний у вигляді десяткового дробу.

При чисельному розв'язанні рівнянь Лоренца важливим є вибір початкових умов, оскільки вони суттєво впливають на кінцевий результат. Початкові умови для системи (5)–(7) позначимо як  $u_0$ ,  $v_0$  і  $S_0$ , що для системи (1)–(3), відповідно до зв'язків (4), задає початкові умови  $X_0 = u_0\sqrt{\sigma/\delta}$ ,  $Y_0 = v_0\sqrt{\sigma/\delta}$ ,  $Z_0 = S_e - S_0$ . Для повної відповідності одержуваних при чисельному моделюванні результатів при розв'язуванні вихідної системи (1)–(3) і модифікованої (5)–(7) необхідно також враховувати, що в цих системах час  $t$  виміряно в різних одиницях (див. (4)). Якщо для вихідної системи розв'язок шукається в інтервалі часу  $t' \in [0, T]$ , то для модифікованої еквівалентний інтервал становить  $t \in [0, \sigma T]$ . Варто зазначити, що в режимі дивного аттрактора на подальшу поведінку впливає навіть незначна зміна початкових умов або завжди присутні похибки чисельного розрахунку. Тож навіть при відносно малому кроці інтегрування рівнянь  $\Delta t'$  в

чисельній процедурі існує фіксований час, коли поведінка системи починає відхилятися від такої, яку покаже розв'язок рівнянь при ще меншому кроці. Тому для повної відповідності одержаних результатів, окрім описаного вище зв'язку початкових умов, для кожної системи необхідно вибирати різні кроки інтегрування за часом. Так, якщо для системи (1)–(3) вибираємо крок  $\Delta t'$ , то, відповідно до виразів (4), для модифікованих рівнянь (5)–(7) повинні вибрати інший крок  $\Delta t = \sigma \Delta t'$ .

На рис. 1 наведені результати чисельного розв'язку систем рівнянь (1)–(3) (ліва панель) та (5)–(7) (права панель). При цьому вибирався набір початкових умов  $X_0 = Y_0 = Z_0 = 1$ , що, згідно з (4), відповідає величинам  $u_0 = v_0 = \sqrt{0,375}$  і  $S_0 = 27$ . Рівняння розв'язувались методом Ейлера з кроком по осі часу  $\Delta t' = 10^{-8}$  і  $\Delta t = 10^{-7}$ . При таких параметрах і початкових умовах залежності на рис. 1 зображують один і той самий процес. Крім того, оскільки параметри обох систем, згідно з (4), пов'язані лінійно, на рисунках відсутні якісні відмінності. В наступному розділі проаналізуємо модифіковану систему рівнянь (5)–(7). Зауважимо, що всі одержані далі результати при необхідності можна інтерпретувати виходячи з системи Лоренца (1)–(3).

### 3. Врахування просторової неоднорідності і чисельна процедура

Для опису неоднорідного розподілу параметрів в системі (5)–(7) необхідно додатково врахувати градієнтні доданки:  $D_u \nabla^2 u$ ,  $D_v \nabla^2 v$  і  $D_S \nabla^2 S$ . Просторові координати позначимо  $x'$  і  $y'$ , тоді оператор  $\nabla^2$  для двовимірного випадку запишеться як  $\nabla^2 = d^2/dx'^2 + d^2/dy'^2$ . Після введення нових просторових змінних  $x = x'/\sqrt{D_S}$  і  $y = y'/\sqrt{D_S}$  рівняння з урахуванням градієнтних доданків набудуть остаточного вигляду:

$$\dot{u} = D_{(uS)} \nabla^2 u - u + v, \quad (8)$$

$$\sigma \dot{v} = D_{(vS)} \nabla^2 v - v + Su, \quad (9)$$

$$\delta \dot{S} = \nabla^2 S + (S_e - S) - uv, \quad (10)$$

де  $D_{(uS)} = D_u/D_S$ , а  $D_{(vS)} = D_v/D_S$ . Для чисельного розв'язку системи рівнянь (8)–(10) розіб'ємо просторові координатні осі  $x$  і  $y$ , а також вісь часу  $t$  на певну кількість рівних відрізків. При цьому розв'язок задачі на всій просторово-часовій області зводиться до визначення вузлів тривимірної різницевої сітки. Нехай  $n$  – порядковий номер точки поділу по осі  $t$ ,  $j$  – по осі  $x$  і  $k$  – по осі  $y$ . Тоді ці порядкові номери приймають значення  $n = 0, 1, 2, \dots, M$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, N_x$ ;  $k = 1, 2, 3, \dots, N_y$ . У цих позначеннях значення змінних  $x$ ,  $y$  і  $t$  у довільній точці просторово-часової сітки задаються співвідношеннями  $t^n = n\Delta t$ ;  $x_j = (j-1)H_x$  і  $y_k = (k-1)H_y$ , де  $\Delta t$  – раніше введений інтервал розбиття по осі часу, а  $H_x$  і  $H_y$  – інтервали розбиття по координатах  $x$  і  $y$  відповідно. Використаємо для чисельного моделювання явну різницеву схему. При цьому похідні, які входять у систему рівнянь, апроксимуються таким чином [17]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{j+1,k}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j-1,k}^n}{H_x^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n}{H_y^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

При підстановці виразів (11) в систему (8)–(10) отримуємо явну різницеву схему. При наявності початкових і граничних умов (див. нижче) така

схема має єдину невідому величину  $u_{j,k}^{n+1}$ . Виражаючи цю величину з різницевої схеми представлення основних рівнянь і для спрощення вважаючи  $H_x = H_y = H$ , отримуємо:

$$u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^n + \frac{D_{(uS)} \Delta t}{H^2} (u_{j+1,k}^n + u_{j,k+1}^n - 4u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n + u_{j-1,k}^n) + \Delta t (-u_{j,k}^n + v_{j,k}^n), \quad (12)$$

$$v_{j,k}^{n+1} = v_{j,k}^n + \frac{D_{(vS)} \Delta t}{\sigma H^2} (v_{j+1,k}^n + v_{j,k+1}^n - 4v_{j,k}^n + v_{j,k-1}^n + v_{j-1,k}^n) + \frac{\Delta t}{\sigma} (-v_{j,k}^n + S_{j,k}^n u_{j,k}^n), \quad (13)$$

$$S_{j,k}^{n+1} = S_{j,k}^n + \frac{\Delta t}{\delta H^2} (S_{j+1,k}^n + S_{j,k+1}^n - 4S_{j,k}^n + S_{j,k-1}^n + S_{j-1,k}^n) + \frac{\Delta t}{\delta} (S_e - S_{j,k}^n - u_{j,k}^n v_{j,k}^n). \quad (14)$$

Для чисельної реалізації отриманої процедури (12)–(14) її необхідно доповнити початковими і граничними умовами. Початкові умови подамо за допомогою функції Бокса–Мюллера [18]:

$$u_{j,k}^0 = \sqrt{2I} \sqrt{-2 \ln r_1} \cos(2\pi r_2), \quad r_i \in (0, 1], \quad (15)$$

де  $r_1, r_2$  – псевдовипадкові числа з рівномірним розподілом, а  $I$  – інтенсивність стохастичного джерела, яка задає дисперсію  $\mu = \sqrt{2I}$ . Початкові розподіли величин  $u_{j,k}^0$  і  $S_{j,k}^0$  вибираються аналогічним чином. При цьому для всіх трьох величин початковий просторовий розподіл є гауссовим:

$$P(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\mu^2}\right\}, \quad (16)$$

де  $\xi = u, v, S$ . При розв'язанні рівнянь (12)–(14) також необхідно вибрати граничні умови виходячи з фізичних представлень задачі. Для спрощення будемо розглядати нескінченні поверхні нехтуючи крайовими ефектами, тому скористаємося періодичними граничними умовами. При цьому у (12)–(14) достатньо врахувати 4 умови: якщо  $j = 1$ , то  $j - 1 \rightarrow N_x$ ; якщо  $k = 1$ , то  $k - 1 \rightarrow N_y$ ; якщо  $j = N_x$ , то  $j + 1 \rightarrow 1$ ; якщо  $k = N_y$ , то  $k + 1 \rightarrow 1$ .

Для розв'язання описаної вище неоднорідної системи рівнянь необхідно адекватно вибрати параметри дискретизації часової осі  $\Delta t$  і просторової області  $H$ . Як зазначалось, система Лоренца дуже чутлива до вибору початкових умов і до обов'язково виникаючої похибки чисельного розрахунку.

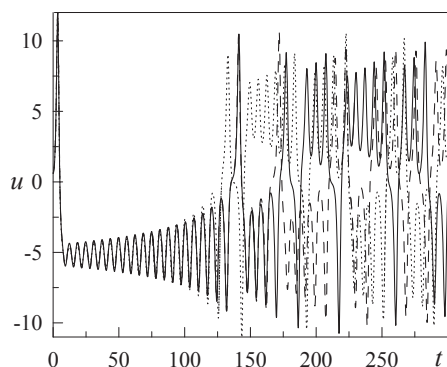


Рис. 2. Залежності  $u(t)$ , отримані при чисельному розв'язанні системи (5)–(7), які відповідають параметрам правої панелі на рис. 1

Наприклад, на рис. 2 показані залежності  $u(t)$ , отримані при розв'язанні рівнянь (5)–(7). Тут суцільна крива повністю відповідає параметрам правої панелі рис. 1, включаючи крок інтегрування за часом  $\Delta t = 10^{-7}$ . Штрихова крива відповідає значенню  $\Delta t = 10^{-5}$ , пунктирна – кроку за часом  $\Delta t = 10^{-2}$ . У решті випадків всі параметри ідентичні, включаючи початкові умови. Суцільна крива показує найточніший результат, оскільки вона отримана при мінімальному значенні кроку інтегрування за часом. Дві інші криві у певний момент часу (коли накопичена похибка чисельного розрахунку стає достатньою) починають відхилятися від траєкторії суцільної лінії, причому чим менше значення  $\Delta t$ , тим раніше починається це відхилення. Отже, можна зробити висновок, що для точного обчислення траєкторії спочатку необхідно її розрахувати, а потім кілька разів обчислити її ж, але вже з меншим кроком дискретизації за часом  $\Delta t$ . За одержаними залежностями можна визначити область, де траєкторії накладаються, і цей інтервал часу буде відповідати точному розв'язку системи. Але в реальних умовах завжди існують різного роду флуктуації та зовнішній неконтрольований вплив, що не дозволяє таким складним системам показувати детермістичну поведінку за однакових початкових умов. Тому точне чисельне розв'язання системи рівнянь Лоренса не становить інтересу, оскільки більш важливою характеристикою тут є поведінка типу дивного аттрактора. Як видно з рис. 2, дивний аттрактор Лоренса зберігається при всіх вибраних значеннях  $\Delta t$ , тому для чисельного моделювання достатньо вибрати крок за часом  $\Delta t = 10^{-5}$ .

Явна різницєва схема (11) є умовно стійкою. Ця схема має стійкий розв'язок при значеннях коефіцієнтів перед апроксимаціями координатних похідних в рівняннях (12)–(14) менше 0,5 [17]. Наприклад, для рівняння (12) ця умова запишеться як  $D_{(u_S)}\Delta t/H^2 < 0,5$ . Далі виберемо параметри дискретизації враховуючи умови стійкості.

#### 4. Результати моделювання та їх обговорення

Для моделювання були вибрані параметри дискретизації  $\Delta t = 10^{-5}$  і  $H = 0,01$ . Розв'язання проводилося на сітці розміром  $256 \times 256$ . Врахувавши параметри дискретизації, для розміру квадратної області отримаємо  $2,56 \times 2,56$ . Для всіх розглянутих далі випадків вибиралися ті ж параметри  $S_e = 28$ ,  $\sigma = 10$  і  $\delta = 3,75$ . Система рівнянь вирішувалася чисельно (див. розділ 3) на відрізок часу  $t \in [0, 1000]$ . Інтенсивність стохастичного джерела для формування початкових умов у функції (15) дорівнювала  $I = 10$ . Набір початкових умов генерувався один раз і використовувався для всіх випадків. У процесі розв'язання через певний проміжок часу зберігалася карта значень параметра порядку  $u(x, y)$ , а також середнє значення  $\langle u \rangle$ .

Було розглянуто три випадки співвідношень між коефіцієнтами, що відповідають за градієнтний внесок:  $D_{u_S} = D_{v_S} = 10^{-3}$ ;  $D_{u_S} = D_{v_S} = 10^{-2}$  і  $D_{u_S} = D_{v_S} = 10^{-1}$ . Одержані результати наведено на рис. 3, де наочно видно, що це три принципово різні режими. У першому випадку (верхня панель) встановлюється режим постійної зміни просторового розподілу параметра порядку, і, відповідно, зміни його середнього значення в часі. Другий випадок (середня панель) відповідає ситуації, коли згодом утворюється певна близька до стаціонарної структура, середнє значення параметра порядку змінюється в часі досить слабо. І третій випадок (нижня панель) демонструє режим, коли градієнтні внески впливають несуттєво. Як видно, остання залежність повторює описаний на рис. 2 режим, який встановлюється без урахування градієнтних доданків. Варто також зазначити, що у перших двох випадках діапазон зміни середнього значення параметра порядку значно менший, ніж у третьому. Це може спричинити як деяку гомогенізацію системи за рахунок впливу гра-

дієтних вкладів, так і фазове розшарування, коли по площині реалізуються острівці з від'ємними і додатними значеннями параметра порядку. В останньому випадку залежності середніх значень від часу не дають корисної інформації про систему, і в цій ситуації необхідно аналізувати середньоквадратичне відхилення від середнього значення. Для визначення середньоквадратичного відхилення параметра порядку скористаємось стандартною процедурою:

$$\langle u^2 \rangle^{1/2} = \left\langle (u - \langle u \rangle)^2 \right\rangle^{1/2}, \quad (17)$$

де кутові дужки означають усереднення по координатній області (всього  $256 \times 256 = 65536$  значень). Одержані результати наведено на рис. 4. На верхній панелі рис. 4 (для значень  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-3}$ ) параметр  $\langle u^2 \rangle^{1/2}$  змінюється у набагато більшому діапазоні, порівняно з  $\langle u \rangle$  на рис. 3. Це можна пояснити утворенням острівців з різним знаком параметра порядку, причому процес зміни конфігурації острівців відбувається у часі безперервно і система при цьому не прямує до деякого стаціонарного розподілу параметра порядку. При значенні  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-2}$  (середня панель) у системі встановлюється практично стаціонарна конфігурація острівців. Хоча слід зазначити, що повільна еволюція в часі все ж спостерігається (вставка на середній панелі). У третьому випадку (нижня панель) при значенні  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-1}$  у системі досить швидко встановлюється режим, у якому параметр порядку на всій площі моделювання приймає однакові значення, внесок градієнтних доданків при цьому, згідно з (11), повністю нівелюється. Отже, аналіз залежностей  $\langle u^2 \rangle^{1/2}$  підтверджує зроблені вище припущення.

Для розгляду одержаних розподілів параметра порядку можна використовувати методи аналізу тривимірних поверхонь. На сьогодні двома досить потужними способами дослідження поверхонь є мультифрактальний флуктуаційний аналіз [19, 20] і методи, засновані на аналізі спектральної густини потужності [21]. Крім цього, тривимірні поверхні характеризуються цілим спектром параметрів, які розраховуються чисельно [22]. Часто для з'ясування впливу нерівностей (шорсткості) поверхонь на фізичні процеси взаємодії між ними потрібно більш складне моделювання. Наприклад, для розрахунку адгезійних властивостей по-

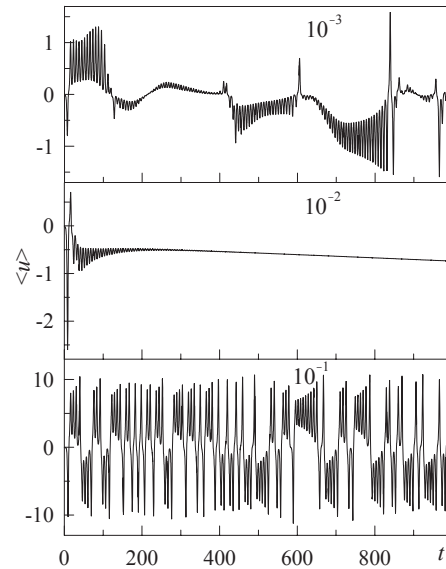


Рис. 3. Середні значення параметра порядку  $\langle u \rangle$  як функції часу  $t$  для співвідношень  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-3}$  (верхня панель),  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-2}$  (середня панель) та  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-1}$  (нижня панель)

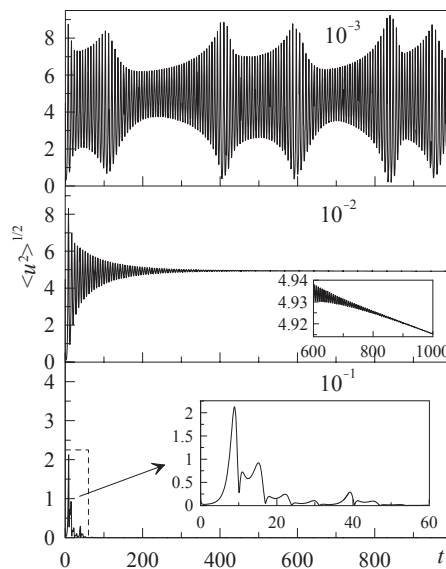
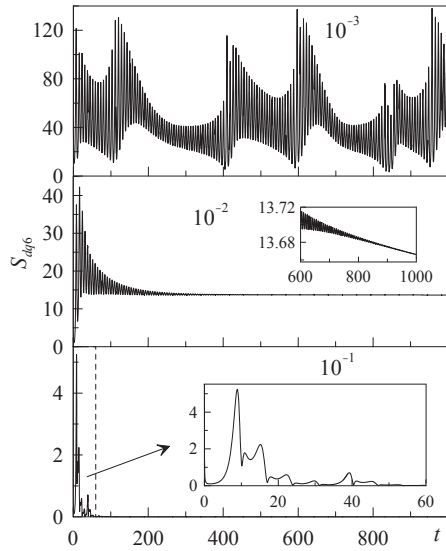


Рис. 4. Середньоквадратичні відхилення параметра порядку  $\langle u^2 \rangle^{1/2}$  (17) від середнього значення як функції часу  $t$ , які відповідають даним на рис. 3. На вставках показані збільшені фрагменти залежностей

верхонь активно застосовується метод граничних елементів [23, 24]. Однією з важливих характеристик поверхонь є середньоквадратичне відхилення (рис. 4). Другим важливим параметром, що ха-



**Рис. 5.** Середньоквадратичний нахил  $S_{dq6}$ , обчислений за формулами (19) і (21), як функція часу  $t$  (параметри аналогічні рис. 4). На вставках наведені збільшені фрагменти рисунків

рактизує нерівності поверхні, є середньоквадратичний нахил  $S_{dq}$ , який розраховується за такою формулою<sup>1</sup>:

$$S_{dq}^2 = \frac{1}{A} \iint \left[ \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (18)$$

де  $x$  і  $y$  – просторові координати,  $A$  – площа поверхні, на якій здійснюється моделювання, у нашому випадку  $A = 2,56 \times 2,56$  квадратних одиниць. Фактично, (18) – це середнє значення похідної по всій поверхні, що описує нахил нерівностей. У ситуації, яку ми розглядаємо, максимальний нахил буде на границі доменів при зміні знака параметра порядку. Таким чином, параметром  $S_{dq}$  (18) непрямо можна характеризувати кількість доменів. Дискретний аналог (18) можна записати у вигляді:

$$S_{dq}^2 = \frac{1}{(M-1)(N-1)} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} B_{ij}, \quad (19)$$

$$B_{ij} = \left( \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{\Delta x} \right)^2 +$$

<sup>1</sup> У формулах (18) і (19) ми записуємо  $S_{dq}^2$ , щоб не писати з правої сторони формули знак радикала. При розрахунках необхідно обчислювати безпосередньо параметр  $S_{dq} \equiv (S_{dq}^2)^{1/2}$ .

$$+ \left( \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1})}{\Delta y} \right)^2, \quad (20)$$

де  $\Delta x = \Delta y = H$  – параметр дискретизації простору,  $M = N = 256$  – кількість точок на обох осях.

Конструкція (19) не є єдиною для визначення параметра  $S_{dq}$ . Часто використовується інша чисельна схема, яка апроксимує похідні по 6-ти сусіднім точкам замінюючи їх дискретні представлення в точці  $(x_i, y_j)$ . При цьому у формулі (19) у ролі конструкції  $B_{ij}$  потрібно використовувати інший вираз:

$$B_{ij} = \left( \frac{A_1}{60\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{A_2}{60\Delta y} \right)^2, \quad (21)$$

$$A_1 = u(x_{i+3}, y_j) - 9u(x_{i+2}, y_j) + 45u(x_{i+1}, y_j) -$$

$$- 45u(x_{i-1}, y_j) + 9u(x_{i-2}, y_j) - u(x_{i-3}, y_j),$$

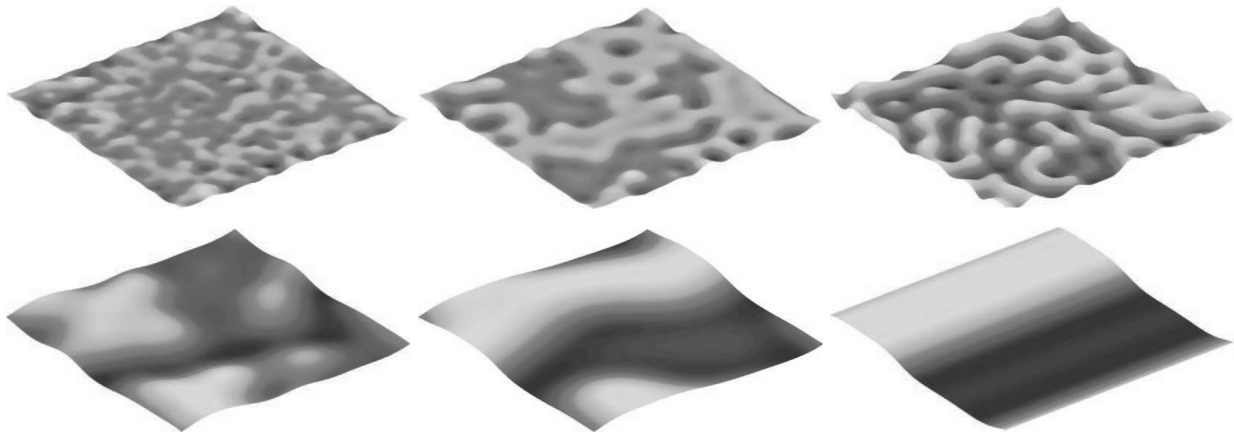
$$A_2 = u(x_i, y_{j+3}) - 9u(x_i, y_{j+2}) + 45u(x_i, y_{j+1}) -$$

$$- 45u(x_i, y_{j-1}) + 9u(x_i, y_{j-2}) - u(x_i, y_{j-3}).$$

Середньоквадратичний нахил  $S_{dq}$ , розрахований при використанні апроксимації (21), позначимо  $S_{dq6}$ . Для відносно гладких поверхонь обидва визначення збігаються з високою точністю, проте при сильному ступені нерівностей може спостерігатися значна відмінність значень. Тому порівнюючи отримані за цими двома формулами результати можна оцінити ступінь гладкості досліджуваної поверхні.

На рис. 5 наведені залежності розрахованого середньоквадратичного нахилу  $S_{dq6}$  від часу  $t$  для трьох випадків співвідношень між градієнтними доданками. Якісно залежності практично повторюють середньоквадратичні відхилення параметра порядку від часу (рис. 4), але спостерігаються певні відмінності. Наприклад, середньоквадратичне відхилення  $\langle u^2 \rangle^{1/2}$  для  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-2}$  на початку руху відхиляється в двох напрямках, в той час як середньоквадратичний нахил  $S_{dq6}$  досить швидко припиняє опускатися нижче деякого близького до стаціонарного значення. При параметрах  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-1}$  залежності  $\langle u^2 \rangle^{1/2}(t)$  і  $S_{dq6}(t)$  якісно збігаються.

Різниця між трьома розглянутими випадками залишається незмінною: постійна варіація параметра порядку в часі, близький до стаціонарного ре-



**Рис. 6.** Просторовий розподіл параметра порядку. Зліва направо рисунки відповідають моментам часу  $t = 10, 100$  і  $1000$  відповідно. Верхні три рисунки відповідають випадку  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-3}$ , для нижніх трьох рисунків  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-2}$

жим і гомогенізована система. У випадку поверхонь для повної їх характеристики необхідно знати як середньоквадратичне відхилення, так і середньоквадратичний нахил. Комбінація цих двох параметрів практично повністю визначає властивості поверхонь при їх взаємодії. Наприклад, при описі адгезії шорстких поверхонь добуток  $\langle u^2 \rangle^{1/2} \times S_{dq6}$  зводиться до параметра Джонсона [25], який визначає адгезійну міцність контакту.

Отже, за результатами дослідження можна зробити висновок, що при співвідношенні параметрів  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-1}$  інтерес може становити тільки ділянка залежності з перехідним режимом ( $t \in [0, 60]$ ), інша частина залежності інтересу не становить, оскільки з часом просторова структура повністю гомогенізується [16]. Два інших випадки співвідношень між коефіцієнтами  $D$  розглянемо більш детально.

З рис. 6, де час  $t$  збільшується у напрямку зліва направо ( $t = 10, 100$  і  $1000$ ), видно, що у випадку  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-2}$  формується стаціонарна структура з двома областями, а саме з додатними і від'ємними значеннями  $u$ , а в іншому випадку при  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-3}$  спостерігається еволюція розподілу параметра порядку. Області з фіксованим знаком параметра порядку будемо називати додатними або від'ємними доменами. Наприклад, при описі намагніченості в межах одного такого домену зберігається орієнтація вектора магнітного моменту. Досліджувана система Лоренца може використовуватися для опису еволюції намагніченості зразка, але для цього спочатку необхідно її

параметризувати належним чином. Наприклад, як зовнішній вплив (параметр  $S_e$ ) може бути вибрана деформація, тоді модель буде описувати залежність намагніченості зразка від зовнішньої механічної дії. Якщо як зовнішній вплив вибрати магнітне поле, то можна прослідкувати еволюцію коефіцієнта тензочутливості [26]. Крім того, подібного роду просторові розподіли реалізуються в біологічних системах [27] і взагалі у багатьох динамічних процесах. Зазначимо, що подібні розподіли можуть розраховуватися як безпосередньо розв'язанням еволюційних рівнянь [27], так і застосуванням більш складних методів, наприклад, методів молекулярної динаміки [28].

У деяких задачах абсолютне значення параметра порядку не таке важливе, бо поведінку системи визначає лише його знак. У таких випадках набагато простіше аналізувати розподіли бінарного типу, в яких домени набувають значення 0 або 1. Обробка таких бінарних розподілів вимагає набагато менше процесорного часу і пам'яті для їх збереження на жорсткий диск. Візуально різні знаки параметра порядку можна зобразити різним кольором (рис. 7). Білим кольором зображені додатні домени, а чорним – від'ємні. Проведемо аналіз бінарних розподілів параметра порядку на основі зображень рис. 7. Нагадаємо, що в ході моделювання ми зберігали просторові розподіли з певною періодичністю протягом усього часу моделювання, на рис. 6 та рис. 7 наведено лише деякі з них для відображення різних сценаріїв поведінки системи.



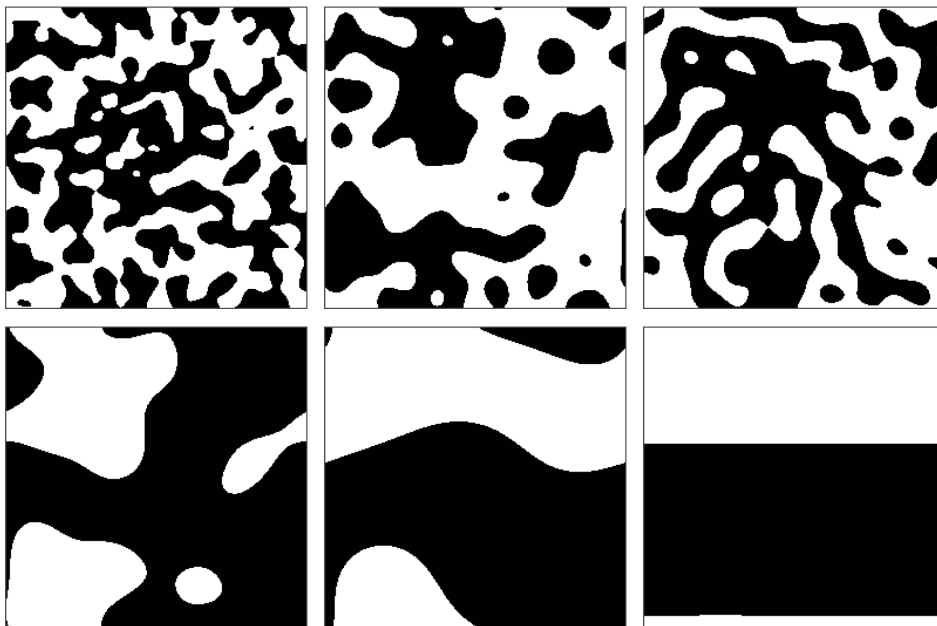


Рис. 7. Просторові розподіли параметра порядку, які повністю відповідають розподілам, наведеним на рис. 6. Білі області – додатне значення параметра порядку, чорні – від’ємне

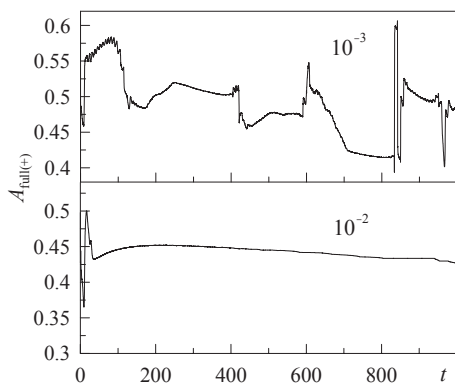


Рис. 8. Нормована на розмір системи загальна площа додатних доменів  $A_{full(+)}$  як функція часу  $t$ . Верхня панель рисунка відповідає випадку  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-3}$ , для нижньої панелі  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-2}$

На рис. 8 наведені залежності сумарної площі додатних доменів  $A_{full(+)}$  від часу  $t$ , яка нормована на загальну площу системи. Площа від’ємних доменів тут не відображена, оскільки при необхідності вона легко обчислюється як  $A_{full(-)} = 1 - A_{full(+)}$ . З рис. 8 (верхня панель) випливає, що на всьому часовому проміжку відбувається конкуруюча взаємодія між двома типами доменів, і загальна конфігурація системи постійно перебудову-

ється. При цьому спостерігається деяка симетрія, оскільки в процесі еволюції системи в середньому значення повних площ обох типів доменів приблизно рівні, що відповідає еквівалентному заповненню простору обома типами доменів. У початковий момент часу  $A_{full(-)} \approx A_{full(+)} \approx 0,5$ , оскільки початкові умови, відповідно до виразу (16), представлені рівноймовірно обома знаками параметра порядку  $u$ . На нижній панелі рис. 8 реалізується ситуація, коли площі доменів змінюються набагато повільніше, ніж у випадку  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-3}$  (верхня панель рис. 8)<sup>2</sup>.

Проаналізуємо, як залежить кількість доменів обох знаків від часу. Дані залежності наведені на рис. 9 в подвійному логарифмічному масштабі. Для обох випадків спільним є те, що на початковому етапі еволюції системи кількість доменів обох знаків сильно зменшується за рахунок злиття дрібних доменів. Тільки через доволі великий проміжок часу поведінка у цих випадках починає значно різнитись. На верхній панелі рисунка протягом всього часу моделювання відбувається постій-

<sup>2</sup> На рис. 8 на верхній і нижній панелях по осі ординат відкладено однаковий діапазон значень, що становить 0,24, аби візуально можна було порівняти, наскільки сильно змінюються площі одна відносно іншої.

на зміна кількості доменів обох знаків. На вставці додатково показана зміна кількості доменів на відрізку часу  $t \in [100, 1000]$  в лінійному масштабі по обох осях. Між поведінкою доменів спостерігається певна кореляція – зі збільшенням одного типу доменів збільшується і кількість доменів з протилежним знаком, що цілком логічно, оскільки домени різного знаку один для одного є межами. Щоб уникнути непорозуміння варто відзначити важливу деталь. При аналізі зображень (наприклад рис. 7, правий нижній кут), ми не враховуємо періодичні граничні умови. Тобто в цій ситуації програмою буде ідентифікований один від'ємний і два додатних домени. Таке нелогічне на перший погляд співвідношення між кількостями доменів реалізується за рахунок обмеженості системи. Таку ж методику розрахунку ми використовували раніше в роботі [16].

На нижній панелі рис. 9 ( $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-2}$ ) система повільно еволюціонує до стану з одним від'ємним і двома додатними доменими (залежність в правому нижньому куті рис. 7). При цьому тут кількість доменів з часом зменшується набагато інтенсивніше. Якщо на верхній панелі рис. 9 для часу  $t = 1$  доменів обох знаків приблизно по 70, то на нижній панелі їх кількість для того самого часу становить вже приблизно по 10 доменів кожного типу.

Графіки залежності зміни середньої площі доменів  $\langle A \rangle$  обох типів наведені на рис. 10. Якісно залежності схожі на інвертовані залежності кількості доменів  $N$  від часу  $t$  (рис. 9).

В обох ситуаціях (рис. 10 верхня і нижня панелі) середня площа доменів з часом зростає, що можна пояснити зменшенням їх кількості. Цей процес відбувається одночасно зі збільшенням розмірів доменів. При  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-2}$  (нижня панель) площа доменів до кінця часу моделювання виходить на практично стаціонарний рівень, а при  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-3}$  стаціонарний режим не встановлюється (це краще видно на вставці). Середня площа доменів певного типу розраховувалась як відношення сумарної площі доменів цього типу до їх кількості. Тобто фактично залежності представляють відношення загальної площі доменів  $A_{\text{full}}$  (рис. 8) до їх кількості  $N$  (рис. 9). Різниця полягає в тому, що на рис. 8 наведена нормована на повний розмір системи площа, а на рис. 10 показано абсолютне значення площі, де загальна площа

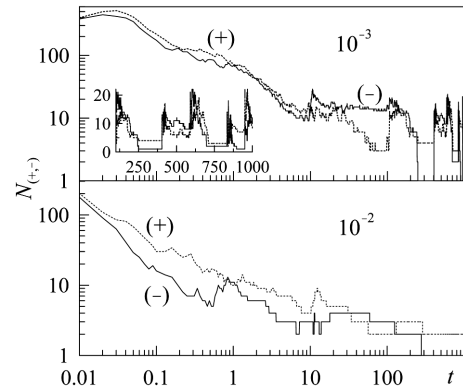


Рис. 9. Залежність від часу  $t$  кількості доменів  $N$  з додатним (пунктирна лінія) і від'ємним (суцільна лінія) значеннями параметра порядку. Верхня панель:  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-3}$ , нижня панель:  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-2}$

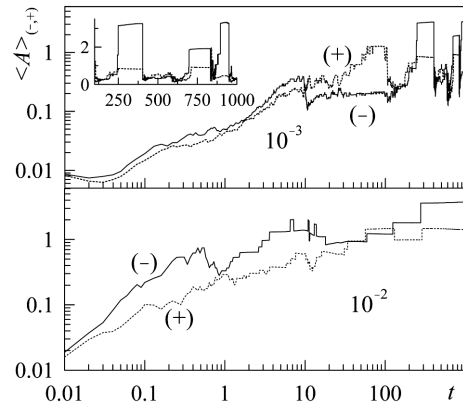


Рис. 10. Залежність від часу  $t$  середньої площі  $\langle A \rangle$  доменів з додатним (пунктирна лінія) і від'ємним (суцільна лінія) значеннями параметра порядку. Верхня панель –  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-3}$ , нижня панель –  $D_{uS} = D_{vS} = 10^{-2}$

системи становить  $256 \times 256 \times H^2 = 6,5536$  квадратних одиниць,  $H$  – параметр дискретизації, який входить у рівняння (12)–(14).

## 5. Аналіз фрактальних властивостей розподілів параметра порядку

Як було зазначено вище, досить потужними методами дослідження поверхонь є мультифрактальний флуктуаційний аналіз і методи, засновані на аналізі спектральної густини  $C(q)$  [19–21]. На нашу думку, більш універсальною методикою є остання, оскільки вона базується на безпосередньому

аналізі отриманої залежності спектральної густини  $C(q)$ , яку можна розрахувати для будь-якої поверхні. У той час як мультифрактальний флуктуаційний аналіз дозволяє аналізувати лише поверхні, які характеризуються фрактальними властивостями. Однак обидва підходи дають цікаві результати саме для фрактальних об'єктів. Існує декілька означень функції  $C(q)$ , ми будемо використовувати означення з роботи [21]:

$$C(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2x \langle h(\mathbf{x})h(\mathbf{0}) \rangle e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}}, \quad (22)$$

де  $h$  – висота точок поверхні,  $\mathbf{x}$  – радіус-вектор ( $|\mathbf{x}| \equiv x$ ),  $\mathbf{q}$  – хвильовий вектор. Для розрахунку залежності  $C(\mathbf{q})$  зручно використати вбудовану у MATLAB функцію двовимірного фур'є-перетворення  $Y = \text{fft2}(X, m, n)$ . Якщо матриця  $X$  має розмір  $m \times n$ , то дана вбудована функція дозволяє ефективно і швидко знаходити суми

$$Y_{p+1,q+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} X_{j+1,k+1} e^{-2\pi i(jp/M+kq/N)}. \quad (23)$$

В результаті отримаємо двовимірну матрицю значень комплексної змінної  $Y$ , яка за розміром співпадає з матрицею  $X$ . Далі необхідно розрахувати матрицю  $H(m, n)$ , значення якої дорівнюють квадрату модуля  $|Y(m, n)|^2$ . Після цього виконуємо радіальне усереднення матриці  $H(m, n)$  і отримуємо одновимірну функцію  $H(q)$ , де хвильовий вектор розраховується за формулою

$$q = \frac{2\pi j}{\min(m, n) \Delta}, \quad (24)$$

де  $\min(m, n)$  – мінімальне значення серед  $m$  і  $n$ ;  $\Delta$  – горизонтальна відстань між сусідніми точками у файлі даних зі значеннями висот;  $j$  – ціле число, що змінюється від 1 до  $[\min(m, n)/2 - 1]$ . При лінійному розмірі системи  $L$  (сторона квадрата) мінімальне і максимальне значення хвильового вектора  $q$  задаються як  $q_{\min} = 2\pi/L$  і  $q_{\max} = \pi \min(m, n)/L$ . Далі розраховуємо одновимірну функцію  $C(q)$  за формулою:

$$C(q) = \frac{H(q) \Delta^2}{(2\pi)^2 \min(m, n)^2}. \quad (25)$$

Наведена процедура розрахунку величини спектральної густини дозволяє знайти функцію  $C(q)$ ,

яка співпадає із означенням (22). Функція  $C(q)$  дозволяє аналізувати шорсткі фрактальні поверхні, які часто утворюються у різноманітних експериментах (див., наприклад, [30–32]) за рахунок внутрішніх процесів самоорганізації. Якщо поверхням притаманні фрактальні властивості, для них за формулою [21]:

$$C(q) = C_0 \left( \frac{q}{q_0} \right)^{-2(1+H)} \quad (26)$$

може бути розрахований класичний показник Херста  $H$ , із яким пов'язана фрактальна розмірність поверхні  $D_f = 3 - H$ .

У нашому випадку за зовнішнім виглядом рис. 6 логічно припустити, що фрактальними властивостями можуть володіти розподіли, наведені на верхній панелі рисунка, що були отримані при параметрах  $D_{us} = D_{vs} = 10^{-3}$ . Для цих поверхонь були проведені розрахунки  $C(q)$ , які вказують на те, що дані розподіли не мають фрактальних характеристик. Однак у природі майже завжди у різноманітних процесах самоорганізації утворюються саме фрактальні об'єкти. Це свідчить про те, що наявність процесу самоорганізації (який безсумнівно може бути поданий системою Лоренца) не є достатньою умовою виникнення фрактальних властивостей. Деякі автори стверджують, що важливу роль у формуванні фрактальних властивостей відіграють випадкові впливи [27, 33], дія яких може бути описана при врахуванні у рівняннях Лоренца стохастичних доданків, що ми плануємо зробити у наступних роботах.

## 6. Висновки

У роботі було чисельно досліджено систему Лоренца при врахуванні в кожному рівнянні градієнтних доданків, які описують просторовий розподіл основних параметрів. Встановлено, що в залежності від ступеня впливу градієнтних внесків реалізується три принципово різні режими. У першому випадку, як і в початковій системі, здійснюється режим детерміністичного хаосу. При цьому просторовий розподіл параметра порядку еволюціонує і не приходить з часом до якогось стаціонарного розподілу. У другому випадку з часом встановлюється повільно еволюціонуючий близький до стаціонарного стану розподіл параметра порядку, в якому система поділяється приблизно на дві рівні

частини з додатним і від'ємним значеннями параметра порядку (проте таке пропорційне розподілення здійснюється за рахунок певних початкових умов). І в останньому режимі відбувається швидка гомогенізація системи, при якій параметр порядку приймає однакові значення по всій площі моделювання, а система показує однорідний режим, який повторює класичний аттрактор Лоренца. В подальшому ми плануємо провести дослідження системи Лоренца при наявності флуктуацій, які можуть привести до істотної зміни характеру поведінки динамічної системи, як наприклад, у моделі зсувного плавлення [29].

*Робота виконана в рамках держбюджетної тематики № 0117U003923 Міністерства освіти і науки України (2017–2020 рр.). Частково робота підтримана Міністерством освіти і науки України у рамках гранту Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених "Перехідний режим між адгезією і ковзанням у тангенціальному динамічному контакті для нормальних і градієнтних матеріалів" (конкурс ДФ-ФД Ф82, номер держреєстрації 0119U103175).*

1. H. Haken. *Synergetics: An Introduction. Nonequilibrium Phase Transition and Self-Organization in Physics, Chemistry, and Biology* (Springer-Verlag, 1978) [ISBN: 978-3-642-96469-5].
2. A.V. Voronov, V.M. Petnikova, V.V. Shuvalov. "Magnetodipole" self-organization of charge carriers in high- $T_c$  superconductors and the kinetics of phase transition. *J. Exp. Theor. Phys.* **93**, 1091 (2001).
3. R. Meucci, F. Salvadori, K.A.M. Al Naimee et al. Attractor selection in a modulated laser and in the Lorenz circuit. *Philos. Trans. Royal Soc. A* **366**, 475 (2008).
4. S.E. Boulfefel, A.R. Oganov, S. Leoni. Understanding the nature of "superhard graphite". *Sci. Rep.* **2**, 47 (2012).
5. L. Yong, Z.X.-Fang, B.Q.-Sheng. Synchronization and control of autocatalytic chemical reaction in continuous stirring tank reactor. *Acta Phys. Sin.* **57**, 4748 (2008).
6. В.И. Засимчук, Е.Э. Засимчук, А.С. Гаценко. Самоорганизация в вязких жидкостях. *Металлофиз. новейшие технол.* **39**, 1435 (2017).
7. H. Haken. *Information and Self-Organization. A Macroscopic Approach to Complex Systems* (Springer, 2006) [ISBN: 978-3-540-33023-3].
8. Y. Holovatch, R. Kenna, S. Thurner. Complex systems: physics beyond physics. *Eur. J. Phys.* **38**, 023002 (2017).
9. E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963).
10. I.A. Shuda, S.S. Borysov, A.I. Olemskoi. Noise-induced oscillations in non-equilibrium steady state systems. *Phys. Scr.* **79**, 065001 (2009).
11. A.I. Olemskoi, O.V. Yushchenko, T.I. Zhilenko. Investigation of conditions for a self-organized transition to the bistable regime of quasi-equilibrium condensation and stripping of the surface. *Phys. Solid State* **53**, 845 (2011).
12. А.И. Олемской, А.В. Хоменко. Трехпараметрическая кинетика фазового перехода. *ЖЭТФ* **110**, 2144 (1996).
13. A.I. Olemskoi, A.V. Khomenko, V.P. Koverda. Explosive crystallization of ultradisperse amorphous film. *Physica A* **284**, 79 (2000).
14. A.I. Olemskoi, A.V. Khomenko, D.O. Kharchenko. Self-organized criticality within fractional Lorenz scheme. *Physica A* **323**, 263 (2003).
15. I.A. Lyashenko, N.N. Manko. Synergetic model of boundary friction taking into account spatial nonuniformity of stresses, strain, and temperature. *Tech. Phys.* **59**, 1737 (2014).
16. Ya.A. Lyashenko. Formation of heterogeneous spatial structures in a boundary lubrication layer during friction. *J. Appl. Mech. Tech. Ph.* **57**, 136 (2016).
17. А.А. Самарский, А.В. Гулин. *Устойчивость разностных схем* (Наука, 1973).
18. G.E.P. Box, M.E. Muller. A Note on the generation of random normal deviates. *Ann. Math. Statist.* **29**, 610 (1958).
19. J.W. Kantellhardt, S.A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde et al. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A* **316**, 87 (2002).
20. O.I. Olemskoi, S.M. Danyl'chenko, V.M. Borysyuk, I.O. Shuda. Multifractal analysis of X-ray patterns of complex condensed media. *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.* **31**, 777 (2009).
21. B.N.J. Persson. On the fractal dimension of rough surfaces. *Tribol. Lett.* **54**, 99 (2014).
22. E.S. Gadelmawla, M.M. Koura, T.M.A. Maksoud, I.M. Elewa, H.H. Soliman. Roughness parameters. *J. Mater. Process. Technol.* **123**, 133 (2002).
23. Q. Li, R. Pohrt, V.L. Popov. Adhesive strength of contacts of rough spheres. *Front. Mech. Eng.* **5**, 1 (2019).
24. Q. Li, R. Pohrt, I.A. Lyashenko, V.L. Popov. Boundary element method for nonadhesive and adhesive contacts of a coated elastic half-space. *Proc. Inst. Mech. Eng. J.* **234** (1), 73 (2019).
25. K.L. Johnson. The adhesion of two elastic bodies with slightly wavy surfaces. *Int. J. Solids Struct.* **32**, 423 (1995).
26. Z.M. Makukha, S.I. Protsenko, L.V. Odnodvoret, I.Yu. Protsenko. Magneto-strain effect in double-layer film systems. *J. Nano-Electron. Phys.* **4**, 02043 (2012).
27. A.E. Filippov, S.N. Gorb. Methods of the pattern formation in numerical modeling of biological problems. *FU Mech. Eng.* **17**, 217 (2019).
28. A.I. Dmitriev, A.Yu. Nikonov, W. Osterle, B.Ch. Jim. Verification of Rabinowicz' criterion by direct molecular dynamics modeling. *FU Mech. Eng.* **17**, 207 (2019).

29. I.A. Lyashenko, V.N. Borysiuk, N.N. Manko. Statistical analysis of self-similar behaviour in the shear induced melting model. *Condens. Matter Phys.* **17**, 23003 (2014).
30. V. Perekrestov, V. Latyshev, A. Korniyushchenko, Y. Kosminska. Formation, charge transfer, structural and morphological characteristics of ZnO fractal-percolation nanosystems. *J. Electron. Mater.* **48**, 2788 (2019).
31. V.M. Latyshev, V.I. Perekrestov, A.S. Korniyushchenko, I.V. Zahaiko. Formation of porous zinc nanosystems using direct and reverse flows of DC magnetron sputtering. *Functional Materials* **24**, 154 (2017).
32. A.S. Korniyushchenko, V.V. Natalich, V.I. Perekrestov. Formation of copper porous structures under near-equilibrium chemical vapor deposition. *J. Cryst. Growth* **442**, 68 (2016).
33. A.D. Pogrebnyak, V.N. Borisyuk, A.A. Bagdasaryan, O.V. Maksakova, E.V. Smirnova. The multifractal investigation of surface microgeometry of (Ti-Hf-Zr-V-Nb)N nitride coatings. *J. Nano- Electron Phys.* **6**, 04018 (2014).

Одержано 17.09.19

*Z.M. Liashenko, I.A. Lyashenko*

#### INFLUENCE OF SPATIAL INHOMOGENEITY ON THE FORMATION OF CHAOTIC MODES AT THE SELF-ORGANIZATION PROCESS

#### S u m m a r y

The Lorentz system of equations, in which gradient terms are taken into account, has been solved numerically. Three fundamentally different modes of evolution are considered. In the first mode, the spatial distribution of the order parameter permanently changes in time, and domains of two types with positive and negative order parameter values are formed. In the second mode, the order parameter distribution is close to the stationary one. Finally, in the third mode, the order parameter is identical over the whole space. The dependences of the average area of domains, their number, and their total area on the time are calculated in the first two cases. In the third case, the contribution of gradient terms completely vanishes, and a classical Lorenz attractor is realized.