

О.М. ЧУБАЙ, А.А. РОВЕНЧАК

Кафедра теоретичної фізики, Львівський національний університет імені Івана Франка
(Вул. Драгоманова, 12, Львів 79005; e-mail: andrij.rovenchak@lnu.edu.ua)

ІДЕАЛЬНИЙ БОЗЕ-ГАЗ У ДЕЯКИХ ДЕФОРМОВАНИХ ТЕРМОДИНАМІКАХ. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ПАРАМЕТРАМИ ДЕФОРМАЦІЙ

УДК 530.145+531.19

У роботі розглянуто два підходи до побудови термодинаміки в межах q - та μ -формалізму, що відповідають певним деформаціям алгебри операторів породження–знищення. Шляхом зіставлення отриманих результатів для другого віріального коефіцієнта встановлено наближену відповідність між ідеальними q - та μ -деформованими бозе-газами, що не залежить від вимірності простору. Розбіжності виникають лише на рівні третього віріального коефіцієнта. Показано, як за допомогою двопараметричної неадитивної статистики Поліхронакоса можна змудувати μ -деформований бозе-газ з точністю до третього віріального коефіцієнта включно.

Ключові слова: q - та μ -деформована термодинаміка, q - та μ -деформована алгебра, похідна Джексона, кластерні інтеграли, віріальні коефіцієнти, неадитивна статистика Поліхронакоса.

1. Вступ

Історія використання нестандартних квантових розподілів сягає 1940-х років, коли Джованні Джентіле з колегами пробували застосувати статистику, проміжну між бозонною та ферміонною [1], до опису властивостей рідкого гелію [2, 3]. Власне, такий підхід, що полягає у використанні нестандартних статистик для ефективного моделювання реальних фізичних систем, і є основною мотивацією вивчення різних способів модифікації квантових розподілів [4–8]. Прикладом може бути як ефективне врахування міжчастинкової взаємодії [9, 10], так і космологічні моделі [11, 12]. У результаті часто вдається описати складні фізичні явища за допомогою простішого математичного апарату, що особливо актуально в дослідженнях багаточастинкових систем.

Один із варіантів – це деформація комутаційних співвідношень між операторами породження–знищення [13–19]. Відповідні квантові алгебри нині активно застосовують для аналізу складних фізичних систем [20]. Наприклад, термодинаміку бозе-систем та явище бозе-конденсації вивчали за їх допомогою в працях [21, 22], у статті [23] показано, як ефективно врахувати взаємодію та структуру частинок за допомогою $\tilde{\mu}$, q -деформованих

бозонів, а в [24, 25] μ - та q -деформовані бозони розглядали як моделі темної матерії.

У цій статті розглянуто термодинаміку ідеальних q - та μ -деформованих бозе-газів [26–29], що може бути побудована за допомогою формалізму q - та μ -числення відповідно [29, 30]. Мета роботи полягає в знаходженні відповідностей між двома підходами через встановлення зв'язку між параметрами деформацій. За допомогою іншого типу модифікації статистики – феноменологічним вибором виразу для чисел заповнення – вдається також досягнути точнішого моделювання одного з розглянутих типів деформованої термодинаміки.

Виклад матеріалу має таку структуру. У розділі 2 розглянуто властивості q -деформованої алгебри та показано один зі способів побудови q -деформованої термодинаміки. У розділі 3 охарактеризовано μ -деформовану алгебру та описано концепцію побудови відповідної термодинаміки. З міркувань цілісності подання матеріалу в розділах 2–3 коротко підсумовано основні положення праць [26, 29, 31, 32]. Розділ 4 присвячено загальним співвідношенням, що стосуються віріальних і кластерних розвинень. Там також наведено числові розрахунки віріальних коефіцієнтів для випадку q - та μ -деформацій і встановлено зв'язок між параметрами таких систем. Двопараметричну модель неадитивної статистики Поліхронакоса використано

як наближення для розрахунку віріальних коефіцієнтів системи μ -деформованих бозонів у розділі 6. Завершується стаття короткими висновками.

2. q -деформована алгебра та термодинаміка q -деформованого газу

Розглянемо основні моменти побудови q -деформованої алгебри та відповідної термодинаміки [13, 32]. Оператори породження a^\dagger та знищення a задовольняють таке комутаційне співвідношення, записане через q -деформований комутатор:

$$[a, a^\dagger]_q = aa^\dagger - qa^\dagger a = 1. \quad (2.1)$$

Це лише один із можливих способів узагальнення звичайного комутатора, див., наприклад, [14, 15].

Оператор кількості частинок N у q -деформованому випадку не зводиться до $a^\dagger a$, його комутатори з операторами a^\dagger і a мають вигляд:

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [N, a] = -a, \quad (2.2)$$

і додатково:

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \quad (2.3)$$

Діючи на вакуумний стан $|0\rangle$ оператором породження, отримуємо простір векторів $|n\rangle$:

$$(a^\dagger)^n |0\rangle = \text{const} |n\rangle, \quad (2.4)$$

що є власними векторами оператора N :

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \quad (2.5)$$

Водночас:

$$a|0\rangle = 0. \quad (2.6)$$

Можемо записати:

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{[n]_q!}} |0\rangle, \quad (2.7)$$

причому q -факторіал визначається як:

$$[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \dots [1], \quad (2.8)$$

де так зване (базове) q -число:

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (2.9)$$

Остаточно отримаємо

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{[n+1]_q} |n+1\rangle, \quad (2.10)$$

$$a |n\rangle = \sqrt{[n]_q} |n-1\rangle. \quad (2.11)$$

У границі $q \rightarrow 1$ базове число $[n]_q$ зводиться просто до числа n , і всі наведені вище співвідношення переходять у стандартні бозонівські.

Попарні добутки операторів породження-знищення записуються у вигляді

$$a^\dagger a = [N]_q, \quad aa^\dagger = [N+1]_q, \quad (2.12)$$

а для оператора N можна формально отримати такий вираз:

$$N = \frac{1}{\ln q} \ln \left(1 + (q-1)a^\dagger a \right). \quad (2.13)$$

Проаналізуємо далі один зі способів побудови термодинаміки q -деформованого газу [27, 32].

У підході великого канонічного ансамблю запишемо гамільтоніан:

$$H = \sum_j (\varepsilon_j - \mu) N_j, \quad (2.14)$$

де ε_j – енергія, N_j – оператор кількості частинок, що відповідають станом j , а μ – хімічний потенціал. Велика статистична сума буде:

$$\Xi = \text{Sp} e^{-\beta H}, \quad (2.15)$$

де $\beta = 1/T$ – обернена температура. Зі стандартного означення термодинамічного середнього оператора O :

$$\langle O \rangle = \frac{1}{\Xi} \text{Sp}(O e^{-\beta H}), \quad (2.16)$$

для середнього числа заповнення в j -му стані матимемо:

$$[n_j]_q = \frac{1}{\Xi} \text{Sp}(e^{-\beta H} a_j^\dagger a_j). \quad (2.17)$$

Оскільки n_j є власним значенням оператора N_j , із формули

$$N_j = \frac{1}{\ln q} \ln \left(1 + (q-1)a_j^\dagger a_j \right), \quad (2.18)$$

врахувавши, що $a_j^\dagger a_j = [n_j]_q$, ми отримаємо після низки перетворень такий вираз для чисел заповнення:

$$n_j = \frac{1}{\ln q} \ln \frac{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_j} - 1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_j} - q}, \quad (2.19)$$

де $z = e^{\beta \mu}$ – активність.

Послідовна побудова q -деформованої термодинаміки передбачає використання похідної Джексона замість звичайної похідної [31]. Для цього розглянемо логарифм великої статсуми:

$$\ln \Xi = - \sum_j \ln(1 - z e^{-\beta \varepsilon_j}) \quad (2.20)$$

і повну кількість частинок:

$$N = \sum_j n_j, \quad (2.21)$$

звідки легко переконалися в порушенні стандартного співвідношення

$$N \neq z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi. \quad (2.22)$$

Замінивши $\frac{\partial}{\partial z}$ на $D_q^{(z)}$,

$$D_q^{(z)} f(z) = \frac{f(qz) - f(z)}{z(q-1)}, \quad D_1^{(z)} = \frac{d}{dz} \quad (2.23)$$

– так звану похідну Джексона [33], будемо мати:

$$\begin{aligned} z D_q^{(z)} \ln \Xi &= \left(- \frac{1}{q-1} \ln \frac{1 - z q e^{-\beta \varepsilon_j}}{1 - z e^{-\beta \varepsilon_j}} \right) = \\ &= \sum_j \frac{\ln q}{q-1} \frac{1}{\ln q} \ln \frac{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_j} - 1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_j} - q} = \\ &= \frac{\ln q}{q-1} \sum_j n_j. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Незначно модифікуючи похідну Джексона,

$$\frac{q-1}{\ln q} D_q^{(z)} = \tilde{D}_q^{(z)}, \quad (2.25)$$

яка також зводиться до звичайної похідної у границі $q \rightarrow 1$, будемо мати аналог стандартного термодинамічного співвідношення:

$$N = z \tilde{D}_q^{(z)} \ln \Xi = \sum_j n_j. \quad (2.26)$$

Цікаво, що, наприклад, у праці [32] про додатковий множник при похідній Джексона не згадують.

Щоб зберегти звичний вигляд виразів для термодинамічних функцій, заміну похідних треба робити для змінних в експоненціальній формі ($z = e^{\beta \mu}$ або $y_j = e^{-\beta \varepsilon_j}$). Відповідно, при переході до q -деформованої термодинаміки, усі похідні потрібно переписати через z чи y_j і потім ввести похідну Джексона [31]. Прикладом може бути вираз для внутрішньої енергії. Замість стандартного

$$U = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi = \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_j \ln(1 - z e^{-\beta \varepsilon_j}) \quad (2.27)$$

потрібно зробити таке перетворення:

$$U = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial \beta} \tilde{D}_q^{(y_j)} \ln(1 - z y_j), \quad (2.28)$$

де

$$\tilde{D}_q^{(y_j)} f(y_j) = \frac{f(q y_j) - f(y_j)}{y_j(q-1)}.$$

У результаті внутрішня енергія у деформованому випадку набуде вигляду

$$U = \sum_j \varepsilon_j \frac{1}{\ln q} \ln \frac{e^{\beta \varepsilon_j} z^{-1} - 1}{e^{\beta \varepsilon_j} z^{-1} - q} = \sum_j \varepsilon_j n_j, \quad (2.29)$$

тобто збігається з очікуваним.

3. μ -деформована алгебра та μ -деформована термодинаміка

Новий спосіб побудови термодинаміки було запропоновано в контексті досліджень μ -деформованого осцилятора [17, 29], для якого алгебру операторів породження–знищення задано таким комутативним співвідношенням:

$$[a, a^\dagger] = \varphi(N) - \varphi(N+1), \quad a a^\dagger \equiv \varphi(N), \quad (3.1)$$

де структурна функція деформації

$$\varphi(N) = \frac{N}{1 + \mu N}. \quad (3.2)$$

Як і в попередньому випадку з q -деформацією, оператор кількості частинок N не зводиться до $a^\dagger a$, натомість маємо, як і в (2.2),

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [N, a] = -a. \quad (3.3)$$

Розглянемо μ -деформований аналог бозе-газу – багаточастинкову систему з гамільтоніаном:

$$H = \sum_j (\varepsilon_j - \nu) N_j, \quad (3.4)$$

де ε_j – одночастинкова енергія, N_j – оператор кількості частинок, що відповідають станів j , а ν – хімічний потенціал, який ми позначили іншою буквою для уникнення двозначностей.

Для логарифма великої статистичної суми $\Xi = \text{Sp } e^{-\beta H}$ маємо:

$$\ln \Xi = - \sum_j \ln(1 - z e^{-\beta \varepsilon_j}), \quad (3.5)$$

де $z = e^{\beta \nu}$ – активність. Повна кількість частинок визначається формулою:

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi. \quad (3.6)$$

Як деяку альтернативу звичайної похідної $\frac{d}{dx}$ та похідної Джексона, що виникала в q -деформації, тут використовують μ -похідну [29]:

$$\mathcal{D}_x^{(\mu)} x^n = [n]_\mu x^{n-1}, \quad (3.7)$$

де μ -число визначається як

$$[n]_\mu \equiv \frac{n}{1 + \mu n} = \varphi(n). \quad (3.8)$$

Якщо $\mu \rightarrow 0$, то похідна $\mathcal{D}_x^{(\mu)}$ переходить в звичайну похідну, а $[n]_{\mu \rightarrow 0} \rightarrow n$.

Замінивши $\frac{\partial}{\partial z}$ на $\mathcal{D}_z^{(\mu)}$, матимемо:

$$\begin{aligned} N^{(\mu)} &= z \mathcal{D}_z^{(\mu)} \ln \Xi = \\ &= -z \mathcal{D}_z^{(\mu)} \sum_j \ln(1 - z e^{-\beta \varepsilon_j}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Коли розкласти логарифм у ряд і почленно застосувати похідну $\mathcal{D}_z^{(\mu)}$ до змінної z , отримаємо:

$$\begin{aligned} N^{(\mu)} &= z \mathcal{D}_z^{(\mu)} \sum_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z e^{-\beta \varepsilon_j})^n}{n} = \\ &= \sum_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n \beta \varepsilon_j}}{n} [n]_\mu z^n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В основному стані енергія $\varepsilon_0 = 0$ і $z \rightarrow 1$, отже, доданок з $j = 0$ є розбіжним, тому його виділяють окремо:

$$N^{(\mu)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_\mu}{n} z^n + \sum_{j>0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_\mu}{n} z^n e^{-n \beta \varepsilon_j}. \quad (3.11)$$

Цей перший доданок – заповнення основного стану, що відповідає μ -деформованому аналогу бозе-конденсату:

$$n_0^{(\mu)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_\mu}{n} z^n. \quad (3.12)$$

Далі розглянемо ідеальний D -вимірний бозе-газ. Перейдемо від підсумовування за станами до інтегрування за енергіями з густиною станів:

$$g(\varepsilon) = \frac{V_D}{\Gamma(\frac{D}{2})} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{D}{2}} \varepsilon^{\frac{D}{2}-1}, \quad (3.13)$$

де m – маса частинки, а V_D – D -вимірний об'єм. Для деформованого аналога кількості частинок матимемо:

$$\begin{aligned} N^{(\mu)} &= n_0^{(\mu)} + \frac{V_D}{\Gamma(\frac{D}{2})} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{D}{2}} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_\mu}{n} z^n \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{\frac{D}{2}-1} e^{-n \beta \varepsilon}, \end{aligned}$$

що після інтегрування дає просто:

$$N^{(\mu)} = n_0^{(\mu)} + \frac{V_D}{\lambda^D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_\mu}{n^{D/2+1}} z^n, \quad (3.14)$$

де

$$\lambda = \left(\frac{2\pi\beta\hbar^2}{m} \right)^{1/2} \quad (3.15)$$

– довжина теплової хвилі де Бройля.

Для подальшої побудови μ -деформованої термодинаміки вводять деформовану велику статсуму $\ln \Xi^{(\mu)}$:

$$\ln \Xi^{(\mu)} = \left(z \frac{\partial}{\partial z} \right)^{-1} N^{(\mu)}, \quad (3.16)$$

де дія оберненого оператора зводиться до інтегрування

$$\left(z \frac{\partial}{\partial z} \right)^{-1} f(z) = \int_0^z dz' \frac{f(z')}{z'}, \quad (3.17)$$

тому

$$\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right)^{-1} z^n = \frac{z^n}{n},$$

і в результаті для $\ln \Xi^{(\mu)}$ матимемо ряд:

$$\ln \Xi^{(\mu)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_{\mu}}{n^2} z^n + \frac{V_D}{\lambda^D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_{\mu}}{n^{D/2+2}} z^n. \quad (3.18)$$

Пригадавши означення полілогарифма

$$\text{Li}_{\alpha}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha}}, \quad (3.19)$$

бачимо, що в нашому випадку зручно ввести таке його μ -узагальнення:

$$\text{Li}_{\alpha}^{(\mu)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n]_{\mu}}{n^{\alpha+1}} z^n, \quad (3.20)$$

яке переходить у звичайний полілогарифм, коли $[n]_{\mu} \rightarrow n$. Отже,

$$\ln \Xi^{(\mu)} = \text{Li}_1^{(\mu)}(z) + \frac{V_D}{\lambda^D} \text{Li}_{D/2+1}^{(\mu)}(z). \quad (3.21)$$

Звідси отримуємо рівняння стану:

$$\frac{PV_D}{T} = \ln \Xi^{(\mu)} = \text{Li}_1^{(\mu)}(z) + \frac{V_D}{\lambda^D} \text{Li}_{D/2+1}^{(\mu)}(z), \quad (3.22)$$

яким скористаємося в наступному розділі.

4. Віріальне розвинення

Знаходження зв'язку між різними дробовими статистиками полягає у зіставленні їх термодинамічних функцій, яке можна робити на підставі віріального розвинення [34-36]; далі за допомогою розрахованих виразів для віріальних коефіцієнтів вдається встановити відповідності між різними дробовими статистиками.

Віріальні коефіцієнти – це коефіцієнти віріального розкладу тиску багаточастинкової системи за густиною (концентрацією):

$$\frac{P}{T} = \frac{N}{V_D} \left[1 + b_2 \frac{N}{V_D} \lambda^D + b_3 \left(\frac{N}{V_D} \lambda^D \right)^2 + \dots \right], \quad (4.1)$$

де P – тиск, T – температура, $\frac{N}{V_D}$ – D -вимірна концентрація, λ – довжина теплової хвилі де Бройля.

500

Множники b_j – знерозмірені j -ті віріальні коефіцієнти. Перший коефіцієнт розкладу відповідає ідеальному газу, другий – враховує (ефективну) парну взаємодію між частинками газу, третій – взаємодію трьох частинок і т. д.

Перший крок отримання виразів для коефіцієнтів віріального розкладу – це кластерне розвинення великої статсуми у вигляді розкладу в ряд за активністю z :

$$\frac{1}{V_D} \ln \Xi = \sum_{\ell=1}^{\infty} B_{\ell} z^{\ell}, \quad (4.2)$$

де B_{ℓ} – так звані кластерні інтеграли. Віріальні коефіцієнти далі можна знайти за допомогою співвідношень:

$$b_2 \lambda^D = -\frac{B_2}{B_1^2}, \quad (4.3)$$

$$b_3 \lambda^{2D} = -2 \frac{B_3}{B_1^3} + 4 \frac{B_2^2}{B_1^4}. \quad (4.4)$$

Із рівняння стану (3.22), що відповідає μ -деформованій термодинаміці, відразу матимемо кластерні інтеграли (4.2), врахувавши розклади в ряд μ -деформованого полілогарифма (3.19):

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_D} \ln \Xi &= \frac{1}{V_D} \left(\text{Li}_1^{(\mu)}(z) + \frac{V_D}{\lambda^D} \text{Li}_{D/2+1}^{(\mu)}(z) \right) = \\ &= \frac{1}{V_D} \left(\frac{[1]_{\mu}}{1^2} z + \frac{[2]_{\mu}}{2^2} z^2 \frac{[3]_{\mu}}{3^2} z^3 + \dots \right) + \\ &+ \frac{1}{\lambda^D} \left(\frac{[1]_{\mu}}{1^{\frac{D}{2}+2}} z + \frac{[2]_{\mu}}{2^{\frac{D}{2}+2}} z^2 + \frac{[3]_{\mu}}{3^{\frac{D}{2}+2}} z^3 + \dots \right) = \\ &= B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

Звідси:

$$B_1 = \frac{[1]_{\mu}}{V_D} + \frac{1}{\lambda^D} \frac{[1]_{\mu}}{1}, \quad (4.6)$$

$$B_2 = \frac{[2]_{\mu}}{4V_D} + \frac{1}{\lambda^D} \frac{[2]_{\mu}}{2^{\frac{D}{2}+2}}, \quad (4.7)$$

$$B_3 = \frac{[3]_{\mu}}{9V_D} + \frac{1}{\lambda^D} \frac{[3]_{\mu}}{3^{\frac{D}{2}+2}}. \quad (4.8)$$

У термодинамічній границі, коли $V_D \rightarrow \infty$ (причому $N \rightarrow \infty$ і $\frac{N}{V_D} = \text{const}$), маємо

$$B_{\ell} = \frac{1}{\lambda^D} \frac{[\ell]_{\mu}}{\ell^{\frac{D}{2}+2}}. \quad (4.9)$$

Обчисливши кластерні інтеграли, знаходимо вирази для віріальних коефіцієнтів (4.3)–(4.4):

$$b_2^{(\mu)} = -\frac{[2]_\mu}{([1]_\mu)^2} \frac{1}{2^{D/2+2}}, \quad (4.10)$$

$$b_3^{(\mu)} = -\frac{2 \cdot [3]_\mu}{([1]_\mu)^3} \frac{1}{3^{D/2+2}} + \left(\frac{2 \cdot [2]_\mu}{([1]_\mu)^2} \frac{1}{2^{D/2+2}} \right)^2, \quad (4.11)$$

які при $D = 3$ збігаються з результатами праці [29].

Розрахуємо тепер кластерні інтеграли для q -деформацій. Їх можна легко знайти, знаючи вираз для чисел заповнення n_j :

$$\frac{N}{V_D} = \frac{1}{V_D} \sum_j n_j = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell B_\ell z^\ell. \quad (4.12)$$

Замінімо підсумовування за рівнями інтегралом з густиною станів [37]

$$g(\varepsilon) = \frac{V_D}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{D}{2}} \varepsilon^{\frac{D}{2}-1}. \quad (4.13)$$

Функція розподілу n_j нам відома [див. (2.19)]:

$$n_j = \frac{1}{\ln q} \ln \frac{e^{\beta\varepsilon_j} z^{-1} - 1}{e^{\beta\varepsilon_j} z^{-1} - q}.$$

Таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{N}{V_D} &= \frac{1}{V_D} \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) n(\varepsilon) = \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{D}{2}} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{\frac{D}{2}-1}}{\ln q} \ln \frac{1 - ze^{-\beta\varepsilon}}{1 - qze^{-\beta\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Враховуючи розклад логарифма в ряд, з точністю до z^3 матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{N}{V_D} &= -\frac{1}{\lambda^D \ln q} \left(z + \frac{1}{4} \frac{z^2}{2^{D/2-1}} + \frac{1}{9} \frac{z^3}{3^{D/2-1}} - \right. \\ &\quad \left. - qz - \frac{1}{4} \frac{q^2 z^2}{2^{D/2-1}} + \frac{1}{9} \frac{q^3 z^3}{3^{D/2-1}} \right) = \\ &= B_1 z + 2B_2 z^2 + 3B_3 z^3, \end{aligned} \quad (4.15)$$

звідки, знаючи кластерні інтеграли, знаходимо вирази для віріальних коефіцієнтів (4.3)–(4.4):

$$b_2^{(q)} = -\frac{\ln q}{2^{D/2+2}} \frac{q+1}{q-1}, \quad (4.16)$$

$$b_3^{(q)} = -\frac{2 \ln^2 q}{9 \cdot 3^{D/2}} \frac{q^3 - 1}{(q-1)^3} + \frac{\ln^2 q}{2^{D+2}} \frac{(q+1)^2}{(q-1)^2}. \quad (4.17)$$

5. Результати розрахунків віріальних коефіцієнтів

На рис. 1 наведено результати розрахунків віріальних коефіцієнтів $b_2^{(q)}$, $b_2^{(\mu)}$ для q - та μ -деформацій відповідно, у випадку вимірності простору $D = 3$. Загальний вигляд для $2 \leq D \leq 4$ показано на рис. 2.

Легко переконатись, що в границях $q \rightarrow 1$ та $\mu \rightarrow 0$, отримаємо вирази, які відповідають ідеальному бозе-газу, а саме:

$$b_2^{(q)} = -\frac{\ln q}{2^{D/2+2}} \frac{q+1}{q-1} \Bigg|_{q \rightarrow 1} = -\frac{1}{2^{D/2+1}}, \quad (5.1)$$

$$b_2^{(\mu)} = -\frac{[2]_\mu}{([1]_\mu)^2} \frac{1}{2^{D/2+2}} \Bigg|_{\mu \rightarrow 0} = -\frac{1}{2^{D/2+1}}. \quad (5.2)$$

Таким чином, наприклад, коли вимірність простору $D = 2$, другий віріальний коефіцієнт:

$$b_2^{(q)} = -\frac{1}{4} \quad \text{і} \quad b_2^{(\mu)} = -\frac{1}{4},$$

що збігається з очікуваним [34].

Порівнюючи вирази для другого віріального коефіцієнта, можемо встановити наближену відповідність між q - та μ -деформованими бозе-газами. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$b_2^{(q)} = b_2^{(\mu)}. \quad (5.3)$$

Відзначимо, що результат розв'язування цього рівняння не залежить від вимірності простору D , оскільки відповідні множники скорочуються. Отримана залежність $\mu(q)$ трохи громіздка,

$$\begin{aligned} \mu(q) &= \frac{1}{2(q-1)} \left\{ 2(1-q) + (1+q) \ln q - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2(1-q^2) \ln q + (1+q)^2 \ln^2 q} \right\}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

тому її зручно зобразити графічно (див. рис. 3).

Результати розрахунків для третього віріального коефіцієнта у двовимірному випадку показано на рис. 4. У граничних випадках, що відповідають звичайному бозе-газові ($q = 1$ та $\mu = 0$), отримуємо результат $1/36$, як і повинно бути [34].

Цікаво перевірити, як відрізнятимуться треті віріальні коефіцієнти для різних деформацій. Наприклад, у вираз $b_3^{(\mu)}$ замість параметра μ підставимо його залежність від q (5.3) і прирівняємо до

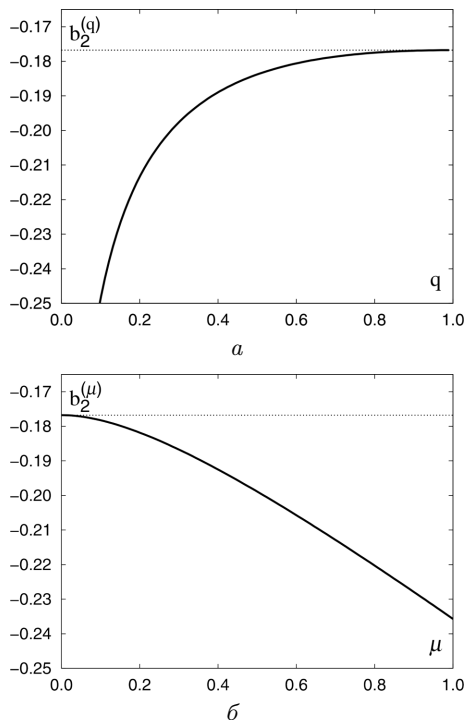


Рис. 1. Другий віріальний коефіцієнт b_2 для вимірності простору $D = 3$. Графік (а) відповідає q -деформації, (б) – μ -деформації

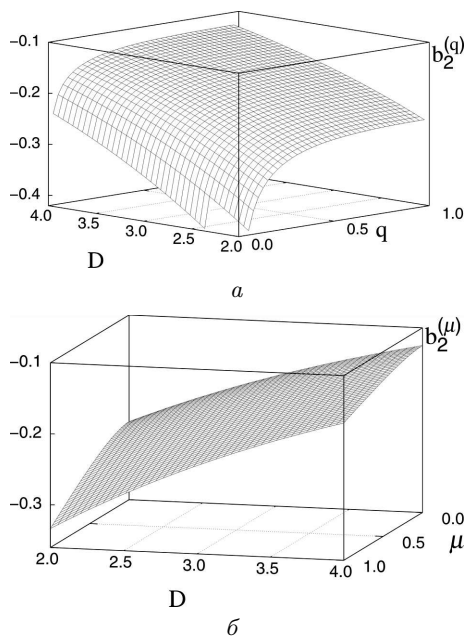


Рис. 2. Другий віріальний коефіцієнт b_2 для вимірності простору $2 \leq D \leq 4$. Графік (а) відповідає q -деформації, (б) – μ -деформації

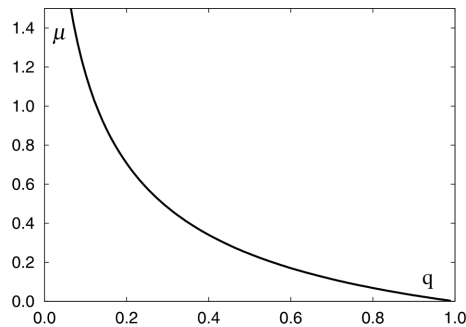


Рис. 3. Залежність $\mu(q)$ [формула (5.4)], отримана на підставі розв'язування рівняння (5.3)

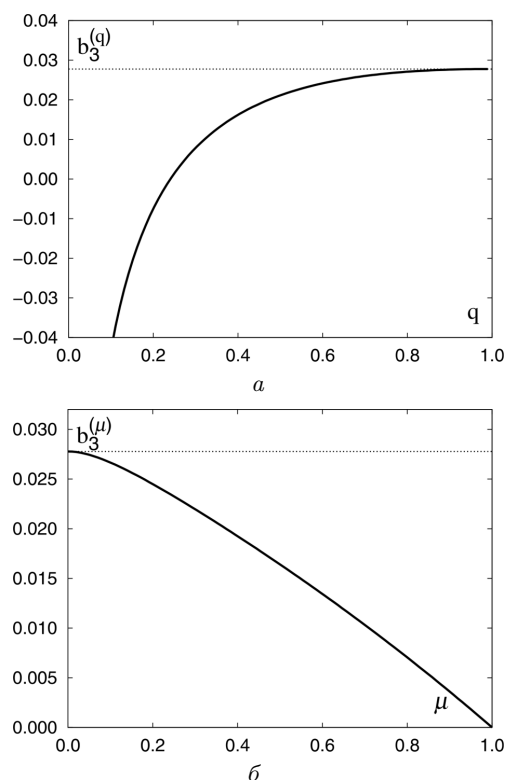


Рис. 4. Третій віріальний коефіцієнт b_3 для вимірності простору $D = 2$. Графік (а) відповідає q -деформації, (б) – μ -деформації

$b_3^{(q)}$. Результати для різних вимірностей простору показано на рис. 5. Легко бачити, що зі зростанням вимірності простору D різниця між віріальними коефіцієнтами зменшується.

Отже, за другим віріальним коефіцієнтом ми встановили наближену відповідність між q - та μ -деформованими бозе-газами, що не залежить від вимірності простору. Однак вже на рівні третього

віріального коефіцієнта така залежність проявляється, тому для побудови точнішого відповідника (скажімо, для μ -деформованого бозе-газу) можна використовувати двопараметричну статистику. Як варіант, замість q -деформації можна розглянути p, q -деформацію [38]. Ми ж у наступному розділі скористаємося одним із видів двопараметричної статистики, запропонованим у працях [35, 39].

6. Двопараметрична модель як наближення μ -деформованого бозе-газу

Змодельюємо термодинаміку μ -деформованого бозе-газу за допомогою неадитивної статистики Поліхронакоса [35, 39], в якій числа заповнення мають вигляд

$$n_j^{\text{NAPS}} = \frac{1}{z^{-1}e_Q^{\beta\varepsilon_j} - \gamma}, \quad (6.1)$$

де e_Q^x – Q -експонента Цалліса [40]:

$$e_Q^x = \begin{cases} e^x, & \text{якщо } Q = 1, \\ [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}, & \text{якщо } Q \neq 1 \text{ і } 1 + (1 - Q)x > 0, \\ 0^{1/(1-q)}, & \text{якщо } Q \neq 1 \text{ і } 1 + (1 - Q)x \leq 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

(Зазвичай в цьому позначенні використовують маленьку літеру q , однак ми замінили її на велику Q , щоб відрізнити від параметра q -деформації).

Кластерні інтеграли розрахуємо зі співвідношення (4.12):

$$\begin{aligned} \frac{N}{V_D} &= \frac{1}{V_D} \sum_j n_j^{\text{NAPS}} = \frac{1}{V_D} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{g(\varepsilon)}{z^{-1}e_Q^{\beta\varepsilon} - \gamma} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2})} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{D}{2}} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{\frac{D}{2}-1} \sum_{\ell=1}^\infty \frac{\gamma^{\ell-1}}{(e_Q^{\beta\varepsilon})^\ell} z^\ell = \\ &= \sum_{\ell=1}^\infty \ell B_\ell z^\ell. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Працюючи з експонентами Цалліса, потрібно пам'ятати, що для них не справджуються правила роботи зі звичайними експонентами, зокрема $(e_Q^x)^y \neq e_Q^{xy}$ та $e_Q^{x+y} \neq e_Q^x e_Q^y$ [41]. Крім того, якщо параметр $Q > 1$, то область ненульових значень функції e_Q^x справа обмежена аргументом $x_0 = 1/(Q - 1)$, див. означення (6.2).

У результаті після нескладних розрахунків для кластерних інтегралів матимемо:

$$B_\ell = \frac{1}{\lambda^D} \frac{\gamma^{\ell-1}}{\ell} \{\ell; D/2\}_Q, \quad (6.4)$$

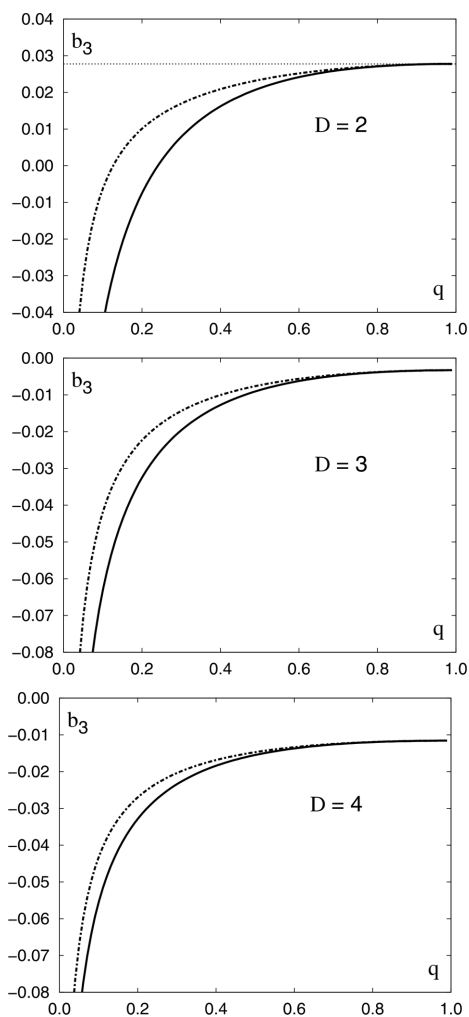


Рис. 5. Третій віріальний коефіцієнт для різних вимірностей простору D . Суцільні лінії відповідають $b_3^{(q)}$, штрихпунктирні – $b_3^{(\mu)}$, де параметр $\mu = \mu(q)$ відповідно до рівняння (5.4)

де введено скорочене позначення для таких виразів, порівн. [42]:

$$\begin{aligned} \{\ell; s\}_Q &= \ell^{-s}, & \text{якщо } Q = 1, \\ \{\ell; s\}_Q &= \frac{B\left(s, \frac{\ell}{1-Q} - s\right)}{(1-Q)^s \Gamma(s)}, & \text{якщо } Q < 1, \\ \{\ell; s\}_Q &= \frac{B\left(s, \frac{\ell}{Q-1} + 1\right)}{(Q-1)^s \Gamma(s)}, & \text{якщо } Q > 1. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Тут $B(x, y)$ – бета-функція Ейлера.

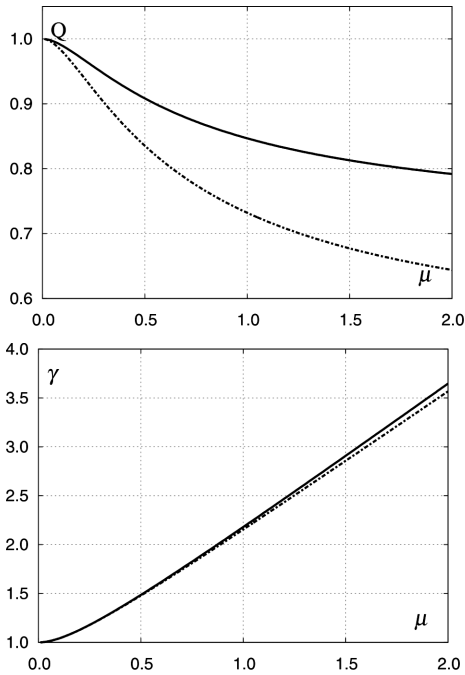


Рис. 6. Залежності параметрів неадитивної статистики Поліхронакоса від параметра μ -деформованого бозе-газу. Суцільні лінії відповідають $D = 3$, штрихпунктирні – $D = 2$

Віріальні коефіцієнти будуть функціями двох параметрів, Q та γ :

$$b_2^{\text{NAPS}}(Q, \gamma) = -\frac{\gamma \{2; D/2\}_Q}{2 \{1; D/2\}_Q^2}, \quad (6.6)$$

$$b_3^{\text{NAPS}}(Q, \gamma) = -\frac{2\gamma^2 \{3; D/2\}_Q}{3 \{1; D/2\}_Q^3} + \gamma^2 \frac{\{2; D/2\}_Q^2}{\{1; D/2\}_Q^4}. \quad (6.7)$$

Розв'язуючи далі систему рівнянь

$$\begin{cases} b_2^{\text{NAPS}}(Q, \gamma) = b_2^{(\mu)}, \\ b_3^{\text{NAPS}}(Q, \gamma) = b_3^{(\mu)}, \end{cases} \quad (6.8)$$

отримуємо залежності параметрів Q та γ від μ . Їх показано на рис. 6.

Отже, термодинаміку μ -деформованого бозе-газу з точністю до третього віріального коефіцієнта включно можна описувати за допомогою неадитивної статистики Поліхронакоса, параметри якої $Q(\mu)$ та $\gamma(\mu)$ визначаються з системи рівнянь (6.8).

7. Висновки

У роботі розглянуто два підходи до модифікації алгебри операторів породження–знищення і, від-

повідно, два різних способи побудови термодинаміки систем, що відповідають так званим q - та μ -деформаціям. Показано, як знайти аналітичні вирази для термодинамічних функцій ідеального D -вимірного q - та μ -деформованого бозе-газу. З міркувань зручності читання й цілісності викладу наведено основні вирази, отримані іншими авторами, які подекуди також узагальнено на D -вимірний випадок.

Шляхом зіставлення отриманих результатів для другого віріального коефіцієнта встановлено наближену відповідність між q - та μ -деформованими бозе-газами, що не залежить від вимірності простору. Однак вже на рівні третього віріального коефіцієнта така залежність буде проявлятися, тому для побудови точніших відповідників треба використовувати двопараметричні деформації. Як приклад, розглянуто неадитивну статистику Поліхронакоса, для параметрів якої розраховано залежності $Q(\mu)$ та $\gamma(\mu)$, що забезпечують відтворення термодинаміки μ -деформованого бозе-газу до третього віріального коефіцієнта включно.

Цю роботу частково профінансовано в межах проекту ФФ-83Ф (номер держреєстрації 0119U002203) МОН України.

1. G. Gentile. Osservazioni sopra le statistiche intermedie. *Nuovo Cimento* **17**, 493 (1940).
2. G. Gentile. Le statistiche intermedie e le proprietà dell'elio liquido. *Nuovo Cimento* **19**, 109 (1942).
3. H. Einbinder. Quantum statistics and the \aleph theorem. *Phys. Rev.* **74**, 805 (1948).
4. H.S. Green. A generalized method of field quantization. *Phys. Rev.* **90**, 270 (1953).
5. J. M. Leinaas, J. Myrheim. On the theory of identical particles. *Nuovo Cimento B* **37**, 1 (1977).
6. F.D.M. Haldane. "Fractional statistics" in arbitrary dimension: A generalization of the Pauli principle. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 937 (1991).
7. Y.-S. Wu. Statistical distribution for generalized ideal gas of fractional-statistics particles. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 922 (1994).
8. A.P. Polychronakos. Probabilities and path-integral realization of exclusion statistics. *Phys. Lett. B* **365**, 202 (1996).
9. D.-V. Anghel. Fractional exclusion statistics: the method for describing interacting particle systems as ideal gases. *Phys. Scr.* **T151**, 014079 (2012).
10. I.O. Vakarchuk, G. Panochko. The effective mass of an impurity atom in the Bose liquid with a deformed Heisenberg algebra. *Ukr. J. Phys.* **62**, 123 (2017).

11. Z. Ebadi, B. Mirza, H. Mohammadzadeh. Infinite statistics condensate as a model of dark matter. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11**, 057 (2013).
12. A. Guha, P.S. Bhupal Dev, P.K. Das. Model-independent astrophysical constraints on leptophilic Dark Matter in the framework of Tsallis statistics. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2019**, 032 (2019).
13. M. Arik, D.D. Coon. Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states. *J. Math. Phys.* **17**, 524 (1976).
14. L.C. Biedenharn. The quantum group $SU_q(2)$ and a q -analogue of the boson operators. *J. Phys. A* **22**, L873 (1989).
15. A. Macfarlane. On q -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)_q$. *J. Phys. A* **22**, 4581 (1989).
16. O.W. Greenberg. Example of infinite statistics. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 705 (1990).
17. A. Jannussis. New deformed Heisenberg oscillator. *J. Phys. A* **26**, L233 (1993).
18. I.M. Burbán. On $(p, q; \alpha, \beta, l)$ -deformed oscillator and its generalized quantum Heisenberg–Weyl algebra. *Phys. Lett. A* **366**, 308 (2007).
19. A.M. Gavriliuk, I.I. Kachurik. Nonstandard deformed oscillators from q - and p, q -deformations of Heisenberg algebra. *SIGMA* **12**, 047 (2016).
20. W.S. Chung, A. Algin. Modified multi-dimensional q -deformed Newton oscillators: Algebra, interpolating statistics and thermodynamics. *Ann. Phys.* **409**, 167911 (2019).
21. A. Algin, A. Olkun. Bose–Einstein condensation in low dimensional systems with deformed bosons. *Ann. Phys.* **383**, 239 (2017).
22. H. Mohammadzadeh, Y. Azizian-Kalandaragh, N. Cheraghpour, F. Adli. Thermodynamic geometry, condensation and Debye model of two-parameter deformed statistics. *J. Stat. Mech. Theor. Exp.* **2017**, 083104 (2017).
23. A.M. Gavriliuk, Yu.A. Mishchenko. Correlation function intercepts for $\tilde{\mu}, q$ -deformed Bose gas model implying effective accounting for interaction and compositeness of particles. *Nucl. Phys. B* **891**, 466 (2015).
24. A.M. Gavriliuk, I.I. Kachurik, M.V. Khelashvili, A.V. Nazarenko. Condensate of μ -Bose gas as a model of dark matter. *Physica A* **506**, 835 (2018).
25. M. Maleki, H. Mohammadzadeh, Z. Ebadi, M. Nattagh Najafi. Deformed boson condensate as a model of dark matter. *Preprint arXiv:1912.04656*.
26. J.A. Tuszyński, J.L. Rubin, J. Meyer, M. Kibler. Statistical mechanics of a q -deformed boson gas. *Phys. Lett. A* **175**, 173 (1993).
27. A. Lavagno, P. Narayana Swamy. Thermostatistics of a q -deformed boson gas. *Phys. Rev. E* **61**, 1218 (2000).
28. A.M. Gavriliuk, I.I. Kachurik, Yu.A. Mishchenko. Two-fermion composite quasi-bosons and deformed oscillators. *Ukr. J. Phys.* **56**, 948 (2011).
29. A.P. Rebesh, I.I. Kachurik, A.M. Gavriliuk. Elements of μ -calculus and thermodynamics of μ -bose gas model. *Ukr. J. Phys.* **58**, 1182 (2013).
30. V. Kac, P. Cheung. *Quantum Calculus* (Springer, 2002).
31. A. Lavagno, P. Narayana Swamy. Generalized thermodynamics of q -deformed bosons and fermions. *Phys. Rev. E* **65**, 036101 (2002).
32. A. Lavagno, A.M. Scarfone, P. Narayana Swamy. q -deformed structures and generalized thermodynamics. *Rep. Math. Phys.* **55**, 423 (2005).
33. F.H. Jackson. On q -functions and a certain difference operator. *Trans. Roy. Soc. Edin.* **46**, 253 (1909).
34. A. Khare. *Fractional Statistics and Quantum Theory* (World Scientific, 2005).
35. A. Rovenchak. Two-parametric fractional statistics models for anions. *Eur. Phys. J. B* **87**, 175 (2014).
36. А.А. Ровенчак. *Екзотичні статистики* (ЛНУ імені Івана Франка, 2018) (in Ukrainian) [ISBN: 978-617-10-0461-0].
37. L. Salasnich. BEC in nonextensive statistical mechanics. *Int. J. Mod. Phys. B* **14**, 405 (2000).
38. A.M. Gavriliuk A.P. Rebesh. Deformed gas of p, q -bosons: Virial expansion and virial coefficients. *Mod. Phys. Lett. B* **25**, 1150030 (2012).
39. A. Rovenchak. Weakly nonadditive Polychronakos statistics. *Phys. Rev. A* **89**, 052116 (2014).
40. C. Tsallis. What are the numbers that experiments provide? *Química Nova* **17**, 468 (1994).
41. T. Yamano. Some properties of q -logarithm and q -exponential functions in Tsallis statistics. *Physica A* **305**, 486 (2002).
42. A. Rovenchak. Ideal Bose-gas in nonadditive statistics. *Low Temp. Phys.* **44**, 1025 (2018).

Одержано 23.12.19

O.M. Chubai, A.A. Rovenchak

IDEAL BOSE GAS IN SOME DEFORMED TYPES OF THERMODYNAMICS. CORRESPONDENCE BETWEEN DEFORMATION PARAMETERS

S u m m a r y

Two approaches to the construction of thermodynamics in the framework of the q - and μ -formalisms, which correspond to certain deformations of the algebra of the creation–annihilation operators, have been considered. By comparing the obtained results, an approximate, independent of the space dimension, correspondence was revealed between the second virial coefficients for the ideal q - and μ -deformed Bose gases. The corresponding discrepancy arises only at the level of the third virial coefficient. A method for emulating the μ -deformed Bose gas up to the third virial coefficient inclusive by means of the two-parametric nonadditive Polychronakos statistics is demonstrated.