

Я.Ф. ЛЕЛЕКО,<sup>1,2</sup> Д.Л. ГРЕКОВ<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Інститут фізики плазми ННЦ ХФТІ

(Вул. Академічна, 1, Харків 61108; e-mail: yakovleleko@gmail.com)

<sup>2</sup> Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна НАН України

(Майдан Свободи, 4, Харків 61022)

## ВПЛИВ В'ЯЗКОСТІ ІОНІВ НА РОЗПОДІЛ ПАРАМЕТРІВ ПЛАЗМИ В СТАЦІОНАРНИХ ГАЗОВИХ РОЗРЯДАХ

УДК 533.915

Для плоского шару стаціонарної слабоіонізованої сильнонеізотермічної плазми, обмеженого діелектричними стінками, на основі рівнянь гідродинаміки отримано розподіли параметрів плазми – потенціалу, густини іонів і електронів та швидкості потоку іонів у напрямку стінок. Припускалось, що температури іонів і електронів та густина нейтралів є постійними. При цьому замість знаходження власних функцій і власних значень цієї задачі, розв'язувалась задача Коші для початкових значень, які є заданими в центрі плазми. Положення стінки визначалось з умови рівності потоків іонів і електронів. Запропоновано метод розв'язання проблеми сингулярності, що присутня в системі рівнянь гідродинаміки. Проведено оцінки ефекту в'язкості іонів у рівнянні руху іонів. Отримано розподіли параметрів плазми з урахуванням в'язкості іонів в області квазінейтральності.

*Ключові слова:* стаціонарний газовий розряд, в'язкість, перехідний шар, гідродинамічне наближення, радіус Дебая.

### 1. Вступ

Проблемі вивчення стаціонарного стану газового розряду близько 100 років. Особливе місце в цих дослідженнях займає взаємодія плазми з поверхнями, що її оточують. У простій формі взаємодії плазми зі стінкою, яка її обмежує, можна описати таким чином: через високу рухливість електронів потенціал стінки стає негативним по відношенню до навколишньої плазми; відштовхування електронів призводить до утворення області позитивного об'ємного заряду, що екранує нейтральну плазму від негативно зарядженої стінки. Типова ширина такої області визначається декількома радіусами екранування Дебая–Хюккеля:  $r_{De} = \sqrt{T_e/(4\pi e^2 n_{e0})}$ , де  $T_e$  – температура електронів,  $e$  – заряд електрона, а  $n_{e0}$  – гідродинамічна густина електронів в середині плазми. Зазвичай дебаєвський радіус  $r_{De}$  малий у порівнянні з іншими характерними величинами, такими як розмір плазми  $L$  або довжини вільного пробігу іонів, які зумовлені процесами іонізації, перезарядки або зіткненнями. Плазму в цьому випадку можна розділити на дві частини: область квазінейтральності

(presheath, передшар) з характерним розміром  $L$  і перехідний шар (sheath) з характерним розміром  $r_{De}$ . Як показав Бом [1], утворення стаціонарного шару об'ємного заряду можливо тільки в тому випадку, коли іони входять в область перехідного шару зі швидкістю, не меншою за швидкість звуку іонів,  $v_B = v_s = \sqrt{T_e/m_i}$  ( $T_i$  і  $m_i$  – температура і маса іонів), яка в разі неізотермічної плазми ( $T_e > T_i$ ) більше теплової швидкості іонів. Цю умову було отримано для випадку холодних іонів ( $T_i = 0$ ). При  $T_i \neq 0$  швидкість Бома дорівнює  $v_B = v_s \sqrt{1 + \tau}$ , де  $\tau = T_i/T_e \leq 1$ . Отже, іони попередньо прискорюються самоузгодженим електричним полем в області квазінейтральності. Якщо іони рухаються до поверхонь, які обмежують плазму, під дією самоузгодженого електричного поля, в плазмі повинен існувати максимум потенціалу. У плоскому випадку, який буде розглядатися в роботі, з міркувань симетрії цей максимум розташований в площині посередині плазми. У цій площині зручно вибрати початок координат  $x = 0$ . Тоді діелектричні стінки, які обмежують плазму, будуть розташовані при  $x = \pm L$ . Узагальнення на циліндричний або сферичний випадки не становить труднощів.

© Я.Ф. ЛЕЛЕКО, Д.Л. ГРЕКОВ, 2021

316

ISSN 0372-400X. Укр. фіз. журн. 2021. Т. 66, № 4

Найбільш цитованими з ранніх робіт з цієї проблеми є [2] і [3], постановка задачі в яких часто використовується до цих пір. В роботі [2] вперше було припущено, що швидкість іонів визначається статичним самоузгодженим електричним полем, яке підтримується балансом зарядів електронів та іонів, і було отримано інтегральне рівняння розподілу потенціалу плазми – шару для різних геометрій, довжин вільного пробігу іонів і способів іонізації. Рішення цього рівняння для випадку малої довжини вільного пробігу іонів у циліндрі з генерацією іонів, яка пропорційна густині електронів, дало такий самий розподіл потенціалу, який виявив Шотткі [3] для позитивного стовпа з використанням теорії амбіполярної дифузії.

З більш пізніх робіт, що використовують гідродинамічне наближення, слід зазначити [4], де задача була розв'язана аналітично в області квазінейтральності вперше з урахуванням інерції іонів, і [5], де врахована залежність рухливості іонів від величини самоузгодженого поля.

У багатьох роботах, наприклад, в [6], в перехідному шарі, через його малу товщину в порівнянні з довжиною вільного пробігу, вважається, що в плазмі немає зіткнень і в рівняннях руху іонів і безперервності нехтується доданками, які описують зіткнення, що приводить до більш простого вигляду рішення, проте створює істотні проблеми при зшивці з рішенням в області квазінейтральності. (Численні посилання можна знайти в роботах Ріманна [7, 8], який зробив великий внесок у вивчення цієї проблеми.) В роботі [7] розглядається задача узгодження рішень, що було побудовано для області квазінейтральної плазми і перехідного шару, яка розв'язується як аналітично, так і чисельно, шляхом явної побудови узгодженого асимптотичного виразу і порівняння з точними рішеннями для гідродинамічної плоскої задачі Тонкса–Ленгмюра в граничному випадку  $r_{De}/L \rightarrow 0$  ( $T_i = 0$ ). Система рівнянь, яка використана в роботі [7], для випадку холодних іонів ( $T_i = 0$ ) має сингулярність в середині плазми при  $x = 0$ . Щоб подолати цю проблему, в області біля  $x = 0$  було використано розкладання безрозмірного потенціалу плазми, безрозмірних густини і швидкості іонів у степеневі ряди відносно  $\bar{x} = (x\alpha_e)/v_s$ , де  $\alpha_e$  – частота іонізації,

$$\Phi = (a_0 + a_{(2)}\bar{x}^2 + \dots)\bar{x}^2,$$

$$v = (b_0 + b_{(2)}\bar{x}^2 + \dots)\bar{x},$$

$$n = c_0 + c_{(2)}\bar{x}^2 + \dots$$

Коефіцієнти цих рядів автори [7] визначали шляхом підстановки в рівняння руху і безперервності і збирання до купи доданків з однаковими ступенями  $x$ .

У більшості робіт іонна в'язкість вважається малим параметром і не враховується в рівнянні руху іонів. При цьому обґрунтування можливості знехтувати в'язкістю є відсутнім. В роботі [9] наведена умова нехтування ефектами, пов'язаними з в'язкістю в рівняннях перенесення:  $v_i \ll \nu L_v$ , де  $v_i$  – гідродинамічна швидкість руху іонів,  $\nu$  – частота зіткнень,  $L_v$  – характерний масштаб зміни гідродинамічної швидкості. І якщо в області квазінейтральності ця умова явно виконується, то в перехідному шарі її виконання знаходиться під питанням.

Представлена робота присвячена з'ясуванню ролі в'язкості іонів у формуванні розподілів параметрів плазми в стаціонарних газових розрядах. Вона організована в такий спосіб. У розділі 2 описано постановку задачі і виведені основні рівняння. Розділ 3 присвячено розв'язку основної системи рівнянь без врахування в'язкості. В області квазінейтральності застосовано квазінейтральне наближення. У розділі 4 досліджено вплив в'язкості іонів на розподіли параметрів плазми стаціонарного газового розряду в неізотермічній слабоіонізованій плазмі з використанням розв'язків попереднього розділу. Також були отримані розв'язки з в'язкістю, але в області квазінейтральності. У розділі 5 представлені висновки з проведеного дослідження.

## 2. Основні рівняння

Для розв'язання задачі про стаціонарний розподіл параметрів плазми в газових розрядах будемо використовувати гідродинамічне наближення. Такий підхід можна застосовувати, коли макроскопічні параметри плазми, такі, як гідродинамічні швидкість  $v$  і густина  $n$  частинок, досить повільно змінюються в просторі і часі. А саме, характерні відстані, на яких змінюються значення макроскопічних величин, набагато більше середньої довжини вільного пробігу. Також він справедливий для випадку плазми, в якій немає зіткнень, якщо можна знехтувати тепловим рухом частинок, тобто

плазма повинна бути досить холодною [10]. Однак, навіть в разі невиконання цих умов, гідродинамічний підхід може бути використаний для якісного аналізу параметрів плазми.

Запишемо загальні рівняння безперервності і руху [9] для одиниці об'єму газу частинок  $l$ -го сорту:

$$\frac{\partial n_l}{\partial t} + \nabla \cdot (n_l \mathbf{v}_l) = \frac{\delta n_l}{\delta t}, \quad (1)$$

$$m_l n_l \left[ \frac{\partial v_{l\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{v}_l \nabla) v_{l\alpha} \right] = Z e n_l E_\alpha - \frac{\partial p_l}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \pi_{l\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + m_l n_l \frac{\delta v_{l\alpha}}{\delta t}, \quad (2)$$

де  $p_l = n_l T_l$ ,  $E_\alpha = -\partial\varphi/\partial x_\alpha$ ,  $v_l$ ,  $n_l$  – гідродинамічні швидкість і густина частинок  $l$ -го сорту,  $\mathbf{E}$  – самоузгоджене електричне поле,  $\varphi$  – потенціал самоузгодженого електричного поля,  $p_l$ ,  $T_l$ ,  $m_l$ ,  $\pi_{l\alpha\beta}$  – тиск, температура, маса і тензор в'язких напружень частинок  $l$ -го сорту,  $Z$  – заряд іона,  $\nabla$  – оператор диференціювання, індекси  $\alpha$ ,  $\beta$ , позначають компоненти координат  $x_\alpha$ ,  $x_\beta$ .

Другий доданок в лівій частині рівняння (1) описує зміну густини частинок за рахунок їх гідродинамічного спрямованого руху, а права частина (1) – за рахунок появи або зникнення частинок у результаті процесів зіткнень. Другий доданок в лівій частині рівняння (2) описує зміну швидкості частинок в результаті переміщення плазми, права частина (2) представляє собою силу, яка діє на частинки  $l$ -го сорту в одиниці об'єму. Її перший доданок – це електрична сила, другий – сила, що виникає через градієнт тиску  $l$ -го сорту частинок плазми, третій – сила, що виникає під дією в'язких напружень, а четвертий – сила тертя, пов'язана з процесами зіткнень.

Вважаємо, що плазма складається з електронів та іонів атомарного водню. Розглядаємо стаціонарну задачу ( $\partial/\partial t = 0$ ). Вважаємо магнітне поле відсутнім ( $\mathbf{H} = 0$ ). Припускаємо, що температури частинок плазми і густина атомів водню не залежать від координат. (При самоузгодженому визначенні температури частинок необхідно враховувати рівняння теплопровідності для частинок при наявності джерел їх охолодження і нагріву. Це сильно ускладнює задачу, розв'язання якої значною мірою буде визначатися способом нагріву плазми.) Зміна кількості частинок відбувається за рахунок іонізації електронним ударом  $\delta n_{i,e}/\delta t = \alpha_e n_e$ ,

а зміна гідродинамічної швидкості іонів – за рахунок процесів перезарядки і іонізації  $\delta v_{i\alpha}/\delta t = (\nu_{ex} + \alpha_e n_e/n_i) v_{i\alpha}$ , де  $n_i$ ,  $n_e$  – гідродинамічні густини іонів і електронів,  $\nu_{ex}$  – частота перезарядки іонів на атомах водню. Вважаємо, що густина електронів визначається формулою Больцмана  $n_e = n_{e0} \exp(e\varphi/T_e)$ . Цю формулу легко отримати з рівняння (2), якщо розділити його на характерні значення параметрів і знехтувати доданками, які містять відношення мас електронів і іонів  $m_e/m_i$ . Вважаємо, що досягнувши межі розподілу діелектрик – плазма (стінки), електрони і іони повністю рекомбінують.

Тензор в'язких напружень іонів  $\pi_{i\alpha\beta}$  за відсутності магнітного поля виражається через тензор швидкості зрушень  $W_{\alpha\beta}$ :

$$\pi_{i\alpha\beta} = -\eta_i W_{\alpha\beta}, \quad (3)$$

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_{i\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_{i\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_{i\gamma}}{\partial x_\gamma},$$

де  $\eta_i$  – коефіцієнт динамічної в'язкості іонів,  $\delta_{\alpha\beta}$  – символ Кронекера, індекс  $\gamma$  позначає належність до компоненти координат  $x_\gamma$ .

Розділимо рівняння руху (2) на  $m_i n_i$ . Після цього в одновимірному випадку рівняння руху, неперервності і рівняння Пуассона можна записати як

$$v_i \frac{dv_i}{dx} = -\frac{e}{m_i} \frac{d\varphi}{dx} - \left( \nu_{ex} + \alpha_e \frac{n_{e0} \exp(e\varphi/T_e)}{n_i} \right) v_i - \frac{T_i}{m_i n_i} \frac{dn_i}{dx} + \frac{4}{3} \bar{\eta}_i \frac{d^2 v_i}{dx^2}, \quad (4)$$

$$\frac{d(n_i v_i)}{dx} = \alpha_e n_{e0} \exp(e\varphi/T_e), \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 4\pi e (n_{e0} \exp(e\varphi/T_e) - n_i), \quad (6)$$

де  $\bar{\eta}_i = \eta_i/(m_i n_i)$  – коефіцієнт кінематичної в'язкості іонів [11].

Частоти перезарядки і іонізації розраховано за допомогою співвідношень:  $\alpha_e = \sigma_i v_{Te} n_n$ ,  $\nu_{ex} = \sigma_{ex} v_{Ti} n_n$ , де  $\sigma_i$ ,  $\sigma_{ex}$  – перетини іонізації електронним ударом і перезарядки іонів на атомах водню,  $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$ ,  $v_{Ti} = \sqrt{T_i/m_i}$  – теплові швидкості електронів та іонів відповідно,  $n_n$  – густина нейтральних частинок. Залежність середнього добутку перетину іонізації  $\sigma_i$  ( $\text{см}^{-3}/\text{с}$ ) на

теплову швидкість електронів від їх температури  $T_e$  (eV) визначена формулою

$$\overline{\sigma_i v_e} = 10^{-5} \frac{\Theta^{1/2}}{I^{3/2} (6 + \Theta)} \exp(-\Theta^{-1}),$$

де  $I = 13,6$  eV,  $\Theta = T_e/I$  [12].

Величина  $\sigma_{ex}$  визначена формулою  $\sigma_{ex} = 4,9 \times 10^{-15} (1 + 0,15 \cdot \ln(1/T_i))^2 \text{ см}^2$  [13], де  $T_i$  визначається в електрон-вольтах.

Коефіцієнт кінематичної в'язкості іонів дорівнює добутку характерної швидкості іонів  $v_{T_i}$  на довжину вільного пробігу  $l$  (див., наприклад, [9]):  $\bar{\eta}_i = v_{T_i} l = v_{T_i}^2 / (\alpha_e + \nu_{ex} + \nu_{C_i})$ , де  $\nu_{C_i} = \sigma_{C_i} v_{T_i} n_{i0}$  – частота кулонівських зіткнень іонів,  $n_{i0}$  – гідродинамічна густина іонів у точці  $x = 0$ ,  $\sigma_{C_i} = \pi (e^2/T_i)^2 A_i$  – перетин кулонівських зіткнень іонів,  $A_i = \ln(r_{D_i}/r_{\min i})$  – кулонівський логарифм,  $r_{D_i} = \sqrt{T_i/(4\pi e^2 n_{i0})}$  – радіус Дебая іонів,  $r_{\min i} = e^2/T_i$  – прицільний параметр близької взаємодії.

На рис. 1 наведено залежності безрозмірної кінематичної в'язкості іонів  $\bar{\eta} = \bar{\eta}_i / (v_s r_{De}) = \tau / (\nu + \nu_C + \alpha)$  від температури іонів  $T_i$  при різних значеннях густини нейтральних частинок  $n_n$  при  $T_e = 2$  eV, де  $\alpha = \alpha_e / \omega_{p_i}$ ,  $\nu = \nu_{ex} / \omega_{p_i}$ ,  $\nu_C = \nu_{C_i} / \omega_{p_i}$  – безрозмірні частоти,  $\omega_{p_i} = v_s / r_{De}$  – плазмова частота іонів. Зазначимо, що кінематична в'язкість іонів суттєво зростає при збільшенні  $T_i$  і зменшенні  $n_n$ .

На рис. 2 показано залежності безрозмірних частот кулонівських зіткнень  $\nu_C$ , перезарядки  $\nu$  і іонізації  $\alpha$  від температури іонів  $T_i$  при  $n_{e0} = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$  і  $T_e = 2$  eV. За допомогою цього рисунка можна оцінити, які процеси дають основний внесок в параметр безрозмірної кінематичної в'язкості іонів. При зменшенні густини нейтральних частинок  $n_n$  області, де перетинаються графіки частот перезарядки  $\nu$  і кулонівських зіткнень  $\nu_C$  зміщуються в бік збільшення температури іонів. З рисунка видно, що при великих значеннях температури іонів  $T_i$  основний внесок в  $\bar{\eta}$  дає частота перезарядки  $\nu$ , а при дуже малих  $T_i$  – частота кулонівських зіткнень  $\nu_C$ , частота іонізації електронним ударом  $\alpha$  слабо впливає на величину безрозмірної кінематичної в'язкості іонів при будь-яких значеннях  $T_i$ .

В системі рівнянь (4)–(6) перейдемо до безрозмірних змінних  $v = v_i/v_s$ ,  $n = n_i/n_{e0}$ ,  $\Phi = e\varphi/T_e$ . Штрихом позначена похідна по безрозмірній коор-

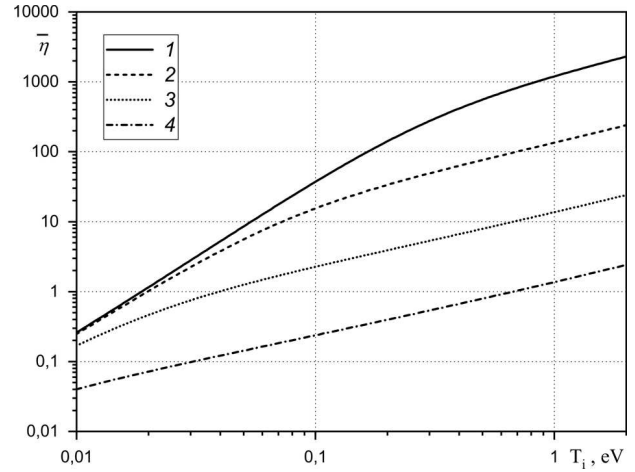


Рис. 1. Залежності безрозмірної кінематичної в'язкості іонів  $\bar{\eta}$  від температури іонів  $T_i$  (eV) при густині нейтральних частинок  $n_n = 10^{13} \text{ см}^{-3}$  (1),  $n_n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$  (2),  $n_n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$  (3) і  $n_n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$  (4) при  $n_{e0} = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 2$  eV

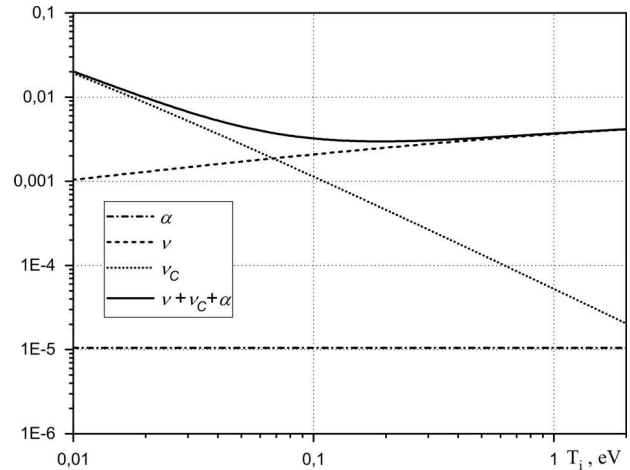


Рис. 2. Залежності безрозмірних частот кулонівських зіткнень  $\nu_C$ , перезарядки  $\nu$  і іонізації  $\alpha$  від температури іонів  $T_i$  при  $n_{e0} = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$  і  $T_e = 2$  eV

динаті  $x/r_{De}$ . Маємо

$$vv' = -\Phi' - \left( \nu + \alpha \frac{\exp(\Phi)}{n} \right) v - \tau \frac{n'}{n} + \frac{4}{3} \bar{\eta} v'', \quad (7)$$

$$n'v + nv' = \alpha \exp(\Phi), \quad (8)$$

$$\Phi'' = \exp(\Phi) - n. \quad (9)$$

Система диференціальних рівнянь (7)–(9) без урахування в'язкості іонів є нелінійною відносно невідомих функцій системою четвертого порядку. Вона має бути доповненою граничними умовами. З

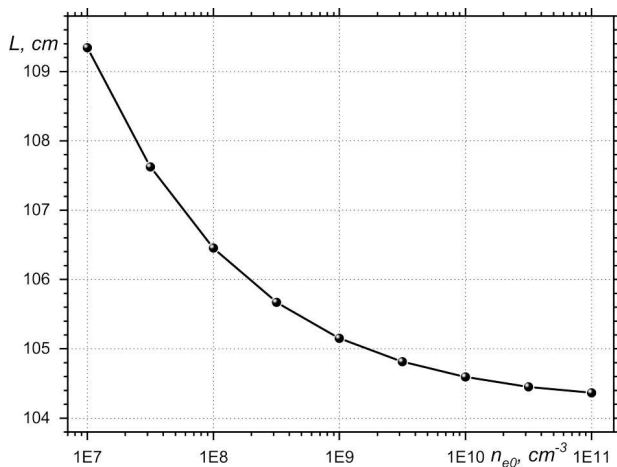


Рис. 3. Залежність розміру плазми  $L$  від густини електронів у центрі плазми у випадку  $n_n = 10^{14}$  см<sup>-3</sup>,  $T_e = 2$  еВ,  $T_i = 0,1$  еВ

міркувань симетрії в центрі плазми маємо

$$v(0) = n'(0) = \Phi'(0) = 0. \tag{10}$$

Також пам'ятаємо, що потенціал є визначеним з точністю до константи. Припустимо, що  $\Phi(0) = 0$ . Ще однією граничною умовою є умова на межі плазма – стінка: гідродинамічний потік іонів дорівнює потоку електронів в напрямку зростання  $x$ . При цьому вважається, що електрони розподілені відповідно з розподілом Максвелла–Больцмана, а ефекти відбиття від стінки та емісії електронів стінкою є відсутніми [14]

$$\Gamma(L) = n(L)v(L) = \sqrt{\frac{m_i}{2\pi m_e}} \exp(\Phi(L)). \tag{11}$$

Таким чином, маємо систему рівнянь четвертого порядку з чотирма граничними умовами, тобто задачу на визначення власних значень. Наприклад, якщо задано  $L$ ,  $T_e$ ,  $T_i$  і  $n_n$ , то стаціонарний газовий розряд є можливим при певному значенні  $n_{e0}$ , що визначається розв'язком системи.

### 3. Розв'язання основної системи рівнянь – квазінейтральне наближення

Знаходження власних функцій і власних значень нелінійної системи (7)–(9) є доволі складною проблемою. Тому в її дослідженнях застосовують альтернативний підхід. Граничні умови (10) беруть в якості початкових умов. Доповнюють їх довільним початковим  $n_{e0}$  і інтегрують систему (7)–(9) в

напрямку позитивних  $x$ , тобто розв'язують задачу Коші (див., наприклад, [7, 15], де було розглянуто випадок холодних іонів). Інтегрування закінчують в точці  $x = \hat{L}$ , де виконується умова (11). Зазвичай, з першої спроби  $\hat{L} \neq L$ . Тоді змінюють  $n_{e0}$  і проводять нове інтегрування і так доти, поки не отримають  $\hat{L} = L$  (див. рис. 3). Такий підхід буде використано надалі при аналізі впливу в'язкості іонів на розподіл параметрів плазми стаціонарного розряду.

Якщо з рівнянь (7) без врахування останнього доданка і (8) виразити безрозмірні похідні густини і швидкості іонів

$$v' = -\frac{\Phi'v + \left(\nu + \alpha \frac{\exp(\Phi)}{n}\right)v^2 + \tau\alpha \frac{\exp(\Phi)}{n}}{v^2 - \tau}, \tag{12}$$

$$n' = \frac{\left[\Phi' + \left(\nu + \alpha \frac{\exp(\Phi)}{n}\right)v\right]n}{v^2 - \tau}, \tag{13}$$

то видно, що система рівнянь має сингулярність в точці, де гідродинамічна швидкість іонів дорівнює їх тепловій швидкості  $v = \sqrt{\tau}$ . Точка сингулярності для сильно неізотермічної плазми знаходиться в області квазінейтральності, де параметри плазми змінюються на відстанях порядку розміру плазми  $\Delta x \sim L$ , на достатній відстані від перехідного шару. Сингулярність заважає прямому інтегруванню системи (7)–(9). Щоб уникнути складнощів, пов'язаних з сингулярністю, скористаємось малістю другої похідної потенціалу в рівнянні (9)  $\Phi'' \ll n, \exp(\Phi)$ . Назвемо такий підхід “квазінейтральним наближенням”. У першій ітерації ( $\Phi'' = 0$ ) з рівняння (9) отримаємо

$$n_{(1)} = \exp(\Phi_{(1)}), \quad \Phi'_{(1)} = \frac{n'_{(1)}}{n_{(1)}}. \tag{14}$$

Використання (14) дозволяє виключити в (7) і (8) потенціал з цієї системи рівнянь

$$v_{(1)}v'_{(1)} = -(1 + \tau) \frac{n'_{(1)}}{n_{(1)}} - (\nu + \alpha)v_{(1)} + \frac{4}{3}\bar{\eta}v''_{(1)}, \tag{15}$$

$$n'_{(1)}v_{(1)} + n_{(1)}v'_{(1)} = \alpha n_{(1)}. \tag{16}$$

Отримаємо з (15), (16) безрозмірні похідні густини і швидкості іонів без урахування в'язкості іонів.

$$v'_{(1)} = \frac{(1 + \tau)\alpha + (\nu + \alpha)v_{(1)}^2}{1 + \tau - v_{(1)}^2}, \tag{17}$$

$$n'_{(1)} = -\frac{(\nu + 2\alpha)n_{(1)}v_{(1)}}{1 + \tau - v_{(1)}^2}. \quad (18)$$

Як видно, система рівнянь (17), (18) має сингулярність в точці, де гідродинамічна швидкість іонів дорівнює швидкості Бома  $v_{(1)} = \sqrt{1 + \tau}$ . Тому в області  $0 < v_{(1)} < \sqrt{1 + \tau}$  розв'язуємо цю систему методом Коші з початковими умовами в точці  $x = 0$ . Після проходження точки  $v_{(1)} = \sqrt{\tau}$ , в інтервалі  $\sqrt{\tau} < v_{(1)} < \sqrt{1 + \tau}$ , значення  $v_{(1)}, n_{(1)}$  і обчислені за їх допомогою  $\Phi_{(1)}$  та  $\Phi'_{(1)}$  використовуємо в якості початкових умов при інтегруванні (7)–(9). Таким методом можна отримати гладку зшивку для основних параметрів плазми. Але при цьому спостерігаються істотні осциляції в другій похідній швидкості, значення якої необхідні для оцінки в'язкості іонів. Тому для більш точної зшивки рішень систем рівнянь (9), (12), (13) і (17), (18) використовуємо наступну ітерацію по другій похідній потенціалу. У другій ітерації  $\Phi'' = \Phi''_{(1)}$  і рівняння (14), (15) і (16) набувають вигляду

$$\exp \Phi_{(2)} = n_{(2)} + \Phi''_{(1)}, \quad (19)$$

$$\Phi'_{(2)} = \frac{n'_{(2)} + \Phi'''_{(1)}}{n_{(2)} + \Phi''_{(1)}},$$

$$v_{(2)}v'_{(2)} = -\frac{n'_{(2)} + \Phi'''_{(1)}}{n_{(2)} + \Phi''_{(1)}} - \left( \nu + \alpha \frac{n_{(2)} + \Phi''_{(1)}}{n_{(2)}} \right) v_{(2)} - \tau \frac{n'_{(2)}}{n_{(2)}} + \frac{4}{3} \bar{\eta} v''_{(2)}, \quad (20)$$

$$n'_{(2)}v_{(2)} + n_{(2)}v'_{(2)} = \alpha(n_{(2)} + \Phi''_{(1)}). \quad (21)$$

Без урахування останнього доданка в рівнянні (20) маємо

$$v'_{(2)} = \left\{ \left( 1 + \tau \frac{n_{(2)} + \Phi''_{(1)}}{n_{(2)}} \right) \alpha + \left( \nu + \alpha \frac{n_{(2)} + \Phi''_{(1)}}{n_{(2)}} \right) v_{(2)} + \frac{\Phi'''_{(1)}v_{(2)}}{n_{(2)} + \Phi''_{(1)}} \right\} \times \left\{ n_{(2)}n_{(2)} + \Phi''_{(1)} + \tau - v_{(2)}^2 \right\}^{-1}, \quad (22)$$

$$n'_{(2)} = \frac{\alpha(n_{(2)} + \Phi''_{(1)}) - n_{(2)}v'_{(2)}}{v_{(2)}}, \quad (23)$$

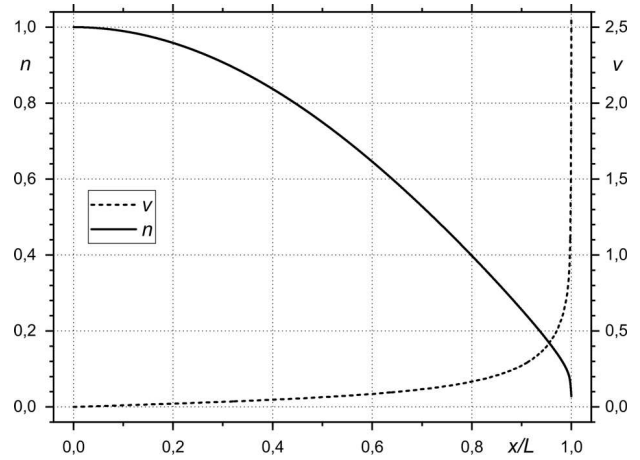


Рис. 4. Залежність безрозмірних швидкості  $v$  і густини  $n$  іонів від координати  $x/L$  у випадку  $n_{e0} = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 2 \text{ eV}$  і  $T_i = 0,1 \text{ eV}$

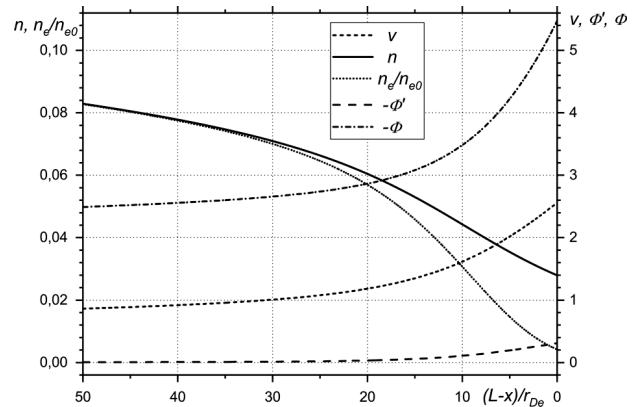
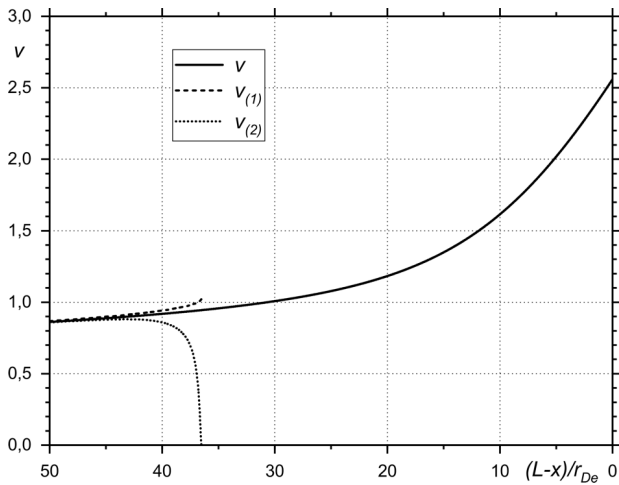


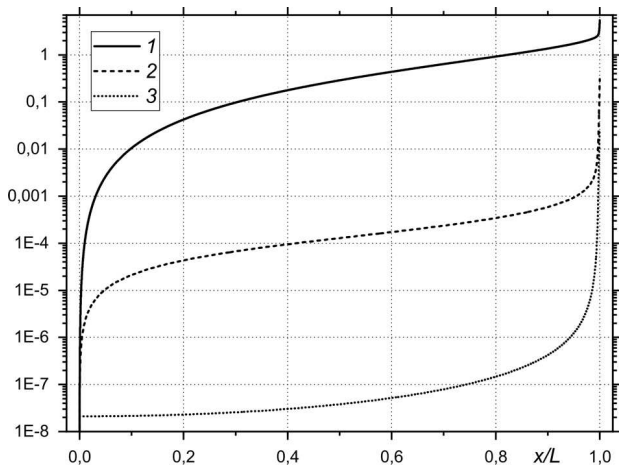
Рис. 5. Залежність безрозмірних швидкості  $v$  і густини  $n$  іонів, густини електронів  $n_e/n_{e0}$ , електричного поля  $-\Phi'$  і потенціалу  $\Phi$  від координати  $(L-x)/r_{De}$  в перехідному шарі у випадку  $n_{e0} = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 2 \text{ eV}$  і  $T_i = 0,1 \text{ eV}$

де  $\Phi''_{(1)}$  і  $\Phi'''_{(1)}$  – відомі функції. Зазначимо, що при проведенні другої ітерації сингулярність трохи змістилась у напрямку межі плазма – стінка. При наближенні температури іонів до температури електронів точки сингулярності систем рівнянь (9), (12), (13) і (17), (18) будуть наближуватися одна до одної, що вимагає використання наступних ітерацій квазінейтрального наближення.

На рис. 4 показано зшивку рішень систем рівнянь (22), (23) і (9), (12), (13) у всьому об'ємі плазми, яка проводилась у точці  $x/L = 0,85$ . В інтервалі  $0 < x/L < 0,85$  показано рішення системи рівнянь (22), (23), а в інтервалі  $0,85 < x/L < 1$  –



**Рис. 6.** Залежність безрозмірних швидкостей  $v$ ,  $v_{(1)}$ ,  $v_{(2)}$  іонів від координати  $(L-x)/r_{De}$  в перехідному шарі у випадку  $n_{e0} = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 2 \text{ еВ}$  і  $T_i = 0,1 \text{ еВ}$



**Рис. 7.** Залежність безрозмірних потенціалу  $\Phi$  (1), електричного поля  $-\Phi'$  (2) і просторового заряду  $-\Phi'' = n_i - n_e$  (3) від координати  $x/L$  у випадку  $n_{e0} = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 2 \text{ еВ}$  і  $T_i = 0,1 \text{ еВ}$

рішення системи рівнянь (9), (12), (13). На рис. 5 показано рішення системи рівнянь (9), (12), (13) в перехідному шарі. При розрахунках використовувалися такі значення розмірних і безрозмірних величин:  $n_{e0} = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 2 \text{ еВ}$ ,  $T_i = 0,1 \text{ еВ}$ ,  $v_{Te} = 5,93 \cdot 10^7 \text{ см/с}$ ,  $v_{Ti} = 3,09 \times 10^5 \text{ см/с}$ ,  $v_s = 1,38 \cdot 10^6 \text{ см/с}$ ,  $r_{De} = 1,05 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ ,  $\omega_{pi} = 1,32 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ ,  $\alpha_e = 1,39 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ,  $\nu_{ex} = 24,74 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ ,  $\nu_{Ci} = 1,49 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ ,  $\bar{\eta}_i = 2,25 \times 10^5 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $L = 104,6 \text{ см}$ ,  $\alpha = 1,05 \cdot 10^{-5}$ ,  $\nu =$

$= 2,08 \cdot 10^{-3}$ ,  $\nu_C = 1,13 \cdot 10^{-3}$ ,  $\bar{\eta} = 15,5$ . Для розрахунків було взято параметри, характерні для жевріючого розряду. Підкреслимо, що для зручності сприйняття на рис. 4 відстань вимірюється в розмірах плазми  $L$ , а на рис. 5 в радіусах Дебая  $r_{De}$ , причому початок відліку відповідає поверхні, що обмежує плазму.

З рис. 4 і 5 видно, що знайдений розв'язок систем рівнянь є безперервним і не має жодних особливостей. Як і передбачалось, в області квазінейтральності рішення змінюються повільно; в перехідному шарі, розмір якого приблизно 3 см або 25–40  $r_{De}$ , з'являється об'ємний заряд і параметри плазми потерпають різкої зміни.

На рис. 6 в доповнення до зображеної на рис. 4 і рис. 5 швидкості іонів показано також першу і другу ітерації швидкості. Видно, що рішення  $v_{(1)}$ ,  $v_{(2)}$ , при отриманні яких застосовано припущення квазінейтральності, починають відрізнятися від "правильного" рішення  $v$  на відстані близько  $40r_{De}$  від поверхні, що обмежує плазму, що дещо більше за розмір перехідного шару, якщо визначати його як відстань від поверхні до точки, де  $v = (1 + \tau)^{1/2}$ . З першої ітерації рівняння Пуассона знайдемо швидкість, при якій порушується наближення квазінейтральності. Вочевидь, це відбувається, коли доданок просторового заряду  $\Phi''_{(1)}$  становить помітну долю від доданків густини електронів або іонів  $\Phi''_{(1)} \approx 0,01 \cdot n_{(1)}$ . Щоб знайти  $\Phi''_{(1)}$ , візьмемо похідну від останньої рівності в (14). Далі потрібно знайти  $(n'_{(1)}/n_{(1)})^2$  і  $n''_{(1)}/n_{(1)}$ . Для цього використовуємо (18). Остаточного отримаємо

$$\left| \frac{\Phi''_{(1)}}{n_{(1)}} \right| \approx \frac{(\nu + 2\alpha)(\nu + 5\alpha)(1 + \tau)^2}{n_{(1)}(1 + \tau - n_{(1)}^2)^3}. \quad (24)$$

Якщо підставити в (24) значення параметрів, при яких виконувались чисельні розрахунки, то виходить, що наближення квазінейтральності порушується при  $v_{(1)} \approx 04,93$ , що добре співпадає з тим, що показано на рис. 6.

На рис. 7 показано розподіли потенціалу, самоузгодженого електричного поля і просторового заряду в об'ємі плазми. Відзначимо, що густина іонів перевищує густина електронів у всьому об'ємі плазми на величину  $\Phi''$ , яку можна порахувати на початку координат за допомогою розкладів по  $x$  як  $\Phi''_{x=0} \approx -[(\nu + 2\alpha)\alpha]/2$ . При цьому гідродинамічна

швидкість електронів, яку можна отримати з рівняння безперервності для іонів і умови стаціонарності,  $v_e/v_s = nv/(n+\Phi'')$  буде дещо перевищувати швидкість іонів. Незважаючи на наявність просторового заряду, електричне поле стає помітним лише в перехідному шарі на відміну від потенціалу, який візуально змінюється у всьому об'ємі плазми.

#### 4. Оцінки ефекту в'язкості іонів у рівнянні руху іонів

Проведемо оцінку останнього доданка рівняння (15), який описує в'язкість іонів у квазінейтральному наближенні. Розділимо його на доданок рівняння  $n'_{(1)}/n_{(1)}$ , який містить електричне поле. Вираз для  $v''_{(1)}$  отримаємо з (17). Остаточно маємо

$$\left| \frac{4\bar{\eta}n_{(1)}v''_{(1)}}{3n'_{(1)}} \right| = \frac{8\bar{\eta}(1+\tau)}{3(1+\tau-v_{(1)}^2)^2} \times [(\nu+2\alpha)(1+\tau) - (\nu+\alpha)(1+\tau-v_{(1)}^2)]. \quad (25)$$

Для центра плазми, де  $v_{(1)} \ll 1$ , з (25) випливає

$$\left| \frac{4\bar{\eta}n_{(1)}v''_{(1)}}{3n'_{(1)}} \right| \approx \frac{8}{3}\bar{\eta}\alpha. \quad (26)$$

Як видно з рис. 1 та рис. 2, для параметрів плазми, що було використано в чисельних розрахунках, в центрі плазми внесок в'язкості іонів (26) в рівняння (15) є малим, порядку  $4 \cdot 10^{-4}$ . На межі квазінейтральної плазми і шару просторового заряду  $v_{(1)} \lesssim \sqrt{1+\tau}$ , з (25) отримуємо

$$\left| \frac{4\bar{\eta}n_{(1)}v''_{(1)}}{3n'_{(1)}} \right| \approx \frac{8\bar{\eta}(\nu+2\alpha)(1+\tau)^2}{3(1+\tau-v_{(1)}^2)^2}. \quad (27)$$

Як видно з (27), внесок в'язкості іонів швидко зростає при наближенні гідродинамічної швидкості іонів до швидкості іонного звуку. Але в цій області вже треба замість (17), (18) використовувати систему (9), (12), (13). Оцінимо внесок в'язкості іонів в рівняння руху іонів (7) в області, де  $v > \sqrt{\tau}$ . З цією метою знайдемо другу похідну швидкості іонів з урахуванням рівняння Пуассона (9) (перші похідні густини і швидкості іонів визначаються рівняннями (12) і (13))

$$v'' = -\left\{ \Phi''v + \left[ \Phi' + 2\left( \nu + \alpha \frac{\exp \Phi}{n} - v' \right) v \right] \times \right.$$

$$\left. \times v' + \alpha \frac{\exp \Phi}{n} \left( \Phi' - \frac{n'}{n} \right) (v^2 + \tau) \right\} \times \{v^2 - \tau\}^{-1}. \quad (28)$$

Остаточно, внесок в'язкості іонів в рівнянні руху іонів (7) в області  $v > \sqrt{\tau}$ , становить

$$\left| \frac{4\bar{\eta}v''}{3\Phi'} \right| = -\left\{ \bar{\eta} \left| \Phi''v + \left[ \Phi' + 2\left( \nu + \alpha \frac{\exp \Phi}{n} - v' \right) v \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times v' + \alpha \frac{\exp \Phi}{n} \left( \Phi' - \frac{n'}{n} \right) (v^2 + \tau) \right| \right\} \times \\ \times \left\{ 3|\Phi'| (v^2 - \tau) \right\}^{-1}. \quad (29)$$

У перехідному шарі для сильно неізотермічної плазми вираз (28) спрощується. Тоді отримуємо

$$\left| \frac{4\bar{\eta}v''}{3\Phi'} \right| \approx \frac{4\bar{\eta}|\Phi''v + [\Phi' - 2vv']v'|}{3|\Phi'| (v^2 - \tau)}. \quad (30)$$

На рис. 8 показано відношення всіх доданків рівняння руху (7) до доданка, який містить електричне поле. З рис. 8 видно, що в'язкість іонів має незначний вплив в області квазінейтральності, проте в перехідному шарі цей вплив зростає і його треба враховувати.

На рис. 9 показано для порівняння ці самі величини для випадку  $n_n = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$  в перехідному шарі. Зі зменшенням густини нейтралів  $n_n$  зростає коефіцієнт в'язкості іонів  $\bar{\eta}$ , що призводить

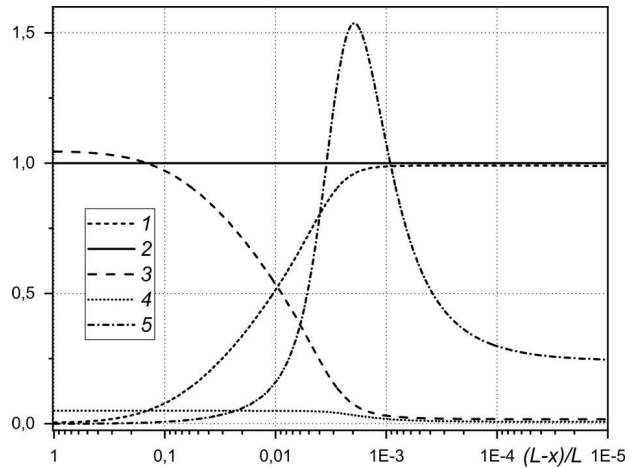
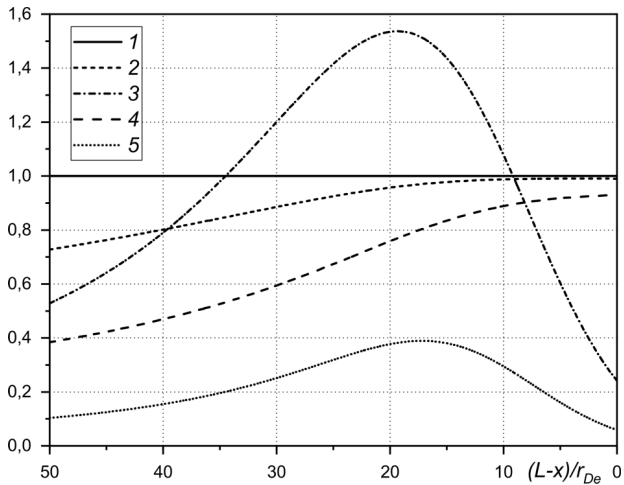
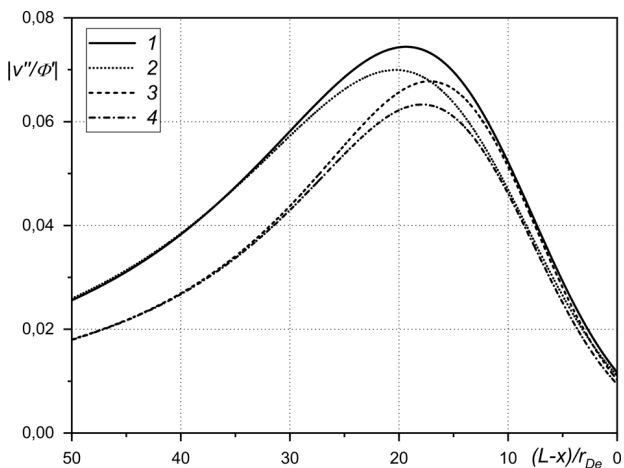


Рис. 8. Залежність відношення доданків рівнянь руху (20) і (7) до доданка, який містить електричне поле  $|vv'/\Phi'|$  (1),  $|\Phi'/\Phi'| = 1$  (2),  $|(\nu + \alpha \exp(\Phi)/n)v/\Phi'|$  (3),  $|\tau(n'/n)/\Phi'|$  (4),  $|(4/3)\bar{\eta}v''/\Phi'|$  (5) від координати  $(L-x)/L$  у випадку  $n_{e0} = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 2 \text{ eV}$  і  $T_i = 0,1 \text{ eV}$





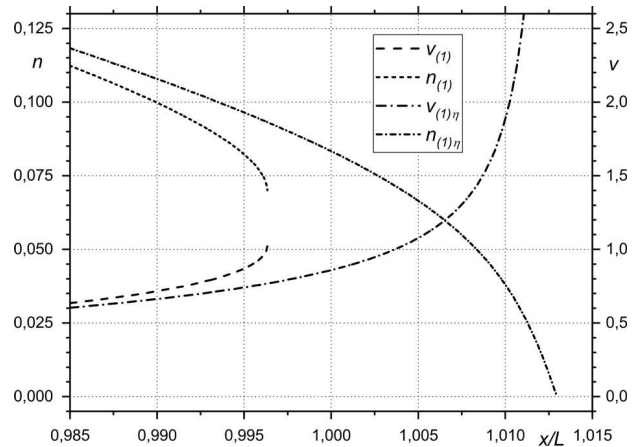
**Рис. 9.** Залежність відношення доданків рівнянь руху (20) і (7) до доданка, який містить електричне поле  $|vv'/\Phi'|$  (2, 4),  $|\Phi'/\Phi'| = 1$  (1),  $|(4/3)\bar{\eta}v''/\Phi'|$  (3, 5) від координати  $(L-x)/r_{De}$  в перехідному шарі у випадку  $n_{e0} = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 2 \text{ eV}$ ,  $T_i = 0,1 \text{ eV}$ ,  $n_n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$  (2, 3) і  $n_n = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$  (4, 5)



**Рис. 10.** Залежність відношення  $|v''/\Phi'|$  від координати  $(L-x)/r_{De}$  в перехідному шарі для значень  $T_i = 0,1 \text{ eV}$  (1, 3) і  $T_i = 0,3 \text{ eV}$  (2, 4) у випадку  $n_{e0} = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 2 \text{ eV}$ ,  $n_n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$  (1, 2) і  $n_n = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$  (3, 4)

до того, що в'язкість іонів перевищує доданок електричного поля в перехідному шарі, при цьому в іншому об'ємі плазми внесок доданка з в'язкістю іонів малий.

На рис. 10 показано залежність відношення  $|v''/\Phi'|$  для різних значень  $T_i$  і  $n_n$  при  $T_e = 2 \text{ eV}$ . Як видно з рисунка, порядок і поведінка величини  $|v''/\Phi'|$  слабо відрізняються при різних значеннях



**Рис. 11.** Залежність густини і швидкості іонів в квазінейтральному наближенні з урахуванням в'язкості іонів  $v_{(1)\eta}$ ,  $n_{(1)\eta}$  і без урахування в'язкості  $v_{(1)}$ ,  $n_{(1)}$  від координати  $x/L$  у випадку  $n_{e0} = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 2 \text{ eV}$  і  $T_i = 0,1 \text{ eV}$

$T_i$  і  $n_n$  при заданій  $T_e$ . З цього випливає, що величина внеску  $|(4/3)\bar{\eta}v''/\Phi'|$  буде визначатися виключно величиною  $(4/3)\bar{\eta}$ .

На рис. 11 показано розподіл густини і швидкості іонів в квазінейтральному наближенні з урахуванням і без урахування доданка, який описує в'язкість іонів в рівняннях (20) і (15). Як видно, завдяки малій величині цього доданка в об'ємі квазінейтральної плазми, його врахування слабо впливає на розмір плазми  $L$ .

Точний розв'язок системи рівнянь (7)–(9) з урахуванням в'язкого доданка в перехідному шарі є предметом подальших досліджень.

## 5. Висновок

Як було відомо, при дослідженні розподілу параметрів плазми в стаціонарному газовому розряді плазму можна умовно розділити на дві області. Перша – основний об'єм плазми, де майже точно виконується умова квазінейтральності: густина іонів майже дорівнює густині електронів, що розподілені в потенціалі плазми у відповідності з розподілом Больцмана. Розподіл потенціалу в плазмі визначається виходом електронів на поверхню, що обмежує плазму, і подальшим екрануванням цієї поверхні іонами. Друга область – це саме та, в якій іони екранують поверхню і де не виконується умова квазінейтральності. Приблизною “межею” цих областей є точка, де швидкість іонів, що приско-

рюються у напрямку поверхні, дорівнює швидкості Бома. Відстань цієї точки від поверхні становить  $\approx 30$  радіусів Дебая електронів. Задача про визначення параметрів стаціонарного газового розряду є задачею на власні функції і власні значення. Зазвичай замість неї розв'язують задачу Коші з початковими умовами в центрі плазми, а координата граничної поверхні визначається з умови рівності потоків іонів і електронів. "Правильне" положення поверхні можна отримати, якщо при інших фіксованих параметрах змінювати, наприклад, густину електронів у центрі плазми. Зазвичай, при визначенні розподілу параметрів плазми в стаціонарному газовому розряді в'язкістю іонів нехтували. В роботі запропоновано і застосовано метод визначення розподілів параметрів сильно неізотермічної ( $T_e \gg T_i$ ) плазми з урахуванням скінченної температури іонів. На основі цього методу проведено оцінки ефекту в'язкості в рівнянні руху іонів. Показано, що в області квазінейтральності, тобто майже у всьому об'ємі плазми, цей ефект є малим. Він не веде до помітної зміни центральної густини плазми. З іншого боку, розрахунки показують, що в'язкість іонів суттєво впливає на розподіл параметрів плазми в перехідному шарі. Побудова точного розв'язку системи рівнянь з урахуванням в'язкості іонів в перехідному шарі є предметом подальшого дослідження.

1. D.J. Bohm. Minimum ionic kinetic energy for a stable sheath. In: *The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields*. Edited by A. Guthrie, R.K. Wakerling (McGraw Hill, 1949), p. 77.
2. I. Langmuir, L. Tonks. A general theory of the plasma of an arc. *Phys. Rev.* **34**, 876 (1929).
3. W. Schottky. Wondstrem und theorie der positiven saule. *Phys. Zeits.* **25**, 342 (1924).
4. K.V. Persson. Inertia controlled ambipolar diffusion. *Phys. Fluids* **5**, 1625 (1962).
5. В.С. Голубев. Положительный столб тлеющего разряда и дуги низкого давления. В: *Электрический ток в газе. Установившийся ток*. Под редакцией В.Л. Грановского (Наука, 1971). С. 235.
6. I.D. Kaganovich. How to patch active plasma and collisionless sheath: practical guide. *Phys. Plasmas* **9**, 4788 (2002).

7. K.-U. Riemann. The Bohm criterion and sheath formation. *J. Phys. D* **24**, 493 (1991).
8. K.-U. Riemann, J. Seebacher, D.D. Tskhakaya, S. Kuhn. The plasma-sheath matching problem. *Plasma Phys. Control. Fusion* **47**, 1949 (2005).
9. В.Е. Голант, А.П. Жилинский, И.Е. Сахаров. *Основы физики плазмы* (Атомиздат, 1977).
10. А.И. Ахиезер, И.А. Ахиезер, Р.В. Половин, А.Г. Ситенко, К.Н. Степанов. *Электродинамика плазмы* (Наука, 1974).
11. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Гидродинамика, теоретическая физика. Т. VI* (Наука, 1986).
12. R.W.P. McWhirter. Spectral intensities. In: *Plasma Diagnostic Techniques*. Edited by R.H. Huddleston, S.L. Leonard (Academic Press, 1965).
13. Б.М. Смирнов. *Физика слабоионизованного газа* (Наука, 1985). С. 414.
14. Ю.М. Каган, В.И. Перель. Зондовые методы исследования плазмы. *УФН*, **81**, 409 (1963).
15. R.N. Franklin, J.R. Ockerdon. Asymptotic matching of plasma and sheath inactive law pressure discharge. *J. Plasma Phys.* **4**, 371 (1970).

Одержано 12.11.20

Ya.F. Leleko, D.L. Grekov

#### INFLUENCE OF ION VISCOSITY ON THE DISTRIBUTIONS OF PLASMA PARAMETERS IN STATIONARY GAS DISCHARGE

On the basis of hydrodynamic equations, the distributions of such plasma parameters as the electric potential, the ion and electron densities, and the ion flow velocity toward the wall in a plane layer of the stationary weakly ionized non-isothermal plasma confined between the dielectric walls have been obtained. The temperatures of ions and electrons, as well as the density of neutrals, are assumed to be constant. Instead of finding the eigenfunctions and eigenvalues of the described problem, the Cauchy problem is solved with the initial values corresponding to those that are in the plasma bulk. The wall position is determined from the balance condition for the ion and electron fluxes. A method to avoid the singularity in the system of hydrodynamic equations has been proposed. The influence of the ion viscosity in the equation of ion motion was estimated. The distributions of plasma parameters are obtained considering the ion viscosity in a quasineutral region.

*Keywords:* stationary gas discharge, viscosity, transient layer, hydrodynamic approximation, Debye radius.