Ю.В. ХОРОШКОВ

Вул. Світличного Івана, 4, кв. 40, Київ 03087
(e-mail: yurihoroshkov@gmail.com)

УДК 539

ДЗЕРКАЛЬНА СИМЕТРІЯ ЯК АЛГЕБРА ОПЕРАТОРІВ ДЛЯ НЕКОМУТАТИВНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ПРОСТОРУ-ЧАСУ

Аналіз геометричних і алгебраїчних властивостей дзеркальних відображень дозволив використовувати їх як операторну алгебру некомутативної геометрії. Координатами некомутативної геометрії є авто- або крос-кореляції координат дзеркально відображених просторів. Розглянуто окремий випадок шестивимірного келерова многовиду, який відображається на некомутативну геометрію з векторною алгеброю Кліффорда Cl_4. Цей випадок відображення відповідає тетракварку у складі двох пар кварк-антикварк з різних поколінь і зарядами $\pm\frac{2}{3}q$.

Ключові слова: дзеркальна симетрія, некомутативна геометрія, алгебра Кліффорда, кореляція.

1. Вступ

Останні десятиліття відзначені суттєвими досягненнями в застосуванні геометричних методів у фізиці. Перш за все, це стосується створення струнної теорії простору-часу [1, 2]. У цій теорії була відкрита дзеркальна симетрія геометричних параметрів просторів Колабі–Яу [3], що істотно спростило рішення наближених рівнянь теорії в дзеркальному образі за однакової фізики результатів. Незважаючи на вражаючі результати, до теперішнього часу струнна теорія є незавершеною, оскільки невідомо який з величезного числа можливих шести або більш мірних просторів відповідає фізиці нашого простору-часу. Однак, творці теорії струн не втрачають оптимізму і сподіваються, що подальший прогрес можливий на шляху заміни звичайної геометрії новим апаратом – некомутативною геометрією. Основи некомутативної геометрії були розроблені Аланом Коном (Alain Connes) [4] для квантових полів, використовуючи операційну алгебру в описі геометрії. Однак, в цьому підході "... все ж бракує істотних моментів для опису самого початкового стану..." [5].

Метою роботи є дослідження методів, за допомогою яких дзеркальна симетрія може відобразити шестимірний комплексний простір у некомутативну геометрію і які фізичні процеси можуть цьому відповідати. Результати роботи можуть знайти застосування в ядерній фізиці, квантовій механіці, квантовій електродинаміці, струнної теорії, теорії гравітації та астрофізиці.

2. Геометрія та алгебра дзеркального відображення

2.1. Основи геометрії

Математика дає приклади дзеркальної симетрії. Позитивні і негативні числа утворюють дзеркальну пару інверсної симетрії щодо нуля. Комплексні числа z та пов'язані з ними z^* утворюють дзеркальну пару щодо дійсної осі. Композицію інверсної та перестановчої симетрій демонструє дзеркальна пара z and $1/z^*$ щодо одиничного кола. В геометрії, як історично склалося, будемо виходити з досвіду. На рис. 1 показані дзеркальні відображення (дзеркальні симетрії) площини, орієнтованої ортогональними базисними векторами *1, 2* системи координат. Положення плоского "дзеркала" кратні повороту на кут $\varphi = 45^\circ$ градусів, $\varphi = k\frac{\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Для $\varphi \geq \pi$ відображення в "дзеркалі" втрачає сенс. Дискретність положення "дзеркал" і яскраво виражені симетрії вхідних та відображених базисних векторів взаємопов'язані і відображають різні властивості дзеркального відображення – інверсну та переставну симетрії. Причому відображені дзеркальні симетрії рис. 1, *c, d* протилежні симетріям рис. 1, *a, b*. Відзначимо, що для протилежних симетрій положення "дзеркал" ортогональні в фазовому просторі їх обертання.

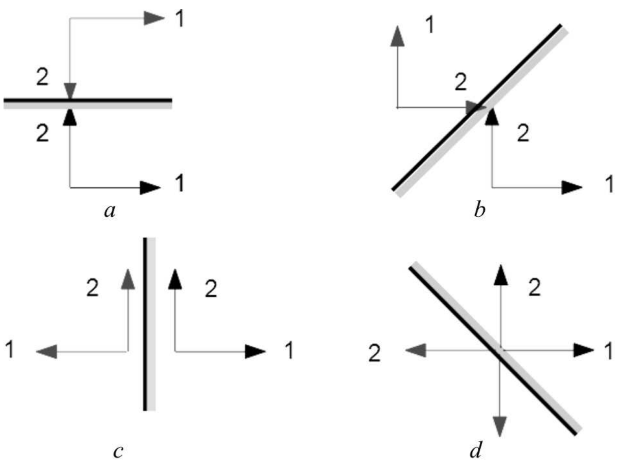

Рис. 1. Дзеркальні відображення орієнтовної площини

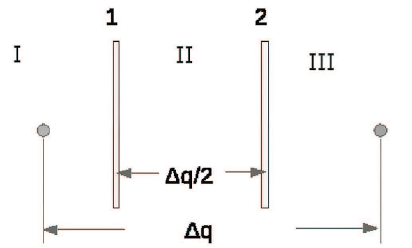

Рис. 2. "Трансляція" двома дзеркалами

Є ще одна досить незвичайна геометрична симетрія, яку умовно можна назвати "трансляцією". Ця симетрія складається з послідовності двох плоских дзеркал, розділених "відстанню" $\triangle q/2$ (рис. 2), і має низку особливостей. Розміри зон I–III, де діє ця симетрія, однакові і рівні $\triangle q/2$. Довільна точка з многовиду зони I переноситься в зону III на відстань $\triangle q$. Незвичайність цієї симетрії полягає у виборі розмірності фізичної величини $\triangle q$. Дійсно, визначимо в зоні I одиничний двовимірний вектор, який в полярних координатах має єдиний параметр $\triangle q = \varphi$. Вважаючи, що в зоні II $\varphi = \alpha\pi/2, \alpha = 0, 1, 2, 3$, отримаємо інше геометричне представлення для рисунків 1, *a–d*. Це – досить тривіальний результат, який показує, що однаковий результат досягається обертанням "дзеркала" або обертанням системи координат, що відображається (обертанням одиничного вектора у фіксованій системі координат). З однією істотною відмінністю у обертаннях – вектор повертається на кут $\triangle\varphi$, тоді як "дзеркала" необхідно повернути на кут $\triangle\varphi/2$. Ситуація ускладнюється, якщо в зоні I визначені координати (r, φ), яку можна звести до попередньої, якщо "нормувати" 1-е дзеркало на $1/r^2$. Однак в цьому випадку в зоні III відображається многовид з координатами $(1/r, \varphi)$. Наведений приклад описує один з варіантів виникнення так званої T-дуальності в теорії струн, розглянутий в [6]. І, нарешті, можна уявити ситуацію узагальнених "дзеркал", відстань між якими вимірюється в одиницях дії h, де h – стала Планка. У цьому випадку рис. 2 є гарною ілюстрацією співвідношення невизначеності.

2.2. Властивості операторів дзеркальних відображень

Симетрії векторів на рис. 1, *a, b* можна виразити через оператори дзеркальних відображень $\mathbf{s}_1$ та $\mathbf{s}_2$. Якщо для векторів на рис. 1 використати позначення у вигляді кет- та бра-векторів $\mathbf{1} \mapsto |+\rangle$, $\mathbf{2} \mapsto |-\rangle$, тоді безпосередньо з рис. 1, *a, b* дія цих операторів на вектори є

$$\mathbf{s}_1|+\rangle = +1\,|+\rangle, \quad \mathbf{s}_1|-\rangle = -1\,|-\rangle; \tag{1}$$

$$\mathbf{s}_2|+\rangle = |-\rangle, \quad \mathbf{s}_2|-\rangle = |+\rangle. \tag{2}$$

Базисні вектори $|+\rangle$ та $|-\rangle$ є власними векторами оператора $\mathbf{s}_1$ з власними числами $\lambda_\pm = \pm 1$. Для нормованих ортогональних базисних векторів їх скалярний добуток визначається як $\langle\pm|\pm\rangle = 1$, $\langle\pm|\mp\rangle = 0$. З останнього виразу можна безпосередньо отримати матричне представлення ермітових операторів дзеркальних відображень

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ці оператори формують прямокутний базис векторної алгебри Кліффорда Cl_2 щодо скалярного добутку, визначеного як антикомутатор $\mathbf{s}_1 \bullet \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2]_+ = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_2\mathbf{s}_1) = 0$, де означено зовнішній (векторний) добуток $\mathbf{s}_1 \wedge \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2] = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_2\mathbf{s}_1) = \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$. У векторній алгебрі Cl_2 $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$ є бівектором або аксіальним вектором і, як оператор $\pm\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$, визначає J-перетворення, іншими словами, повороти на $\pm 90°$: $(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2)\mathbf{s}_1 = -\mathbf{s}_2$ – лівий поворот і $(\mathbf{s}_2\mathbf{s}_1)\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2$ – правий поворот. Цей оператор також може бути представлений як $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 = i\mathbf{s}_3$, де $\mathbf{s}_3$ доповнює базисні вектори Cl_2 до векторної алгебри Cl_3. Повна алгебра Cl_3 має 8 лінійно незалежних базисних елементів, включаючи додатково $\mathbf{1}$ – скаляр, 3 бівектора $\boldsymbol{b}_k = i\mathbf{s}_k = \epsilon_{kij}\mathbf{s}_i\mathbf{s}_j$

(ϵ_{kij} – символ Леві–Чивіти) та $\mathbf{I} = \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3 = i\mathbf{1}$ – псевдоскаляр. До Cl_3 додається нова симетрія $i\mathbf{1}$, яка, наприклад, переводить дійсну площину в чисто уявну. Комбінації з новими симетріями породжують новий вид симетрії – проектори $\mathbf{P}_k$. Сформуємо оператор $\mathbf{P}_{k\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \mathbf{s}_k)$, який має властивості $(\mathbf{P}_{k\pm})^2 = \mathbf{P}_{k\pm}$ та $\mathbf{P}_{k+}\mathbf{P}_{k-} = \mathbf{0}$. Результат його дії, наприклад, на базисні вектори має вигляд $\mathbf{P}_{1+}(|+\rangle + |-\rangle) = |+\rangle$. Іншими словами, проектор $\mathbf{P}$ в "задзеркаллі" виділяє (видаляє) з площини один вимір. Слід зазначити, що композиції скаляра $\mathbf{1}$ з операторами дзеркальних відображень в алгебрі Cl_2 дозволили визначити всі три відомі системи комплексних чисел в залежності від властивостей квадрата уявної одиниці $\epsilon^2 = 0, \pm 1$ [7]. З іншого боку, геометричні дзеркальні симетрії на рис. 1 вказують на існування дзеркальних симетрій, згенерованих операторами: $\mathbf{s}_i$ – звичайне "дзеркало", $(-\mathbf{s}_i)$ – "антидзеркало". Тут можна органічно дописати $\mathbf{1} \mapsto \mathbf{s}_0$ – "тотожне дзеркало" та $i\mathbf{1}$ – "уявне дзеркало", а також бівектори $\boldsymbol{b}_k$ як елементи J-перетворення. Формалізація дзеркальних відображень векторною алгеброю Кліфорда дозволило істотно розширити уявлення про дзеркальну симетрію. Тому доцільно вважати алгебру Cl_3 загальним формулюванням дзеркальної симетрії і розглядати властивості та операції в ній як наслідок розширеного закону дзеркальної симетрії.

Позначення операторів як $-\mathbf{s}_1, -\mathbf{s}_2$ не є випадковим, оскільки для матричного представлення діагонального оператора $\mathbf{s}_1$ визначено спектральне зображення

$$F_1(\psi) = \mathbf{V}\left(\frac{\psi}{2}\right)\mathbf{s}_1\mathbf{V}^{-1}\left(\frac{\psi}{2}\right), \tag{4}$$

де $\mathbf{V}\left(\frac{\psi}{2}\right)$ – відповідна матриця обертання і $\mathbf{V}\left(\frac{\psi}{2}\right)\mathbf{V}^{-1}\left(\frac{\psi}{2}\right) = 1$. Для дискретного кута повороту $\psi = \alpha\pi/2, \alpha = 0, 1, 2, 3$ "спектр" $\mathbf{s}_1$ має вигляд

$$F_1 \Rightarrow \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, -\mathbf{s}_1, -\mathbf{s}_2\}, \tag{5}$$

звідки випливає, що дискретність кута повороту $\triangle\psi = \pi/2$ як елемент J-перетворення пов'язаний з умовою збереження інверсної та переставної симетрій.

Дзеркальна симетрія передбачає наявність вихідного простору і відбитого простору – "задзеркалля". Початковий простір будується на власних векторах $\varphi^k_{1,2}$ операторів дзеркальних відображень $\mathbf{s}_k$, які, в свою чергу, належать тривимірному келерову многовиду (Kähler manifold) з компонентами (ξ, η), де $\xi = x + iz, \eta = y - iz$ [7]. Введемо багатовимірний векторний простір $\mathcal{H}(x^0, x^1, ...)$ і вектор в ньому $|R\rangle$, який проєктується на площині власних векторів операторів $\mathbf{s}_k$

$$|R\rangle \Rightarrow |r^k\rangle = r^k_1|\varphi^k_1\rangle + r^k_2|\varphi^k_2\rangle, \tag{6}$$

де $|r^k\rangle$ – k – представлення вектора $|R\rangle$, і $r^k_n = \langle\varphi^k_n|R\rangle$ – коваріантні координати $|R\rangle$ в базисі $|\varphi^k_n\rangle$ власних векторів операторів $\mathbf{s}_k$. Ермітови оператори $\mathbf{s}_k$ дають для комплексних координат дійсні величини в конструкціях виду $G^k_k = \langle r^k|\mathbf{s}_k|r^k\rangle = |r^k_1|^2 + |r^k_2|^2$. Останній вираз являє собою скалярний добуток вектора $|r^k\rangle$ і дзеркально відбитого оператором $\mathbf{s}_k$ вектора спряженого простору $\langle r^k|_{\mathrm{ref}} = \langle r^k|\mathbf{s}_r$. Цей вираз відповідає взаємній кореляції (крос-кореляції) векторів при дзеркальному відображенні.

3. Спектральне подання операторів дзеркального відображення і квантування

3.1. Оператори спектрального представлення

Якщо накласти умову збереження інверсної та переставної симетрій для дзеркальних відображень, то спектральне представлення оператора дзеркального відображення $\mathbf{s}_1$ (5) необхідно вважати дискретним. При цьому спектральні компоненти $\mathbf{s}_{1,2}$ та $-\mathbf{s}_{1,2}$, як позитивні та негативні "частоти спектра", повинні певним способом бути розділені. Рисунок 1 підказує, що така можливість є, якщо кожна пара ортогональних базисних векторів $(\mathbf{s}_{1,2}, -\mathbf{s}_{1,2})$ породжуватиме (гіпер)площину і служитиме базисом нового векторного простору. Іншими словами, $(\mathbf{s}_{1,2}, -\mathbf{s}_{1,2}) \Rightarrow \mathbf{e}_{1,2}$. Дискретність "спектра" можна ввести в такий спосіб. У виразі (4) для "спектра" діагонального оператора $\mathbf{s}_1$ матриці обертання можна виразити через кватерніон і привести його до вигляду:

$$F_1\{\mathbf{s}_1\} = \exp(-i\mathbf{s}_3\psi)\mathbf{s}_1 = \mathcal{F}_3(\psi)\mathbf{s}_1, \tag{7}$$

де бівектор $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 = i\mathbf{s}_3$ визначається як кватерніонна уявна одиниця, а $\mathcal{F}_3(\psi)$ позначимо як оператор спектрального перетворення. Подамо оператор спектрального перетворення $\mathcal{F}$ у вигляді інтеграла, який виконує необхідну дискретизацію і відображає дію операторів $\pm\mathbf{s}$ в різних просторах

$$\mathcal{F}_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} d\psi\, \Theta_\alpha(\psi) \otimes \exp(-i\mathbf{s}_3\psi), \tag{8}$$

де $\Theta_\alpha(\psi)$ має структуру матриць $\mathbf{s}_\alpha$ $\alpha = 0,1,2,3$, елементами яких є $\delta(\psi)$ дельта-функції Дірака, і $\otimes$ позначає добуток Кронекера. Використовуючи в ролі матриці оператор, $\mathbf{s}_0$ отримуємо одне з можливих дискретних представлень $\Theta(\psi)$ у вигляді

$$\Theta_0(\psi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\delta(\psi - n2\pi) & 0\\ 0 & \delta(\psi - \pi - n2\pi)\end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\delta(\psi - \frac{\pi}{2} - n2\pi) & 0\\ 0 & \delta(\psi - \frac{3\pi}{2} - n2\pi)\end{pmatrix}, \tag{9}$$

де врахована періодичність кватерніонної змінної і $n = 0,1,2,\ldots$. Для (8) існує нормування у вигляді

$$N\{\mathbf{s}_0\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} d\psi \Theta_0(\psi) \otimes \mathbf{s}_0 = \begin{pmatrix}\mathbf{s}_0 & 0\\ 0 & \mathbf{s}_0\end{pmatrix} = \mathbf{e}_0. \tag{10}$$

З виразу (8) отримаємо

$$\mathcal{F}_3(n) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{s}_0 & 0\\ 0 & -\mathbf{s}_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 & 0\\ 0 & \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\end{pmatrix}\right] \otimes \\ \otimes \exp(-i\mathbf{s}_3\, n\, 2\pi). \tag{11}$$

У цьому виразі $\exp(-i\mathbf{s}_3 n2\pi) \equiv \mathbf{s}_0$ і не впливає на вигляд матриць, але показує, що по координаті бівектора $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$ формується дискретний ряд з операторів $\mathcal{F}$. Дія оператора $\mathcal{F}_3$ на $\mathbf{s}_1$, визначається як $\mathcal{F}_3 \otimes \mathbf{s}_1$ та приводить до базисних векторів: $\mathcal{F}_3 \otimes \mathbf{s}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$, а також $\mathcal{F}_3 \otimes \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$, де нові базисні вектори

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{s}_1 & 0\\ 0 & -\mathbf{s}_1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}\mathbf{s}_2 & 0\\ 0 & -\mathbf{s}_2\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Вирази (9), (11) показують приклад геометричної дискретизації по осі бівектора.

Спектральне подання (8) $\Theta_\alpha(\psi)$ з матрицею $\mathbf{s}_0$ є дискретним відображенням математичного визначення спектра діагональних матриць і геометричного тлумачення поняття ортогональності операторів $\mathbf{s}_{1,2}, -\mathbf{s}_{1,2}$ дзеркальної симетрії. В інтегралі (8) матрицю $\Theta_\alpha(\psi)$ можна узагальнити на всі матриці базисних векторів $\mathbf{s}_\alpha$ алгебри Cl_3, але спектральне подання реалізується тільки для парних значень $\alpha = 0, 2$. Це дозволяє отримати різні спектральні подання матриць 4×4 та, в тому числі, які знайшли застосування в квантовій механіці (представлення Майорани, Дірака). Дійсно, для $\Theta_2(\psi)$ наведені вище операції дають

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix}0 & \mathbf{s}_1\\ -\mathbf{s}_1 & 0\end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix}0 & \mathbf{s}_2\\ -\mathbf{s}_2 & 0\end{pmatrix}, \tag{13}$$

де $\gamma_{1,2}$ – матриці Дірака в індексації операторів дзеркальної симетрії. Інтеграл нормування дає новий вектор:

$$N_2\{\mathbf{s}_0\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} d\psi \Theta_2(\psi) \otimes \mathbf{s}_0 = \begin{pmatrix}0 & \mathbf{s}_0\\ \mathbf{s}_0 & 0\end{pmatrix} = \mathbf{e}_4. \tag{14}$$

Матриці $\gamma_{1,2}$ є бівекторами, оскільки $(\gamma_{1,2})^2 = -\mathbf{e}_0$ і виражаються через новий вектор $\mathbf{e}_4$ як $\gamma_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4$ та $\gamma_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_4$. Кватерніон $Q_3 = \exp(-i\mathbf{s}_3\psi)$ визначає обертання в площині базисних векторів $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\}$. В [7] показано, що кватерніони $Q_1 = \exp(-i\mathbf{s}_1\psi)$ та $Q_2 = \exp(-i\mathbf{s}_2\psi)$ визначають обертання в площинах $\{\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$ та $\{\mathbf{s}_3, \mathbf{s}_1\}$ відповідно. Використання цих обертань в (8) дозволяє отримати додаткові спектральні подання операторів дзеркальної симетрії $\mathcal{F}_1 \otimes \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$, $\mathcal{F}_1 \otimes \mathbf{s}_3 = \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ та $\mathcal{F}_2 \otimes \mathbf{s}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1)$, $\mathcal{F}_2 \otimes \mathbf{s}_1 = \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1)$. Оператори $\mathbf{e}_\alpha$ ($\alpha = 0,1,2,3,4$) формують базисні вектори алгебри Cl_4 в некомутативній геометрії.

3.2. Спектральне подання в фізичних змінних

Інтеграл (8), який реалізує дискретне спектральне подання операторів дзеркальної симетрії, базується на математичних і геометричних властивостях цих операторів. В результаті застосування спектрального подання з'явилася додаткова геометрична дискретизація по осях бівекторів, пов'язана з періодичністю процесів обертання. Ці дискретні властивості для некомутативної геометрії вимагають аналізу можливих фізичних процесів, що забезпечують їх появу. Фізичні змінні з'являються при факторизації фази $\psi = \omega t = 2\pi t/T$, де T – період обертання, або в інших позначеннях $\psi = 2\pi Et/h = 2\pi S/h$, де E – енергія процесу обертання, $2\pi E/h = \omega$ та S – має сенс дії, а нормуюча стала h покладається рівною сталій Планка. Змінні інтегрування в (8) в цих випадках замінюються на t або S параметри $1/T$ та $1/h$ переходять множниками $(1/T)^{-1}$ або $(1/h)^{-1}$ в оператори $\mathbf{e}_\alpha$ відповідно. Якщо провести аналогію з квантово-механічними операторами координати $\mathbf{q}$ або імпульсу $\mathbf{p}$, то ці два види факторизації приводять до спектральних представлень, які можна назвати "частотним" або "квантовим" представленнями відповідно.

Є умови, за яких ці два подання є еквівалентними. Припустимо, що сам процес обертання є фізичним процесом, коли експоненціальний множник в (8) замінюється на оператор $\mathbf{R} = E\exp(-i\mathbf{s}_k\omega t)$, де E – енергія процесу $\mathbf{R}$. У цьому процесі параметри E, ω змінюються в деяких межах. Умова незалежності спектрального представлення від параметрів процесу $\mathbf{R}$ формулюється з (8) зокрема так:

$$(E_1T_1 - E_2T_2)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 0. \tag{15}$$

З цього виразу випливає, що $E_1T_1 = E_2T_2 = \text{const}$. Якщо покласти цю константу рівною сталій Планка h, то з цього випливає $E = h\nu$, і $\mathbf{R}$ є некласичним процесом обертання. В ролі базового інтеграла для спектрального представлення в фізичних змінних будемо приймати вираз з ωt

$$\mathcal{F}_k = 2\pi \int_0^\infty dt\Theta_{0,2}(t) \otimes \exp(-i\mathbf{s}_k\omega t). \tag{16}$$

Слід зазначити, що при факторизації фази $\psi = 2\pi S/h$ і інтегруванні по змінній S, аргументи дельта-функцій набувають вигляду $S - mh/4 - nh$, $m = 0, 1, 2, 3$. Цей вираз показує, що $\mathbf{s}_k$ і $-\mathbf{s}_k$ в термінах дії відрізняються на $\frac{1}{2}$ кванта дії h. Це підтверджує можливість фізичної реалізації рис. 2 для $\triangle q/2 = h/2$.

4. Кореляційне подання дзеркальних відображень в некомутативній геометрії

Введемо оператори автокорреляції $\mathbf{G}^k = |r^k\rangle\langle r^k|$, яка для нормованих векторів $|r^k\rangle$ має властивості проектора $(\mathbf{G}^k)^2 = \mathbf{G}^k$. Визначимо також оператори $\mathbf{K}^k_{rl...} = \mathbf{G}^k\mathbf{s}_r\mathbf{s}_l...$, які відповідають взаємній кореляції (крос-кореляції) вектора $|r^k\rangle$ і дзеркально відбитого операторами $\mathbf{s}_r\mathbf{s}_l...$ вектора спряженого простору $\langle r^k|_{\text{ref}} = \langle r^k|\mathbf{s}_r\mathbf{s}_l...$. Оператори $\mathbf{K}^k_{rl...}$ мають властивості:

$$\mathbf{K}^k_{rl...}|r^k\rangle = p^k_{rl...}|r^k\rangle, \quad p^k_{rl...} = \langle r^k|\mathbf{s}_r\mathbf{s}_l...|r^k\rangle, \tag{17}$$

де $p^k_{rl...}$ – власні числа крос-кореляційного оператора $\mathbf{K}^k_{rl...}$. Ці числа є скалярними добутками векторів вхідного простору і дзеркально відображеного. Це гарантує існування операторного виразу $p^k_{rl...}\mathbf{s}_r\mathbf{s}_l...$ та подання власних чисел оператора крос-кореляції з точністю до сталих множників $\lambda_{rl...}$, які є власними числами операторів $\mathbf{s}_r\mathbf{s}_l...$. Саме ця обставина дозволяє перейти від операторного представлення $\mathbf{s}_r$ до чисто векторного тлумачення $\mathbf{s}_r$ як базисних векторів некомутативної геометрії. З означення оператора $\mathbf{G}^k$ і виразу (6) маємо

$$\mathbf{G}^k = |r^k_1|^2\mathbf{p}^k_{11} + |r^k_2|^2\mathbf{p}^k_{22} + r^k_1 r^{k*}_2\mathbf{p}^k_{12} + r^k_2 r^{k*}_1\mathbf{p}^k_{21}, \tag{18}$$

де $\mathbf{p}^k_{nm} = |\varphi^k_n\rangle\langle\varphi^{k*}_m|$, символ (*) означає комплексне спряження. Оператори $\mathbf{p}^k_{nm}$ мають властивість: $(\mathbf{p}^k_{nm})^2 = \mathbf{p}^k_{nm}\delta_{nm}$, δ_{nm} – символ Кронекера. Іншими словами, оператори $\mathbf{p}^k_{nn}$ визначають проектори, а $(\mathbf{p}^k_{nm})^2 = 0, (n \neq m)$. Однак, комутатор операторів $\mathbf{p}^k_{12}$ та $\mathbf{p}^k_{21}$ дорівнює $[\mathbf{p}^k_{12}, \mathbf{p}^k_{21}] = \mathbf{p}^k_{11} - \mathbf{p}^k_{22}$. Якщо визначити проектори $\mathbf{p}^k_{nn}$ через оператори дзеркальної симетрії $\mathbf{s}_k$ у стандартному вигляді

$$\mathbf{p}^k_{11} = \mathbf{p}^k_+ = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{s}_k), \tag{19}$$

$$\mathbf{p}^k_{22} = \mathbf{p}^k_- = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{s}_k), \tag{20}$$

тоді $[\mathbf{p}^k_{12}, \mathbf{p}^k_{21}] = \mathbf{s}_k$. В алгебрі Cl_3 оператори $\mathbf{p}^k_{nm}$ можна представити двома парами

$$\mathbf{p}^2_{12} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_1 + i\mathbf{s}_3), \quad \mathbf{p}^2_{21} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_1 - i\mathbf{s}_3); \tag{21}$$

$$\mathbf{p}^1_{12} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_2 + i\mathbf{s}_3), \quad \mathbf{p}^1_{21} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_2 - i\mathbf{s}_3). \tag{22}$$

Перша пара породжує представлення $k = 2$ для оператора $-\mathbf{s}_2$, а друга – представлення $k = 1$ для оператора $\mathbf{s}_1$. Аналіз показує, що загальний вираз для подання $\mathbf{G}^k$ в k-базисі має вигляд

$$\mathbf{G}^k = \frac{1}{2}\varepsilon_{klr}[|r^k_1|^2(\mathbf{1} + \mathbf{s}_k) + |r^k_2|^2(\mathbf{1} - \mathbf{s}_k) + \\ + r^k_1 r^{k*}_2(\mathbf{s}_l + i\mathbf{s}_r) + r^k_2 r^{k*}_1(\mathbf{s}_l - i\mathbf{s}_r)], \tag{23}$$

де ε_{klr} – символ Леві–Чівіта для перестановок (123), (231), (312). З огляду на це, представлення $\mathbf{G}^1$ в (23) має вигляд

$$\mathbf{G}^1 = g^1_0\mathbf{s}_0 + g^1_1\mathbf{s}_1 + g^1_2\mathbf{s}_2 + g^1_3\mathbf{s}_3. \tag{24}$$

Коефіцієнти розкладу $\mathbf{G}^1$ визначаються так:

$$g_0^1 = \frac{1}{2}(|r_1^k|^2 + |r_2^k|^2),\ g_1^1 = \frac{1}{2}(|r_1^k|^2 - |r_2^k|^2), \quad (25)$$

$$g_2^1 = \frac{1}{2}(r_1^k r_2^{k*} + r_2^k r_1^{k*}),\ g_3^1 = \frac{i}{2}(r_1^k r_2^{k*} - r_2^k r_1^{k*}), \quad (26)$$

де i – уявна одиниця. Коефіцієнти розкладу g_α^1 – дійсні числа, і $\mathbf{G}^1$ має вигляд

$$\mathbf{G}^1 = |r^1\rangle\langle r^1| = \begin{pmatrix} |r_1|^2 & r_1 r_2^* \\ r_2 r_1^* & |r_2|^2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

В оптиці $\mathbf{G}^1$ називають матрицею когерентності для квазімонохроматичного випромінювання, а параметри $2g_\alpha$ – параметрами Стокса, які описують поляризацію електромагнітних хвиль. Цей розклад є повним, оскільки чотири компоненти $\mathbf{G}$ представлені чотирма їх лінійними комбінаціями з чотирьох лінійно незалежних матриць $\mathbf{s}_\alpha$. Якщо звернутися до виразу (17) для оператора крос-кореляції $\mathbf{K}^k_{\alpha.}$ і підсумувати за α конструкцію вигляду $p_\alpha^k \mathbf{s}_\alpha$, де $p_\alpha = 2g_\alpha$, то з точністю до константи 2 вона є представленням автокореляційного оператора $\mathbf{G}^1$ вихідного простору. Таким чином, вирази (23), (24) відображають кореляційні властивості дзеркально відбитого двовимірного векторного простору з комплексними координатами на чотиривимірний базис векторного простору з некомутативною геометрією. Цей 4-базис можна розглядати як гіперболічні гіперкомплексні числа і ввести спряження вигляду $\bar{\mathbf{s}}_0 = \mathbf{s}_0$ та $\bar{\mathbf{s}}_k = -\mathbf{s}_k$(спряження за Кліффордом). За аналогією з комплексними числами $z_1 z_2 = (\bar{z}_1 \bullet z_2) + i[\bar{z}_1 \times z_2]$ для цього 4-базису метричний тензор $\mu_{\alpha\beta}$ визначається як скалярний добуток вигляду

$$\mu_{\alpha\beta} = (\bar{\mathbf{s}}_\alpha \bullet \mathbf{s}_\beta) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{s}}_\alpha \mathbf{s}_\beta + \bar{\mathbf{s}}_\beta \mathbf{s}_\alpha), \quad (28)$$

де $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$. Тензор $\mu_{\alpha\beta}$ – діагональний з сигнатурою $\mathrm{diag}(\mu_{\alpha\beta}) = (1, -1, -1, -1)$, характерною для ріманового простору (простору Маньківського). Зовнішній добуток також визначається як $(\bar{\mathbf{s}}_\alpha \wedge \mathbf{s}_\beta) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{s}}_\alpha \mathbf{s}_\beta - \bar{\mathbf{s}}_\beta \mathbf{s}_\alpha)$. Останні формули для 4-базису справедливі і для 4-векторів.

5. Спектральні перетворення в процесі дзеркального відображення

5.1. Дотичні простори при дзеркальному відображенні

Дослідимо дотичний простір, точніше дотичний підпростір, для вектора вихідного простору $|r^k\rangle$ і його компонент в процесі дзеркального відображення. Компоненти вектора $|r^k\rangle$ виділяються проекторами $\mathbf{P}_{k\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \mathbf{s}_k)$ за формулами: $\{|r^k\rangle\}_+ = \mathbf{P}_{k+}|r^k\rangle = r_1^k|+\rangle_k$ та $\{|r^k\rangle\}_- = \mathbf{P}_{k-}|r^k\rangle = r_2^k|-\rangle_k$. Базисні вектори дотичного простору формуються на основі дії на компоненти $\{|r^k\rangle\}_\pm$ коваріантного 4-градієнта з диференціюванням по координатах x^α в базисі операторів $\mathbf{s}_\alpha$. Визначимо 4-градієнт як $\nabla = \partial_\alpha \mathbf{s}_\alpha$ та $\bar{\nabla} = \partial_0 \mathbf{s}_0 - \boldsymbol{\nabla}$, де $\boldsymbol{\nabla} = \partial_k \mathbf{s}_k$ – векторна частина 4-градієнта [1]. Оскільки $\mathbf{P}_{k\pm} = (\mathbf{P}_{k\pm})^2$, при дії 4-градієнта на компоненти $\{|r^k\rangle\}_\pm$ формується оператор дотичного підпростору $\mathbf{T}_k$ за правилом $\mathbf{T}_{k\pm} = \nabla \mathbf{P}_{k\pm}$. Тоді процес отримання дотичного підпростору для компонент вектора $|r^k\rangle$ можна описати виразом $\mathbf{T}_{k\pm}\{|r^k\rangle\}_\pm$. Покладемо, наприклад, $k = 1$, і в результаті для $\mathbf{T}_{k+}\{|r^k\rangle\}_+$ маємо

$$\mathbf{T}_{1+} r_1^1|+\rangle_1 = (\partial_0 + \partial_1) r_1^1|+\rangle_1 + \frac{1}{2}(\partial_2 + i\partial_3) r_1^1 \mathbf{s}_2|+\rangle_1 - \frac{1}{2} i(\partial_2 + i\partial_3) r_1^1 \mathbf{s}_3|+\rangle_1. \quad (29)$$

Для $\mathbf{T}_{k-}\{|r^k\rangle\}_-$ вираз (29) відрізняється тільки знаками. Можна отримати розв'язок рівняння $\mathbf{T}_{1+} r_1^1|+\rangle_1 = 0$ для r_1^1 у факторизованому вигляді $r_1^1 = r_1^1(x^2, x^3) w_1^1(x^0, x^1)$. Для рівняння $\mathbf{T}_{1-} r_2^1|-\rangle_1 = 0$ розв'язок відповідає комплексно спряженому виразу $r_2^{1*} = r_2^{1*}(x^2, x^3) w_2^{1*}(x^0, x^1)$. Похідні $\partial_2 \pm i\partial_3 = 0$ визначають умову Коші–Рімана для комплексних функцій $r_1^1(x^2, x^3)$ та $r_2^{1*}(x^2, x^3)$, а функції w_1^1, w_2^{1*} визначають хвилі в фізичних координатах простору-часу $x^0 = ct$, $x^k = (x, y, z)$, які поширюються в протилежних напрямах вздовж осі координат x^1. Дійсно, функції w_1^1, w_2^{1*} можна уявити через їх фур'є-образи $w_1^1(t, x^1) = \mathcal{F}\{\omega_1 t - k_1 x^1\}$ та $w_2^{1*}(t, x^1) = \mathcal{F}^*\{\omega_2 t + k_2 x^1\}$. Тоді рівняння для цих функцій виглядають таким чином:

$$\begin{aligned} &(\partial_0 + \partial_1)\mathcal{F}\{\omega_1 t - k_1 x^1\} = (\omega_1/c - k_1) = 0, \\ &(\partial_0 - \partial_1)\mathcal{F}^*\{\omega_2 t + k_2 x^1\} = (\omega_2/c - k_2) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

У цих виразах потрібно, щоб існували відмінні від нуля похідні функцій w_1, w_2^*. Виходячи з цих виразів, функції w_1, w_2^* описують хвильові процеси $w_1^1(x^0, x^1) = w_1^1(\omega_1(t - x^1/c))$, $w_2^{1*}(x^0, x^1) = w_2^{1*}(\omega_2(t + x^1/c))$. Неважко помітити, що розклад за власними векторами інших операторів має

[1] Тут по однакових індексах робиться підсумовування

структуру розв'язків, які аналогічні наведеним вище. Для цього, в отриманих результатах в компонентах вектора лише слід змінити номери координат за допомогою циклічної перестановки. Оскільки структура диференціального оператора в (29) відповідає алгебрі Cl_2, маємо 3 модифікації алгебр Cl_2 для опису дотичних підпросторів "задзеркалля" в залежності від напрямку поширення хвильового процесу. Цей напрямок визначається вибором базису власних функцій операторів $\mathbf{s}_k$, в якому представлений вектор вихідного простору $|r^k\rangle$.

Слід зазначити, що отримані результати описують досить широкий клас хвильових процесів, зокрема, рух частинки зі швидкістю c при відповідному вигляді функції w. В останньому випадку фізичний зміст змінної ω істотно змінюється.

5.2. Формування базису некомутативної геометрії в "задзеркаллі-2"

Дотичний простір в "задзеркаллі-1", побудований для нашого чотиривимірного простору-часу, показав існування трьох хвильових процесів. Ці процеси поширюються у трьох ортогональних напрямах, які описуються некомутативною геометрією з алгеброю Cl_2. Для аналізу виберемо версію дотичного підпростору для вектора $|r^k\rangle$ у вигляді плоских хвиль і $\langle r^k|r^k\rangle = E$

$$|r^k\rangle = \sqrt{\frac{E}{2}}\exp(ikx^k/2)[\exp(-i\omega t/2)|+\rangle_k + \\ + \exp(i\omega t/2)|-\rangle_k]. \qquad (31)$$

Цей вираз описує вектор з частотою обертання $\omega/2$ в різних базисах власних векторів операторів $\mathbf{s}_k$. З виразу (23) випливає, що для (31) автокореляційні оператори $\mathbf{G}_k$ в "задзеркаллі-1" мають вигляд

$$\mathbf{G}_{ik} = \frac{1}{2}E(\mathbf{1} + \exp(-i\mathbf{s}_i\omega t)\mathbf{s}_k), \qquad (32)$$

де $(ik) = (12), (23), (31)$, $\mathbf{1} = \mathbf{s}_0$. Замінюючи експонентний множник в (16) на $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{12} + \mathbf{G}_{23} + \mathbf{G}_{31}$ для $\alpha = 0$, одержуємо

$$\mathcal{F}_0\{\mathbf{G}\} = \frac{ET}{2}(3\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \qquad (33)$$

де виключена періодична залежність за координатами бівекторів $i\mathbf{s}_k$, оскільки вона не змінює вигляд сформованих базисних векторів

$$\mathbf{e}_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_\alpha & 0 \\ 0 & -\mathbf{s}_\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \qquad (34)$$

За цими результатами можна уявити модель простору в "задзеркаллі-2" у такий спосіб. Є дискретний S-простір дії у вигляді тривимірного простору $\{n_1, n_2, n_3\}$, складеного з кубічних комірок з ребрами розміром ET, які є координатними осями бівекторів $i\mathbf{s}_k$. Вузли ґратки описуються некомутативною геометрією з базисними векторами (34). Для Θ_2 в (16) можна отримати систему базисних векторів $\mathcal{F}_2\{\mathbf{G}\}$ у вигляді

$$\mathcal{F}_2\{\mathbf{G}\} = \frac{ET}{2}(3\mathbf{e}_4 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), \qquad (35)$$

де γ_k – матриці Дірака в індексації операторів дзеркальної симетрії:

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{s}_k \\ -\mathbf{s}_k & 0 \end{pmatrix}. \qquad (36)$$

Для некласичного процесу обертання покладемо $ET = h$ у виразах (33) та (35).

6. Підвищення розмірності некомутативної геометрії

6.1. Перехід до 4-вимірної або 5-вимірної некомутативної геометрії

Об'єднання операторів "дзеркал" $\mathbf{s}_k$ та "антидзеркал" $-\mathbf{s}_k$ в один оператор дзеркальних відображень $\mathbf{e}_k$ підвищує розмірність початкового простору дзеркальних відображень. Введемо два комплексних простора $\mathcal{H}_a$ и $\mathcal{H}_b$, які не перетинаються, але мають спільну точку 0. В основному представленні $|r^k\rangle(k = 1)$ проекції векторів цих просторів можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} |r_a\rangle &= a(f_1|+\rangle + f_2|-\rangle) \\ |r_b\rangle &= b(f_3|+\rangle + f_4|-\rangle), \end{aligned} \qquad (37)$$

де a, b – сталі множники. Об'єднаємо ці простори $\mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b$ і побудуємо кореляційний оператор $\mathbf{G}$, який в цьому випадку представлений матрицею 4×4

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} |a|^2\mathbf{G}_{11} & ab^*\mathbf{G}_{12} \\ ba^*\mathbf{G}_{21} & |b|^2\mathbf{G}_{22} \end{pmatrix}, \qquad (38)$$

де $\mathbf{G}_{kr}$ представлені матрицями 2×2. Діагональні оператори $\mathbf{G}_{11}, \mathbf{G}_{22}$ описують кореляції компонент векторів в кожному з просторів $\mathcal{H}_a$ та $\mathcal{H}_b$, а $\mathbf{G}_{12}, \mathbf{G}_{21}$ – кореляцію (взаємодію) цих компонент між $\mathcal{H}_a$ та $\mathcal{H}_b$. Отже, не тільки підвищується розмірність початкового простору дзеркальних відображень. Для того, щоб перейти до некомутативної геометрії, з виразу (38) випливає, що базисні вектори (32) мають бути доповнені операторами симетрій з недіагональними елементами. Використовуючи вектор $\mathbf{e}_4$ з (35), можна отримати розширення некомутативної геометрії Cl_3 до алгебри Cl_4. Ці алгебри формують S-простір дії в "задзеркаллі-2". Для некласичного S-простору виконуються комутаційні співвідношення, які, у випадку алгебри Cl_3, для бівекторов і 3-вектора мають вигляд:

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}'_k \wedge \mathbf{e}'_l = \frac{1}{2}[\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}'_l] = h^2 \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l, \\ &\mathbf{e}'_r \bullet (\mathbf{e}'_k \wedge \mathbf{e}'_l) = h^3 \epsilon_{klr} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l, \end{aligned} \qquad (39)$$

де ϵ_{klr} – символ Леві–Чівіта, і $\mathbf{e}'_k = h\mathbf{e}_k$.

6.2. Перехід до 6-вимірного простору дзеркальних відображень

Розглянемо окремо наступний некласичний випадок. Зв'яжемо компоненти векторів в просторах $\mathcal{H}_a$ та $\mathcal{H}_b$ J-перетворенням: $f_3 = f_2$, $f_4 = -f_1$, і покладемо $a = \sqrt{\frac{2q}{3h}}$, $b = \sqrt{-\frac{2q}{3h}} = ia$, де $\pm q$ – дійсна стала, яка асоціюється з елементарним зарядом. Як результат $\mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b$, отримаємо шестивимірний келеровий многовид вихідного простору дзеркальних відображень для "задзеркалля-2". В цьому випадку кореляційні блоки в (38) мають вигляд

$$\begin{aligned} &\mathbf{G}_{11} = \alpha \begin{pmatrix} |f_1|^2 & f_1 f_2^* \\ f_2 f_1^* & |f_2|^2 \end{pmatrix}, \\ &\mathbf{G}_{12} = \beta^* \begin{pmatrix} f_1 f_2^* & -|f_1|^2 \\ |f_2|^2 & -f_2 f_1^* \end{pmatrix}, \\ &\mathbf{G}_{21} = \beta \begin{pmatrix} f_2 f_1^* & |f_2|^2 \\ -|f_1|^2 & -f_1 f_2^* \end{pmatrix}, \\ &\mathbf{G}_{22} = \alpha \begin{pmatrix} |f_2|^2 & -f_2 f_1^* \\ -f_1 f_2^* & |f_1|^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \qquad (40)$$

де $\alpha = \frac{2q}{3h}, \beta = i\frac{2q}{3h}$.

Кореляцію $\mathbf{G}$ шестивимірного простору в "задзеркаллі-2" можна відобразити на некомутативну геометрію за допомогою крос-кореляції $\mathbf{K}$ "задзеркалля-2" та "задзеркалля-3", що виконується за допомогою базисних векторів $\mathbf{e}_\alpha$ та бівекторів γ (34), (35) з умовами комутаційних співвідношень (39). Як наслідок, в "задзеркаллі-3" можна записати 6 векторів некомутативної геометрії, які виглядають таким чином:

$$\Pi = p_0\mathbf{e}_0 + p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_4\mathbf{e}_4 + p_{14} ih\gamma_1 + p_{24} ih\gamma_2, \quad (41)$$

де значення p_α визначаються за формулою (17) та є рівними $p_0 = 2q(|f_1|^2 + f_2|^2)$; $p_1 = \frac{2}{3}q(|f_1|^2 - f_2|^2)$; $p_2 = \frac{2}{3}q(f_1 f_2^* + f_2 f_1^*)$; $p_4 = \frac{2}{i}q(f_1 f_2^* - f_2 f_1^*)$; $p_{14} = \frac{2}{3}q(f_1 f_2^* + f_2 f_1^*)$; $p_{24} = \frac{2}{3}(-q)(|f_1|^2 - f_2|^2)$. Усі компоненти p_α дійсні. Координата $p_3 = 0$. Ця координата відповідає сумі протилежно орієнтованих аксіальних векторів, які можна пов'язати з магнітними моментами.

7. Висновки

У статті не вирішуються завдання і проблеми теорії струн або некомутативної геометрії, але робиться спроба знайти спільне, де вони можуть стикатися. Для цього була вибрана чисто фізична методика "від досвіду" на основі фундаментальної симетрії – дзеркальної симетрії. Це дозволило ввести в теорію "початковий стан", який може набути реального фізичного змісту.

Дзеркальні відображення і умови збереження дзеркальних симетрій – інверсної та перестановчої симетрій – взяті за основу методу досліджень. Формалізація за допомогою алгебри геометричних побудов дзеркальних відображень на площині дозволила ввести матричні 2×2 оператори дзеркальних відображень, які підкоряються алгебрі Кліффорда *Cl_3* і утворюють базис некомутативної геометрії. Компонентами в цьому векторному базисі є автокореляції або крос-кореляції компонент векторів вихідного та дзеркального відбиваного простору. Умови збереження дзеркальних симетрій визначило появу для базисних векторів nJ-перетворення – дискретних обертань на $\pm n90°$ $(n = 0, 1, 2, ...)$. На основі цього перетворення введено своєрідний континуальний інтеграл [8], який за допомогою операції дзеркального відображення розширив представлення матричних операторів до матриць розмірності 4×4, а вихідний простір дзеркального відображення, в загальному випадку комплексний, з 4 до 8 вимірів.

Фізичну реалізацію описаних математичних результатів необхідно було шукати в процесах обертання, що виникають при дзеркальних відображеннях. Такий розв'язок отриманий для трьох дотичних підпросторів в "задзеркаллі-1" в термінах фізичних координат простору-часу. Використання континуального інтеграла для суми підпросторів дозволило в "задзеркаллі-2" підвищити розмірність базису некомутативної геометрії до алгебри Cl_4, яка включає матриці Дірака як бівектори векторної алгебри. Для того, щоб цей результат перетворення не залежав від енергії і частоти обертального процесу, процес повинен бути некласичним, тобто має виконуватися співвідношення $E = h\nu$.

У "задзеркаллі-2" була створена модель чотирьохкомпонентного комплексного вектора, який представляє шестивимірний комплексний простір. У "задзеркаллі-3" побудовано відображення цієї моделі на шість векторів некомутативної геометрії з дійсними координатами. Ці координати є кроскореляціями компонент векторів із "задзеркалля-2" і дзеркально відображених в "задзеркаллі-3". З фізичної точки зору представлену модель можна розглядати як тетракварк, побудований двома парами кварк-антикварк з різних поколінь кварків і зарядами $\pm\frac{2}{3}q$. Математичне доповнення показує, у який спосіб можна зв'язати розглянуту модель з електромагнітними полями.

Висловлюю подяку Фонду "Життелюб" в особі Юлії Парко і Андрію Степенко за допомогу при роботі над статтею.

ДОДАТОК

Дотичний простір некомутативної геометрії алгебри Cl_3

У виразі (41) скористаємося принципом відповідності $h \to 0$. В отриманому 4-векторі позначимо його компоненти як $p_0 \to A_0$, а коваріантні компоненти $p_k \to -A_k$. Використовуючи метрику простору Міньковського, отримуємо в нових позначеннях

$$\mathbf{W} = A^0\mathbf{e}_0 + A^1\mathbf{e}_1 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3. \tag{42}$$

Для 4-градієнта маємо також

$$\nabla = \partial_\alpha \mathbf{e}^\alpha = \partial_0\mathbf{e}_0 - \sum_{k=1}^{3} \partial_k \mathbf{e}_k. \tag{43}$$

Дотичний простір будується як внутрішній та зовнішній добутки, представлені антикомутатором і комутатором відповідно:

$$\nabla\mathbf{W} = \nabla \bullet \mathbf{W} + \nabla \wedge \mathbf{W} = \frac{1}{2}[\nabla, \bar{\mathbf{W}}]_- + \frac{1}{2}[\nabla, \bar{\mathbf{W}}]. \tag{44}$$

З цього виразу випливає

$$\begin{aligned} &\nabla \bullet \mathbf{W} = \partial_\alpha A^\alpha \mathbf{e}_0, \\ &\nabla \wedge \mathbf{W} = -\partial_0\mathbf{A} - \mathbf{grad}\, A^0 + \mathbf{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{B}, \end{aligned} \tag{45}$$

де $\mathbf{P}$ – полярний вектор, $\mathbf{B}$ – аксіальний вектор, $\mathbf{A} = A^k\mathbf{e}_k$, $\mathbf{grad} = \sum_{k=1}^{k=3} \partial_k \mathbf{e}_k$ і $\mathbf{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}$ – бівектор з компонентами $\partial_k A^r - \partial_r A^k$; $k, r = 1, 2, 3$.

1. H. Schwarz, E. Witten. *Superstring Theory. Vol. 1. Introduction* (Cambridge University Press, 1988).
2. M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten. *Superstring Theory. Vol. 2. Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology* (Cambridge University Press, 1988).
3. K. Hori, Sh. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, E. Zaslow. *Mirror Symmetry* (American Mathematical Society, 2003), Vol. 1.
4. A. Connes, Matilde Marcolli. *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives* (American Mathematical Society, 2007), Vol. 55.
5. B. Greene. *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory* (W.W. Norton & Company, 2010), Ch. 15.
6. A. Strominger, S.-T. Yau, E. Zaslow. Mirror symmetry is T-duality. arXiv:hep-th/9606040v2.
7. Yu.V. Khoroshkov. Mirror symmetry as a basis for constructing a spase-time continuum. *Ukr. J. Phys.* **60** (5), 468 (2015).
8. J. Zinn-Justin. *Path integrals in quantum mechanics* (Oxford University Press, 2005).

Одержано 06.10.21

Yu. V. Khoroshkov

MIRROR SYMMETRY
AS AN ALGEBRA OF OPERATORS
IN NONCOMMUTATIVE GEOMETRY OF SPACE-TIME

The analysis of the geometric and algebraic properties of mirror mappings allowed the latter to be used as the operator algebra of a noncommutative geometry. The coordinates of the noncommutative geometry are auto- or cross-correlation coordinates in the mirror-mapped spaces. A particular case of the six-dimensional Kähler manifold which is mapped on the noncommutative geometry with the vector Clifford algebra Cl_4 has been considered. This mapping corresponds to a tetraquark composed from two quark–anti-quark pairs with the charges $\pm\frac{2}{3}q$ taken from different generations.

Keywords: mirror symmetry, noncommutative geometry, Clifford algebra, correlation.