

Ю.О. АВЕРКОВ,<sup>1,2</sup> Ю.В. ПРОКОПЕНКО,<sup>1</sup> **В.М. ЯКОВЕНКО**<sup>1</sup><sup>1</sup> Інститут радіофізики та електроніки імені О.Я. Усикова, НАН України  
(Вул. Академіка Проскури, 12, Харків 61085; e-mail: prokopen@ire.kharkov.ua)<sup>2</sup> Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
(Пл. Свободи, 4, Харків 61022; e-mail: yuriiyaverkov@gmail.com)**НЕСТІЙКІСТЬ ТРУБЧАСТОГО  
ЕЛЕКТРОННОГО ПУЧКА У РАЗІ ОБДУВАННЯ  
ПЛАЗМОВОГО ТВЕРДОТІЛЬНОГО ЦИЛІНДРА,  
ЯКИЙ РОЗМІЩЕНО У СИЛЬНОМУ  
ПОЗДОВЖНЬОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ**

УДК 537.86, 621.372

*Теоретично досліджено електродинамічну систему, в якій замагнічений трубчастий пучок електронів обдуває циліндричний плазмово-твердотільний хвилевід. Встановлено, що у разі виконання квазістаціонарних умов у хвилеводі збуджуються гібридні об'ємно-поверхневі або поверхневі електромагнітні хвилі геліконного походження. Збудження власних хвиль хвилеводу здійснюється полем просторового заряду пучка із узгодженням поздовжніх спектральних складових електричного поля. Відзначено ефект не взаємності власних хвиль хвилеводу з ідентичною структурою розподілу полів, але таких, що відрізняються поширенням в азимутальному напрямі, а також у разі зміни напрямку зовнішнього магнітного поля. Показано, що нестійкість зв'язаних хвиль електродинамічної системи зумовлена ефектом Вавілова–Черенкова.*

*Ключові слова:* електронний пучок, хвиля просторового заряду, власні та зв'язані хвилі, пучкова нестійкість, інкремент нестійкості, ефект Вавілова–Черенкова.

**1. Вступ**

З освоєнням субміліметрового діапазону довжин хвиль особлива увага приділяється питанням генерування електромагнітних коливань у системах, в яких здійснюються взаємодії потоків заряджених частинок зі сповільнювальними структурами. Це зумовлено високою ефективністю перетворення кінетичної енергії частинок на електромагнітне випромінювання. Починаючи з 40-х років минулого століття, коли була створена лампа біжучої хвилі [1], досі не вичерпані всі можливості такого перетворення енергії. В даний час особлива увага приділяється електродинамічним системам, в яких здійснюється взаємодія потоків заряджених частинок з різними структурами, у тому числі, що містять плазмоподібні середовища [2–14]. Окремий інтерес виникає до систем з магнітоактивними структурами із провідних твердих тіл, які мають плазмові властивості. Такі структури у зовнішньому магнітному полі підтримують по-

ширення електромагнітних хвиль геліконного типу [15–25].

Слід зазначити, що останнім часом відновився інтерес до відкритих напрямних систем, що містять магнітоактивні складові. Одним із напрямків у цій галузі є дослідження збудження та поширення хвиль геліконного типу в циліндричних плазмових структурах, що розташовані у вільному просторі [19–21] або фоновій магнітоактивній плазмі [26–29] паралельно зовнішньому постійному магнітному полю. Зокрема підвищена увага приділяється хвилям, що відіграють важливу роль у високочастотних геліконних розрядах [19, 20]. Такі розряди супроводжуються формуванням плазмово-хвильових каналів при порівняно малому значенні зовнішнього магнітного поля і вважаються дуже ефективними джерелами густої низькотемпературної плазми. Вони широко використовуються для створення активних середовищ газових лазерів [30, 31], генерації плазми у магнітних пастках [32], розробки нових методів прискорення частинок [33], а також у плазмохімічних технологіях [34].

© Ю.О. АВЕРКОВ, Ю.В. ПРОКОПЕНКО,  
**В.М. ЯКОВЕНКО**, 2022

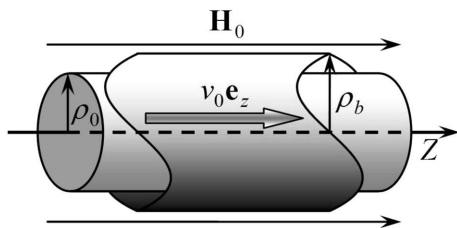


Рис. 1. Геометрія електродинамічної системи

У більшості теоретичних робіт, що присвячені поширенню хвиль геліконного типу в циліндричних плазмових каналах, які знаходяться у вільному просторі або фоновій магнітоактивній плазмі, розглядається випадок, коли зіткнення в плазмовому середовищі відсутні, наприклад [35–38]. Випадок порівняно малих втрат внаслідок зіткнення частинок, що не призводять до значних змін дисперсійних характеристик та структури полів хвиль, обговорювався у [39, 40]. Однак детальне вивчення характеристик хвиль у плазмових каналах за наявності зіткнень у цих роботах не проводилося. Випадок, коли частота зіткнень основних носіїв заряду замагніченого твердотілого плазмового циліндра істотно менша за їх циклотронну частоту, досліджувався в [24]. У роботі [41] представлена теорія геліконних хвиль, які поширюються в тривимірних вейлівських напівметалах з провідністю, що визначається топологічними властивостями хвильових функцій носіїв заряду (безмасових вейлівських ферміонів) в об'ємі зразка. Існування псевдомігнітних геліконів у деформованих матеріалах Дірака та Вейля передбачено в [42].

До сказаного необхідно додати, що в даний час практично відсутній строгий електродинамічний аналіз збудження власних хвиль відкритого плазмового хвилеводу, у тому числі твердотілого. У плазмово-твердотілих системах, як правило, реалізується ситуація, коли частота зіткнень носіїв заряду набагато перевищує частоту електромагнітної хвилі та забезпечуються умови поширення поверхневих та об'ємно-поверхневих хвиль [13, 43] геліконного типу [22]. Ці хвилі є слабозгасаючими електромагнітними хвилями, які поширюються в твердотілій плазмі, що знаходиться в постійному магнітному полі. Безперечно, дослідження механізмів генерації та способів збудження геліконних хвиль є необхідними, зокрема, для вдосконалення та створення джерел міліметрових та субміліметрових хвиль.

У цій роботі представлена лінійна теорія взаємодії замагніченого трубчатого потоку заряджених частинок з полями власних електромагнітних хвиль співвісного твердотілого плазмового циліндра, що має велику провідність. Об'єктом дослідження є електромагнітні процеси в електродинамічній системі, в якій трубчастий пучок електронів обдуває циліндричний плазмовий хвилевід, який розміщено у сильному поздовжньому однорідному магнітному полі. Предметом дослідження є зв'язані електромагнітні хвилі, одна з яких – хвиля просторового заряду в електронному потоці, а інша – електромагнітна хвиля у хвилеводі, що виконує роль сповільнювальної структури. Методи дослідження базуються на загальній теорії електромагнітного поля у квазістаціонарному наближенні, апараті математичної фізики для розв'язання крайових задач та електродинаміки плазми.

Новизна отриманих результатів полягає у подальшому розвитку теорії власних та вимушених коливань та хвиль геліконного типу у плазموподібних структурах з великою провідністю. Вперше показано можливість черенковської нестійкості замагніченого електронного пучка, який співвісно обдуває твердотілий плазмовий циліндр, що розміщений у сильному поздовжньому магнітному полі.

## 2. Постановка задачі

Розглянемо електродинамічну систему, яка складається з плазмово-твердотілого (напівпровідникового) хвилеводу з радіусом  $\rho_0$ , що займає область простору  $0 \leq \rho \leq \rho_0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , і  $-\infty \leq z \leq +\infty$ , та співвісного трубчатого потоку замагнічених електронів з радіусом  $\rho_b$ , що обдуває хвилевід (рис. 1). Система розташована у вільному просторі у постійному магнітному полі, вектор індукції  $\mathbf{H}_0$  якого спрямований паралельно до її аксіальної осі симетрії. Твердотіла плазма має велику провідність  $n$ -типу. Рівноважна концентрація електронів провідності плазми дорівнює  $N_0$ , а густина електронів трубчатого пучка з радіальною товщиною  $a - N_{b0}(\rho)$ . Електрони рухаються із середньою поступальною швидкістю  $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_z$ , де  $\mathbf{e}_z$  – орт осі  $z$ . Передбачається, що заряд електронів провідності плазми компенсовано позитивно зарядженим фоном кристалічної ґратки твердого тіла (напівпровідника), а товщина електронного

потоків  $a$  мала порівняно з іншими просторовими масштабами електродинамічної системи, зокрема  $a \leq 2(\rho_b - \rho_0)$ . Отже, рівноважну густину електронів у трубчастому пучку можна представити у вигляді  $N_{b0}(\rho) = N_{b0}a\delta(\rho - \rho_b)$ , де  $N_{b0}$  – рівноважна концентрація електронів пучка і  $\delta(\rho - \rho_b)$  – дельта-функція Дірака.

У лінеаризованому вигляді збурена густина струму пучка в точці з радіусом-вектором  $\mathbf{r}$  на момент часу  $t$  має вигляд

$$\mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t) = eN_{b0}(\rho)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + e\mathbf{v}_0N(\mathbf{r}, t) = \|\sigma_b\|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

де  $e$  – заряд електрона,  $N(\mathbf{r}, t)$  і  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  – змінні складові густини та швидкості електронів пучка,  $\|\sigma_b\|$  – тензор провідності електронного пучка. Напруженість змінного електричного поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=\rho}^z \mathbf{e}_\alpha E_\alpha(\mathbf{r}, t),$$

де  $\mathbf{e}_\alpha$  – орти координатних осей у разі перебирання  $\alpha = \rho, \varphi, z$ . Надалі радіальну компоненту густини струму пучка вважаємо рівною нулю внаслідок вибраної моделі радіально-тонкого трубчастого пучка. При цьому внаслідок замагніченості електронного потоку  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z v_z(\mathbf{r}, t)$ . В цьому випадку збурення потоку електронів здійснюються лише в поздовжньому напрямку внаслідок його взаємодії з електромагнітним полем власних хвиль плазмово-твердотільного хвилеводу.

Густина струму, що створюється електронами провідності твердотільної плазми, має вигляд

$$\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t) = eN_0\mathbf{u} = \|\sigma\|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

де  $\mathbf{u}$  – швидкість електронів провідності,  $\|\sigma\|$  – тензор провідності плазми.

Вважаємо, що

1) період зміни електромагнітного поля суттєво більший, ніж час вільного пробігу електрона у твердотільній плазмі;

2) в області простору, яку зайнято плазмою (напівпровідником), струм зміщення знехтувально малий порівняно зі струмом провідності (внаслідок великої провідності плазми).

У цьому випадку розподіл магнітного поля у плазмовому середовищі (всередині циліндра) описується рівняннями магнітостатики. Електромагнітні поля та струми, що задовольняють перелічені умови, є квазістаціонарними [44, 45].

### 3. Основні рівняння системи замагнічений трубчатий електронний пучок–магнітоплазмовий циліндр в умовах квазістаціонарності

Взаємодія електронного пучка з власними хвилями плазмово-твердотільного циліндра описується системою рівнянь Максвелла та лінеаризованими рівняннями руху для електронів пучка і провідності плазми:

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t), \quad \rho \leq \rho_0, \quad (4a)$$

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t), \quad \rho > \rho_0, \quad (4b)$$

$$\text{div } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (5)$$

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi eN(\mathbf{r}, t), \quad \rho > \rho_0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \\ &= \frac{e}{m_0} \left( \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$m\nu\mathbf{u} = e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{H}_0), \quad (8)$$

де

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=\rho}^z \mathbf{e}_\alpha D_\alpha(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=\rho}^z \mathbf{e}_\alpha H_\alpha(\mathbf{r}, t)$$

– індукція змінного електричного поля і напруженість змінного магнітного поля відповідно,  $\nu$  – частота зіткнень електронів провідності твердотільної плазми,  $m$  і  $m_0$  – ефективна маса електрона провідності плазми і маса вільного електрона відповідно. Частота зіткнень носіїв заряду в плазмі твердого тіла характеризує релаксацію її збурень, що пов'язані з коливаннями та зіткненнями з домішками і дефектами кристалічної ґратки. У лінеаризованому рівнянні руху електронів провідності (8) враховано, що  $|d\mathbf{u}/dt| \ll \nu|\mathbf{u}|$ . Ця умова є аналогом першої умови квазістаціонарності електромагнітного поля. Поза твердотільного плазмового хвилеводу внаслідок відсутності зарядів провідності середовища дія струму зміщення є суттєвою, що зумовлює ефекти, які пов'язані зі скінченною швидкістю поширення електромагнітних збурень (4b). У разі однорідної плазми вектор індукції

електричного поля  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  зв'язаний із вектором напруженості  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  матеріальним рівнянням

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \int \varepsilon(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') dt' d\mathbf{r}' = \|\varepsilon\| \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

де  $\varepsilon(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}')$  – функція впливу, яка характеризує ефективність передачі дії поля в часі та просторі,  $\|\varepsilon\|$  – тензор комплексної діелектричної проникності середовища. У разі відсутності просторової дисперсії середовища (коли  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ ) маємо

$$\varepsilon(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') = \|\varepsilon\| \delta(t-t').$$

У вакуумі поза електронним пучком, коли  $\rho > \rho_0$  і  $\rho \neq \rho_b$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , оскільки елементи тензора  $\|\varepsilon\|$  мають вигляд  $\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta}$ , в яких індекси  $\alpha$  і  $\beta$  відповідають напрямкам вздовж відповідних осей циліндричної системи координат  $\rho$ ,  $\varphi$  і  $z$ , а  $\delta_{\alpha\beta}$  – символ Кронекера.

Ефективна маса носіїв заряду, частота зіткнень та вплив зовнішнього магнітного поля визначають властивості тензора провідності плазми. З рівнянь (2) і (8) випливає, що тензор питомої провідності твердотільної плазми має вигляд

$$\|\sigma\| = \begin{pmatrix} \sigma_{\rho\rho} & \sigma_{\rho\varphi} & 0 \\ \sigma_{\varphi\rho} & \sigma_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

де

$$\sigma_{\rho\rho} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{e^2 N_0 \nu}{m(\omega_H^2 + \nu^2)},$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = -\sigma_{\varphi\rho} = \frac{e^2 N_0 \omega_H}{m(\omega_H^2 + \nu^2)},$$

$$\sigma_{zz} = \frac{e^2 N_0}{m\nu},$$

$\omega_H = \frac{eH_0}{mc}$  – циклотронна частота електронів провідності. Усередині хвилеводу, коли  $\rho \leq \rho_0$ , у разі відсутності просторової дисперсії індукція електричного поля

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \|\varepsilon\| \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) =$$

$$= \sum_{\alpha=\rho}^z \mathbf{e}_\alpha \sum_{\beta=\rho}^z \left[ \varepsilon_l \delta_{\alpha\beta} E_\beta(\mathbf{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \sigma_{\alpha\beta} E_\beta(\mathbf{r}, t') dt' \right],$$

258

де  $\varepsilon_l$  – діелектрична стала кристалічної ґратки [46]. Нагадаємо, що через квазістаціонарне наближення густиною струму зміщення у твердотільній плазмі

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha=\rho}^z \mathbf{e}_\alpha \sum_{\beta=\rho}^z \varepsilon_l \delta_{\alpha\beta} E_\beta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_l \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

ми нехтуємо. У випадку  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ , де  $i^2 = -1$  і  $\omega$  – характерний обернений час електромагнітного процесу (який відповідає циклічній частоті власної хвилі плазмового циліндра), елементи тензора комплексної діелектричної проникності  $\|\varepsilon\|$  мають вигляд  $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_\beta \delta_{\alpha\beta} + i \frac{4\pi\sigma_{\alpha\beta}}{\omega}$  [47].

З рівняння руху електронного пучка (7) випливає, що

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{m_0} E_z(\mathbf{r}, t), \quad (9)$$

$$E_\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{v_0}{c} H_\varphi(\mathbf{r}, t), \quad E_\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{v_0}{c} H_\rho(\mathbf{r}, t). \quad (10)$$

Дія оберненого оператора  $(\partial/\partial t + v_0 \partial/\partial z)^{-1}$  на (9), що визначає поздовжню змінну складову вектора швидкості електронів пучка  $v_z(\mathbf{r}, t)$ , відображає резонансне проявлення ефекту Вавілова–Черенкова. Зазначимо, що з урахуванням визначень компонентів електромагнітного поля поза плазмово-твердотільного хвилеводу, які впливають з (3) і (4b) та наводяться нижче, умови (10) виконуються лише у разі резонансної вавілово-черенківської взаємодії електронного потоку з полями власних хвиль плазмового циліндра.

З рівнянь (4b) та (6) випливає рівняння безперервності електронного потоку:

$$e \frac{\partial}{\partial t} N(\mathbf{r}, t) + \text{div } \mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Звідки, беручи до уваги (1), маємо

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) N(\mathbf{r}, t) = -N_{b0}(\rho) \frac{\partial}{\partial z} v_z(\mathbf{r}, t). \quad (11)$$

Дія оператора  $(\partial/\partial t + v_0 \partial/\partial z)^{-1}$  на це співвідношення, що визначає змінну частину густини електронів  $N(\mathbf{r}, t)$ , відображає резонансне збурення електронного потоку, яке здійснюється у разі ефекту Вавілова–Черенкова. З матеріального рівняння (1) з урахуванням (9) та (11) випливає, що електронний пучок в електродинамічній системі має

односпрямовану провідність  $\sigma_b$  вздовж осі  $z$ , яка визначається із співвідношення

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z}\right) \sigma_b E_z(\mathbf{r}, t) = \frac{e^2 N_{b0}(\rho)}{m_0} \frac{\partial}{\partial t} E_z(\mathbf{r}, t).$$

Звідки видно, що провідність електронного пучка має резонансний характер, який визначається ефектом вавілово-черенківської взаємодії електронів з полями власних хвиль плазмового циліндра.

Нижче в математичних виразах опустимо відображення функціональної залежності напруженостей електромагнітного поля та їх компонент від просторово-часових змінних  $(\mathbf{r}, t)$ , тобто маємо на увазі, що  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{E}$  і  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{H}$ . У разі необхідності виділятимемо залежність від радіальної змінної  $\rho$ .

#### 4. Граничні умови

З рівнянь (5) та (4) з урахуванням теорем Остроградського–Гаусса і Стокса випливає, що на поверхні твердотілого плазмового циліндра  $\rho = \rho_0$ , де  $\mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t) = 0$ , всі компоненти магнітного поля є безперервними, тобто  $\mathbf{H}(\rho_0 + 0) = \mathbf{H}(\rho_0 - 0)$ . Безперервності тангенціальних  $H_\varphi$ - та  $H_z$ -компонент поля зумовлені скінченною провідністю плазми. З (3) випливають безперервності аксіальної  $E_z$ - і азимутальної  $E_\varphi$ -компонент напруженості електричного поля на поверхні  $\rho = \rho_0$ , тобто

$$E_z(\rho_0 - 0) = E_z(\rho_0 + 0) \text{ і } E_\varphi(\rho_0 - 0) = E_\varphi(\rho_0 + 0).$$

Згідно з рівнянням (4а)  $\text{div } \mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t) = 0$ . Гранична умова до цього рівняння – безперервність переходу нормальної (радіальної) складової густини струму провідності  $j_\rho(\rho)$  всередині циліндра до густини струму зміщення  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} E_\rho(\rho)$  поза циліндром на його бічній поверхні, яка згідно з (2) має вигляд

$$\sigma_{\rho\rho} E_\rho(\rho_0 - 0) + \sigma_{\rho\varphi} E_\varphi(\rho_0 - 0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} E_\rho(\rho_0 + 0). \quad (12)$$

Значимо, що умова (12) внаслідок квазістаціонарного наближення еквівалентна безперервності нормальної (радіальної) компоненти вектора індукції електричного поля на бічній поверхні циліндричного хвилеводу  $\rho = \rho_0$ .

На поверхні електронного пучка  $\rho = \rho_b$  електричне поле має безперервні тангенціальні компоненти вектора напруженості  $\mathbf{E}$ , тобто

$$E_z(\rho_b - 0) = E_z(\rho_b + 0) \text{ і } E_\varphi(\rho_b - 0) = E_\varphi(\rho_b + 0),$$

та розрив нормальної компоненти вектора індукції  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{E}$ , що зумовлено збуреним зарядом пучка. Магнітне поле має безперервну нормальну компоненту вектора індукції  $\mathbf{H}$ , тобто

$$H_\rho(\rho_b - 0) = H_\rho(\rho_b + 0)$$

та розрив тангенціальної складової  $\mathbf{H}_\tau$  вектора напруженості  $\mathbf{H}$ , що зумовлено збуреним струмом пучка. Умови розриву тангенціальної складової магнітного поля та нормальної компоненти індукції електричного поля отримуються шляхом інтегрування (4b) та (6) по нескінченно малій площі-вектора  $d\mathbf{S} = -\rho d\varphi dz \mathbf{e}_\varphi$  та об'єму пучка  $dV = \rho d\rho d\varphi dz$  відповідно. Ці умови у разі ідеальної провідності трубчастого пучка в поздовжньому напрямку, що зумовлено замагніченістю електронного потоку, коли  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z v_z(\mathbf{r}, t)$ , мають вигляд

$$H_z(\rho_b + 0) - H_z(\rho_b - 0) = 0,$$

$$H_\varphi(\rho_b + 0, t) - H_\varphi(\rho_b - 0, t) =$$

$$= \frac{4\pi}{c} \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \int_{\rho_b - \Delta\rho}^{\rho_b + \Delta\rho} j_{bz}(\mathbf{r}, t) d\rho,$$

$$E_\rho(\rho_b + 0, t) - E_\rho(\rho_b - 0, t) =$$

$$= \frac{4\pi e}{\rho_b} \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \int_{\rho_b - \Delta\rho}^{\rho_b + \Delta\rho} N(\mathbf{r}, t) \rho d\rho,$$

де згідно з (1), (9) та (11)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 j_{bz}(\mathbf{r}, t) = \frac{e^2 N_{b0}(\rho)}{m_0} \frac{\partial}{\partial t} E_z(\mathbf{r}, t),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 N(\mathbf{r}, t) = -\frac{e N_{b0}(\rho)}{m_0} \frac{\partial}{\partial z} E_z(\mathbf{r}, t).$$

#### 5. Компоненти електромагнітного поля

Всередині хвилеводу ( $\rho \leq \rho_0$ ) згідно з (3) і (4а) з урахуванням (2) і (8) поперечні компоненти ( $E_\rho$ ,  $E_\varphi$ ,  $H_\rho$  і  $H_\varphi$ ) електромагнітного поля виражаються через аксіальні (подовжні)  $E_z$ - і  $H_z$ -компоненти таким чином:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\pi\sigma_{zz}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \frac{\sigma_{\rho\varphi}^2}{\sigma_{\rho\rho}^2} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] E_\rho = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{1}{\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{4\pi\sigma_{\rho\varphi}}{c^2\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \sigma_{zz} E_z + \\ & + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{4\pi\sigma_{\rho\varphi}}{c^2\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \rho} - \left( \frac{1}{\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \sigma_{zz} H_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\pi\sigma_{zz}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \frac{\sigma_{\rho\varphi}^2}{\sigma_{\rho\rho}^2} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] E_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{1}{\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{4\pi\sigma_{\rho\varphi}}{c^2\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \sigma_{zz} E_z + \\ & + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{4\pi\sigma_{\rho\varphi}}{c^2\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left( \frac{1}{\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \sigma_{zz} H_z, \\ & \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\pi\sigma_{zz}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \frac{\sigma_{\rho\varphi}^2}{\sigma_{\rho\rho}^2} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] H_\rho = \frac{4\pi}{c} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{4\pi\sigma_{zz}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\sigma_{\rho\varphi}}{\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \sigma_{zz} E_z + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{4\pi\sigma_{\rho\varphi}}{c^2\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{1}{\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \sigma_{zz} H_z, \\ & \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\pi\sigma_{zz}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \frac{\sigma_{\rho\varphi}^2}{\sigma_{\rho\rho}^2} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] H_\varphi = -\frac{4\pi}{c} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{4\pi\sigma_{zz}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\sigma_{\rho\varphi}}{\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \sigma_{zz} E_z - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{4\pi\sigma_{\rho\varphi}}{c^2\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \rho} - \left( \frac{1}{\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \sigma_{zz} H_z. \end{aligned}$$

У свою чергу, аксіальні компоненти поля визначаються розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{4\pi}{c} \frac{\sigma_{zz}\sigma_{\rho\varphi}}{\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \Delta_\perp E_z = \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\pi\sigma_{zz}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_{\rho\varphi}^2}{\sigma_{\rho\rho}^2} \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \left( \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\pi\sigma_{zz}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta_\perp \right] H_z, \\ \frac{\sigma_{\rho\varphi}}{\sigma_{\rho\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_\perp H_z = - \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\pi\sigma_{zz}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_{\rho\varphi}^2}{\sigma_{\rho\rho}^2} \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\pi\sigma_{zz}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta_\perp \right] E_z, \end{cases} \quad (13)$$

де

$$\Delta_\perp = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

– поперечна складова оператора Лапласа  $\Delta = \Delta_\perp + \partial^2/\partial z^2$ . З (13) випливає, що  $E_z$ - та  $H_z$ -компоненти є розв'язками ідентичних рівнянь

$$\begin{aligned} & \left\{ \Delta_\perp^2 + \left[ \left( 1 + \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{\rho\rho}} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{8\pi\sigma_{zz}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \Delta_\perp + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4\pi\sigma_{zz}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \frac{\sigma_{\rho\varphi}^2}{\sigma_{\rho\rho}^2} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right\} \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0, \quad (14a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \Delta^2 + \left( \frac{\sigma_{\rho\varphi}^2}{\sigma_{\rho\rho}^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{8\pi\sigma_{zz}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta + \right. \\ & \left. + \frac{16\pi^2\sigma_{zz}^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0. \quad (14b) \end{aligned}$$

Поза хвилеводу ( $\rho > \rho_0$ ) та електронного пучка ( $\rho \neq \rho_b$ , де  $\mathbf{j}_b(\mathbf{r}, t) = 0$ ) згідно з (3), (4b), (5) і (6), яке у разі  $\rho \neq \rho_b$  має вигляд  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ , збурення електромагнітного поля в довільній точці простору на довільний момент часу описуються хвильовими рівняннями

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}, \quad \Delta \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H},$$

розв'язки яких мають вигляд плоских монохроматичних хвиль. При цьому відповідно до (3) і (4b) поперечні  $E_\rho$ -,  $E_\varphi$ -,  $H_\rho$ - і  $H_\varphi$ -компоненти поля виражаються через  $E_z$ - і  $H_z$ -компоненти таким чином:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_\rho = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} E_z - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_z, \\ & \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \rho} H_z, \\ & \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) H_\rho = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} H_z + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z, \\ & \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) H_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_z - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \rho} E_z. \end{aligned}$$

У свою чергу,  $E_z$ - і  $H_z$ -компоненти поля визначаються розв'язками рівнянь

$$\left( \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0, \quad (15a)$$

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0. \quad (15b)$$

Зазначимо, що умови (10) виконуються у разі, коли

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) H_z = 0 H_z, \quad \left( \frac{v_0}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) E_z = 0 E_z.$$

Перша умова свідчить про резонансну взаємодію електронів пучка та полів власних хвиль плазмового хвилеводу у разі проявлення ефекту Вавилова–Черенкова. Друга умова практично не виконується через нехтування нелінійним ефектом впливу поля хвиль просторового заряду (ХПЗ) пучка на рух електронів.

## 6. Поля хвиль, що збуджуються в електродинамічній системі

Розв'язання наведених рівнянь (14) і (15) проведемо методом розділення змінних з поданням векторів напруженостей електромагнітного поля у вигляді набору просторово-часових гармонік:

$$\mathbf{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_n(\rho) \exp[i(q_z z + n\varphi - \omega t)] dq_z d\omega,$$

$$\mathbf{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_n(\rho) \exp[i(q_z z + n\varphi - \omega t)] dq_z d\omega,$$

де  $\mathbf{E}_n(\rho)$  і  $\mathbf{H}_n(\rho)$  – спектральні складові електричного та магнітного полів,  $q_z$  і  $n$  – поздовжнє (аксіальне) хвильове число і номер просторової гармоніки (збігається з азимутальним модовим індексом хвилі) відповідно.

Згідно з (14) аксіальні спектральні  $E_{zn}(\rho)$  і  $H_{zn}(\rho)$ -складові електромагнітного поля власних хвиль хвилеводу у разі  $\rho \leq \rho_0$  визначаються розв'язками рівнянь

$$\left\{ \Delta_{\perp n}^2 + \left[ i\omega \frac{8\pi\sigma_{zz}}{c^2} - \left( \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{\rho\rho}} + 1 \right) q_z^2 \right] \Delta_{\perp n} + \left( i\omega \frac{4\pi\sigma_{zz}}{c^2} - q_z^2 \right)^2 + \frac{\sigma_{\rho\varphi}^2}{\sigma_{\rho\rho}^2} q_z^4 \right\} \begin{Bmatrix} E_{zn}(\rho) \\ H_{zn}(\rho) \end{Bmatrix} = 0, \quad (16a)$$

$$\left[ \Delta_n^2 + \left( i\omega \frac{8\pi\sigma_{zz}}{c^2} - \frac{\sigma_{\rho\varphi}^2}{\sigma_{\rho\rho}^2} q_z^2 \right) \Delta_n - \omega^2 \frac{16\pi^2\sigma_{zz}^2}{c^4} \right] \begin{Bmatrix} E_{zn}(\rho) \\ H_{zn}(\rho) \end{Bmatrix} = 0, \quad (16b)$$

де

$$\Delta_{\perp n} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2}, \quad \Delta_n = \Delta_{\perp n} - q_z^2.$$

Рівняння (16a) та (16b) зводяться до вигляду

$$(\Delta_{\perp n} + \kappa_1^2)(\Delta_{\perp n} + \kappa_2^2) \begin{Bmatrix} E_{zn}(\rho) \\ H_{zn}(\rho) \end{Bmatrix} = 0, \quad (17)$$

$$(\Delta_n + q_1^2)(\Delta_n + q_2^2) \begin{Bmatrix} E_{zn}(\rho) \\ H_{zn}(\rho) \end{Bmatrix} = 0, \quad (18)$$

у яких  $\kappa_{1,2}^2$  та  $q_{1,2}^2$  – власні числа (значення) операторів  $\Delta_{\perp n}$  та  $\Delta_n$ , що визначаються розв'язками

характеристичних рівнянь

$$\kappa^4 - \kappa^2 \left[ i\omega \frac{8\pi\sigma_{zz}}{c^2} - \left( \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{\rho\rho}} + 1 \right) q_z^2 \right] + \left( i\omega \frac{4\pi\sigma_{zz}}{c^2} - q_z^2 \right)^2 + \frac{\sigma_{\rho\varphi}^2}{\sigma_{\rho\rho}^2} q_z^4 = 0, \quad (19a)$$

$$q^4 - q^2 \left( i\omega \frac{8\pi\sigma_{zz}}{c^2} - \frac{\sigma_{\rho\varphi}^2}{\sigma_{\rho\rho}^2} q_z^2 \right) - \omega^2 \frac{16\pi^2\sigma_{zz}^2}{c^4} = 0 \quad (19b)$$

відносно  $\kappa^2$  та  $q^2$  відповідно, оскільки

$$\Delta_{\perp n} \begin{Bmatrix} E_{zn}(\rho) \\ H_{zn}(\rho) \end{Bmatrix} = -\kappa^2 \begin{Bmatrix} E_{zn}(\rho) \\ H_{zn}(\rho) \end{Bmatrix}$$

та

$$\Delta_n \begin{Bmatrix} E_{zn}(\rho) \\ H_{zn}(\rho) \end{Bmatrix} = -q^2 \begin{Bmatrix} E_{zn}(\rho) \\ H_{zn}(\rho) \end{Bmatrix}.$$

Звідси маємо

$$\kappa_{1,2}^2 = \frac{1}{2} q_z^2 \frac{\sigma_{\rho\varphi}^2}{\sigma_{\rho\rho}^2} \left( 1 - \frac{8\pi\sigma_{zz}\sigma_{\rho\rho}^2}{q_z^2 c^2 \sigma_{\rho\varphi}^2} \mp \sqrt{1 - i \frac{16\pi\sigma_{zz}\sigma_{\rho\rho}^2}{q_z^2 c^2 \sigma_{\rho\varphi}^2}} \right) - q_z^2, \quad (20a)$$

$$q_{1,2}^2 = \kappa_{1,2}^2 + q_z^2. \quad (20b)$$

З метою фізичного осмислення природи власних хвиль замагніченого плазмового хвилеводу розглянемо окремі випадки, коли плазма є практично беззіштовхувальною ( $\nu \rightarrow 0$ ) і сильнозіштовхувальною з частотою зіткнень основних носіїв заряду істотно менше їх циклотронної частоти ( $\nu \rightarrow \infty$ ,  $\nu \ll |\omega_H|$ ). У першому випадку рівняння (19) спрощуються до вигляду

$$\kappa^2 q_z^2 - 16\pi^2 \sigma_{zz}^2 \sigma_{\rho\rho}^2 \omega^2 / \sigma_{\rho\varphi}^2 c^4 + q_z^4 = 0$$

і

$$q^2 q_z^2 - 16\pi^2 \sigma_{zz}^2 \sigma_{\rho\rho}^2 \omega^2 / \sigma_{\rho\varphi}^2 c^4 = 0,$$

а у другому –

$$\kappa^4 + \kappa^2 (2q_z^2 + q_z^2 \sigma_{\rho\varphi}^2 / \sigma_{\rho\rho}^2) + q_z^4 (1 + \sigma_{\rho\varphi}^2 / \sigma_{\rho\rho}^2) = 0$$

і

$$q_z^4 + q^2 q_z^2 \sigma_{\rho\varphi}^2 / \sigma_{\rho\rho}^2 = 0$$

відповідно. Отже, у разі  $\nu \rightarrow 0$  маємо  $\kappa^2 = q_0^2 - q_z^2$  і  $q = q_0$ , де

$$q_0 = 4\pi\sigma_{zz}\sigma_{\rho\rho}\omega / \sigma_{\rho\varphi} q_z c^2 = 4\pi e N_0 \omega / H_0 q_z c$$

– хвильове число геліконів [22]. У цьому випадку (8) набуває вигляду рівняння руху заряджених частинок з нульовою ефективною масою ( $m = 0$ ), які в системі без втрат породжують коливальні процеси магнітного поля, тобто збурення зовнішнього магнітного поля  $\mathbf{H}_0$ , що мають геліконне походження [23, 24, 38]. Внаслідок ідеальної провідності середовища хвилеводу є можливість протікання струму на його поверхні. При цьому замагнічені вільні електрони у хвилеводі рухаються прямолінійно лише вздовж твірних циліндра. Отже, поверхневий струм має лише одну складову вздовж поздовжньої координатної осі  $z$ . У цьому випадку із рівнянь (5) і (4) з урахуванням теорем Остроградського–Гаусса і Стокса випливає, що на поверхні циліндра  $\rho = \rho_0$  компоненти магнітного поля  $H_\rho$  і  $H_z$  є безперервними, а  $H_\varphi$ -компонента має розрив:  $H_\varphi(\rho_0 + 0) - H_\varphi(\rho_0 - 0) = 4\pi j_{sz} / c$ , що зумовлений поздовжнім поверхневим струмом із густиною  $j_{sz}$  [23]. У разі  $\nu \rightarrow \infty$  маємо  $\kappa_1^2 = q_z^2$  і  $\kappa_2^2 = \bar{q}_0^2 - q_z^2$ , де  $\bar{q}_0^2 = -q_z^2 \sigma_{\rho\varphi}^2 / \sigma_{\rho\rho}^2 = -q_z^2 \omega_H^2 / \nu^2$  – квадрат хвильового числа, яке характеризує збурений стан магнітного поля. Негативні значення  $\kappa_1^2$  і  $\kappa_2^2$  вказують на електростатичну природу поля.

Усередині хвилеводу ( $\rho \leq \rho_0$ ), з урахуванням умови скінченності величин  $E_{zn}(\rho)$  і  $H_{zn}(\rho)$  на осі циліндра  $\rho = 0$ , розв'язки (16)–(18) мають вигляд

$$E_{zn}(\rho) = A_{n1}^E Z_n(\kappa_1 \rho) + A_{n2}^E Z_n(\kappa_2 \rho),$$

$$H_{zn}(\rho) = A_{n1}^H Z_n(\kappa_1 \rho) + A_{n2}^H Z_n(\kappa_2 \rho),$$

де

$$Z_n(\kappa_{1,2} \rho) = \begin{cases} J_n(\kappa_{1,2} \rho), & \kappa_{1,2}^2 > 0 (\kappa_{1,2} \in \mathbb{C}), \\ I_n(\kappa_{1,2} \rho), & \kappa_{1,2}^2 < 0, \end{cases}$$

$J_n(x)$  – функція Бесселя  $n$ -го порядку першого роду,  $I_n(x)$  – однойменна модифікована функція (функція Інфельда),  $\kappa_{1,2}$  – поперечні (радіальні) хвильові числа (20),  $A_{n1, n2}^{E, H}$  – довільні сталі. Відповідно до (13) між сталими  $A_{n1}^E$  і  $A_{n1}^H$ , а також  $A_{n2}^E$  і  $A_{n2}^H$  існують зв'язки

$$A_{n1}^E = i\gamma_1 \frac{\omega}{c} A_{n1}^H, \quad A_{n2}^E = i\gamma_2 \frac{\omega}{c} A_{n2}^H,$$

в яких

$$\gamma_{1,2} = (1 \mp \sqrt{1 - 4iq_0 \sigma_{\rho\rho} / q_z \sigma_{\rho\varphi}}) / 2q_0.$$

**262**

При цьому поперечні хвильові числа (20) набувають вигляду

$$\kappa_{1,2} = q_0 (\bar{q}_0^2 \gamma_{1,2} + iq_z \sigma_{\rho\varphi} / \sigma_{\rho\rho}) - q_z^2, \quad q_{1,2}^2 = \kappa_{1,2} + q_z^2.$$

Поперечні спектральні складові фур'є-компонент електромагнітного поля визначаються через аксіальні складові та мають вигляд

$$\kappa_1^2 \kappa_2^2 E_{\rho n}(\rho) = \frac{1}{q_z} \frac{\omega}{c} \left[ \kappa_2^2 \left( b_1 \frac{\partial}{\partial \rho} - q_z \frac{n}{\rho} \right) A_{n1}^H Z_n(\kappa_1 \rho) + \kappa_1^2 \left( b_2 \frac{\partial}{\partial \rho} - q_z \frac{n}{\rho} \right) A_{n2}^H Z_n(\kappa_2 \rho) \right],$$

$$\kappa_1^2 \kappa_2^2 E_{\varphi n}(\rho) = \frac{i}{q_z} \frac{\omega}{c} \left[ \kappa_2^2 \left( b_1 \frac{n}{\rho} - q_z \frac{\partial}{\partial \rho} \right) A_{n1}^H Z_n(\kappa_1 \rho) + \kappa_1^2 \left( b_2 \frac{n}{\rho} - q_z \frac{\partial}{\partial \rho} \right) A_{n2}^H Z_n(\kappa_2 \rho) \right],$$

$$\kappa_1^2 \kappa_2^2 H_{\rho n}(\rho) = i \left[ \kappa_2^2 \left( q_z \frac{\partial}{\partial \rho} - a_1 \frac{n}{\rho} \right) A_{n1}^H Z_n(\kappa_1 \rho) + \kappa_1^2 \left( q_z \frac{\partial}{\partial \rho} - a_2 \frac{n}{\rho} \right) A_{n2}^H Z_n(\kappa_2 \rho) \right],$$

$$\kappa_1^2 \kappa_2^2 H_{\varphi n}(\rho) = - \left[ \kappa_2^2 \left( q_z \frac{n}{\rho} - a_1 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) A_{n1}^H Z_n(\kappa_1 \rho) + \kappa_1^2 \left( q_z \frac{n}{\rho} - a_2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) A_{n2}^H Z_n(\kappa_2 \rho) \right],$$

де

$$a_{1,2} = -iq_0 \gamma_{1,2} q_z \sigma_{\rho\varphi} / \sigma_{\rho\rho},$$

$$b_{1,2} = (\bar{q}_0^2 - q_z^2) \gamma_{1,2} + iq_z \sigma_{\rho\varphi} / \sigma_{\rho\rho}.$$

Відповідно до (15) аксіальні спектральні  $E_{zn}(\rho)$ - і  $H_{zn}(\rho)$ -складові електромагнітного поля власних хвиль хвилеводу у разі  $\rho > \rho_0$  і  $\rho \neq \rho_0$  задовольняють рівнянням

$$(\Delta_{\perp n} + \kappa_0^2) \begin{Bmatrix} E_{zn}(\rho) \\ H_{zn}(\rho) \end{Bmatrix} = 0, \quad (21a)$$

$$\left( \Delta_n + \frac{\omega}{c} \right) \begin{Bmatrix} E_{zn}(\rho) \\ H_{zn}(\rho) \end{Bmatrix} = 0, \quad (21b)$$

де  $\kappa_0^2 = \omega^2 / c^2 - q_z^2$ . Вони є рівняннями Бесселя, коли  $\kappa_0^2 > 0$ , або однойменними модифікованими рівняннями, коли  $\kappa_0^2 < 0$ . З урахуванням умови скінченності величин  $E_{zn}(\rho)$  і  $H_{zn}(\rho)$  у разі  $\rho \rightarrow \infty$ , розв'язки (21) поза циліндром мають вигляд

$$E_{zn}(\rho) =$$



$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} B_n^E H_n^{(1)}(\kappa_0 \rho) + C_n^E J_n(\kappa_0 \rho) \\ \text{if } \kappa_0^2 > 0: (\kappa_0^2 \in \mathbb{C}), \\ B_n^E K_n(|\kappa_0| \rho) + C_n^E I_n(|\kappa_0| \rho) \\ \text{if } \kappa_0^2 < 0, \end{array} \right. & \text{if } \rho_0 \leq \rho \leq \rho_b, \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} D_n^E H_n^{(1)}(\kappa_0 \rho) \\ \text{if } \kappa_0^2 > 0: (\kappa_0^2 \in \mathbb{C}), \\ D_n^E K_n(|\kappa_0| \rho) \\ \text{if } \kappa_0^2 < 0, \end{array} \right. & \text{if } \rho \geq \rho_b, \end{cases} \\
 H_{zn}(\rho) = & \\
 &= \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} B_n^H H_n^{(1)}(\kappa_0 \rho) + C_n^H J_n(\kappa_0 \rho) \\ \text{if } \kappa_0^2 > 0: (\kappa_0^2 \in \mathbb{C}), \\ B_n^H K_n(|\kappa_0| \rho) + C_n^H I_n(|\kappa_0| \rho) \\ \text{if } \kappa_0^2 < 0, \end{array} \right. & \text{if } \rho_0 \leq \rho \leq \rho_b, \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} D_n^H H_n^{(1)}(\kappa_0 \rho) \\ \text{if } \kappa_0^2 > 0: (\kappa_0^2 \in \mathbb{C}), \\ D_n^H K_n(|\kappa_0| \rho) \\ \text{if } \kappa_0^2 < 0, \end{array} \right. & \text{if } \rho \geq \rho_b, \end{cases}
 \end{aligned}$$

де  $H_n^{(1)}(x)$  і  $K_n(x)$  – функції Ганкеля першого роду і Макдональда відповідно,  $B_n^{E,H}$ ,  $C_n^{E,H}$  і  $D_n^{E,H}$  – довільні сталі.

Інші спектральні складові фур'є-компонент електромагнітного поля власних хвиль хвилеводу поза межами електронного пучка ( $\rho > \rho_0$  і  $\rho \neq \rho_b$ ) мають вигляд

$$\begin{aligned}
 \kappa_0^2 E_{\rho n}(\rho) &= iq_z \frac{\partial}{\partial \rho} E_{zn}(\rho) - \frac{\omega n}{c \rho} H_{zn}(\rho), \\
 \kappa_0^2 E_{\varphi n}(\rho) &= -q_z \frac{n}{\rho} E_{zn}(\rho) - i \frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial \rho} H_{zn}(\rho), \\
 \kappa_0^2 H_{\rho n}(\rho) &= iq_z \frac{\partial}{\partial \rho} H_{zn}(\rho) + \frac{\omega n}{c \rho} E_{zn}(\rho), \\
 \kappa_0^2 H_{\varphi n}(\rho) &= -q_z \frac{n}{\rho} H_{zn}(\rho) + i \frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial \rho} E_{zn}(\rho).
 \end{aligned}$$

У разі ефекту Вавілова–Черенкова виконується умова  $(q_z v_0 - \omega) H_{zn}(\rho) = 0$ , звідки для ХПЗ  $\omega = q_z v_0$ .

Таким чином, спектральні складові власних хвиль хвилеводу складаються з суперпозиції двох парціальних хвиль, які відрізняються амплітудами та хвильовими числами ( $\kappa_1$  і  $\kappa_2$ ). Відповідно

до [5, 13, 14, 43], у випадку  $\kappa_{1,2}^2 > 0$  (або  $\kappa_{1,2}^2 \in \mathbb{C}$ ) і  $\kappa_0^2 > 0$  (або  $\kappa_0^2 \in \mathbb{C}$ ) електромагнітні поля власних хвиль хвилеводу відповідають об'ємним хвилям, а у разі  $\kappa_0^2 < 0$  – об'ємно-поверхневим хвилям, випромінювання яких у вільний простір має статичну природу. При цьому власні хвилі є гібридними, тип ( $E$  або  $H$ ) яких визначається за домінуючою аксіальною компонентою електромагнітного поля [13, 43, 48].

У нашому випадку  $\kappa_0^2 < 0$ , оскільки для ХПЗ, які створюються електронами у разі проявлення ефекту Вавілова–Черенкова, маємо  $q_z = \omega / v_0$  і  $\omega^2 / c^2 \ll q_z^2$ , оскільки  $v_0 \ll c$ . Отже, поза хвилеводом ( $\rho > \rho_0$ ) аксіальні спектральні складові електромагнітного поля  $E_{zn}(\rho)$  та  $H_{zn}(\rho)$  мають вигляд

$$\begin{aligned}
 E_{zn}(\rho) &= \begin{cases} B_n^E K_n(|\kappa_0| \rho) + C_n^E I_n(|\kappa_0| \rho), & \rho_0 \leq \rho \leq \rho_b, \\ D_n^E K_n(|\kappa_0| \rho), & \rho \geq \rho_b, \end{cases} \\
 H_{zn}(\rho) &= \begin{cases} B_n^H K_n(|\kappa_0| \rho) + C_n^H I_n(|\kappa_0| \rho), & \rho_0 \leq \rho \leq \rho_b, \\ D_n^H K_n(|\kappa_0| \rho), & \rho \geq \rho_b. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Внаслідок резонансної вавілово-черенковської взаємодії ХПЗ з полями власних хвиль плазмового хвилеводу маємо  $q_0 = 4\pi e N_0 v_0 / H_0 c$  і  $\bar{q}_0^2 = -\omega_H^2 \omega^2 / \nu^2 v_0^2$ . Отже,  $q_0$  є дійсною величиною і не залежить від частоти  $\omega$ , а визначається концентрацією електронів провідності плазми  $N_0$  та зовнішніми факторами – індукцією зовнішнього магнітного поля  $H_0$  та швидкістю електронів  $v_0$  пучка, що обдуває хвилевід. Збурення силових ліній магнітного поля  $H_0$  характеризуються хвильовим числом  $\bar{q}_0$ , яке залежить від частоти  $\omega$  ХПЗ. Величина  $\bar{q}_0$  визначається індукцією  $H_0$  та внутрішніми факторами плазми – частотою зіткнень  $\nu$  та ефективною масою  $m$  електронів, і зовнішнім фактором – швидкістю  $v_0$ .

Таким чином, внаслідок обдування замагніченим трубчастим електронним пучком плазмового хвилеводу в ньому збуджуються гібридні об'ємно-поверхневі (з  $\kappa_{1,2}^2 > 0$ ) або поверхневі (з  $\kappa_{1,2}^2 < 0$ ) хвилі геліконного походження. У разі різних знаків квадратів поперечних хвильових чисел  $\kappa_{1,2}^2$ , як і у разі їх комплексних величин, збуджуються власні гібридні об'ємно-поверхневі хвилі хвилеводу. При цьому збудження власних хвиль хвилеводу здійснюється ХПЗ пучка з узгодженням  $E_{zn}(\rho)$ -компонент поля. Відповідно до [49–61] в основі механізму стабілізації зростання їх амплітуд лежить

ефект синхронного захоплення електронів пучка полями зв'язаних хвиль, одна з яких – ХПЗ в електронному потоці, а інша – електромагнітна хвиля в хвилеводі, який виконує роль сповільнювальної структури.

### 7. Дисперсійні рівняння

Зазначимо, що умови безперервностей тангенціальних складових напруженості електричного поля  $\mathbf{E}_\tau$  на поверхнях циліндра  $\rho = \rho_0$  та електронного пучка  $\rho = \rho_b$ , які зводяться до

$$E_{zn}(\rho_0 - 0) = E_{zn}(\rho_0 + 0), \quad E_{\varphi n}(\rho_0 - 0) = E_{\varphi n}(\rho_0 + 0)$$

і

$$E_{zn}(\rho_b - 0) = E_{zn}(\rho_b + 0), \quad E_{\varphi n}(\rho_b - 0) = E_{\varphi n}(\rho_b + 0)$$

є еквівалентними умовам безперервностей нормальних складових індукції магнітного поля, тобто

$$H_{\rho n}(\rho_0 - 0) = H_{\rho n}(\rho_0 + 0) \quad \text{і} \quad H_{\rho n}(\rho_b - 0) = H_{\rho n}(\rho_b + 0)$$

відповідно. У свою чергу, умова (12) є рівносильною умові безперервності тангенціальної складової напруженості магнітного поля  $\mathbf{H}_\tau$ , яка еквівалентна

$$H_{zn}(\rho_0 - 0) = H_{zn}(\rho_0 + 0) \quad \text{і} \quad H_{\varphi n}(\rho_0 - 0) = H_{\varphi n}(\rho_0 + 0).$$

На поверхні пучка умова розриву  $\mathbf{H}_\tau$  зводиться до вигляду

$$H_{zn}(\rho_b - 0) = H_{zn}(\rho_b + 0)$$

і

$$H_{\varphi n}(\rho_b + 0) - H_{\varphi n}(\rho_b - 0) = \frac{4\pi}{c} \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \int_{\rho_b - \Delta\rho}^{\rho_b + \Delta\rho} \sigma_b E_{zn}(\rho) d\rho,$$

де

$$\sigma_b = \frac{ie^2 \omega N_{b0}(\rho)}{m_0 (q_z v_0 - \omega)^2},$$

і є рівносильною умові розриву нормальної складової індукції електричного поля, яка набуває вигляду

$$E_{\varphi n}(\rho_b + 0) - E_{\varphi n}(\rho_b - 0) = \frac{4\pi e}{\rho_b} \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \int_{\rho_b - \Delta\rho}^{\rho_b + \Delta\rho} N(\mathbf{r}, t) \rho d\rho,$$

де

$$N(\mathbf{r}, t) = \frac{ie q_z N_{b0}(\rho) E_{zn}(\rho)}{m_0 (q_z v_0 - \omega)^2}.$$

Набір лінійно-незалежних граничних умов на поверхнях циліндра  $\rho = \rho_0$  та електронного пучка  $\rho = \rho_b$ , що складається з умов для тангенціальних компонентів електромагнітного поля, формує квадратну систему однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь. Умова існування її нетривіальних розв'язків приводить до дисперсійного рівняння електродинамічної системи із зв'язаними хвилями:

$$D_n(q_z, \omega) \left[ (q_z v_0 - \omega)^2 + \Gamma_n(q_z, \omega) \omega_b^2 \right] = \alpha_n(q_z, \omega) \omega_b^2, \quad (22)$$

де

$$D_n(q_z, \omega) = \Delta_1^H \Delta_2^E - \Delta_2^H \Delta_1^E,$$

$$\Delta_{1,2}^H = \frac{q_z}{\kappa_{1,2}^2} \frac{\partial}{\partial \rho} Z_n(\kappa_{1,2} \rho_0) - \frac{q_z}{\kappa_0^2} \frac{\partial}{\partial \rho} K_n(|\kappa_0| \rho_0) - \frac{n}{\rho_0} \left( \frac{b_{1,2}}{\kappa_{1,2}^2} + \frac{q_z^2 \gamma_{1,2}}{\kappa_0^2} \right),$$

$$\Delta_{1,2}^E = \frac{a_{1,2}}{\kappa_{1,2}^2} \frac{\partial}{\partial \rho} Z_n(\kappa_{1,2} \rho_0) + \frac{\gamma_{1,2} \omega^2}{\kappa_0^2 c^2} \frac{\partial}{\partial \rho} K_n(|\kappa_0| \rho_0) - \frac{q_z n}{\rho_0} \left( \frac{1}{\kappa_{1,2}^2} - \frac{1}{\kappa_0^2} \right),$$

$\omega_b^2 = 4\pi e^2 N_{b0} / m_0$  – квадрат плазмової частоти електронів пучка. Коефіцієнти депресії сил просторового заряду  $\Gamma_n(q_z, \omega)$  та зв'язку пучка із синхронною власною модою плазмово-твердотільного циліндра  $\alpha_n(q_z, \omega)$  [2, 62] мають вигляд

$$\Gamma_n(q_z, \omega) = \kappa_0^2 a \rho_b K_n(|\kappa_0| \rho_b) I_n(|\kappa_0| \rho_b) \times \left[ 1 - \frac{K_n(|\kappa_0| \rho_b) I_n(|\kappa_0| \rho_0)}{K_n(|\kappa_0| \rho_0) I_n(|\kappa_0| \rho_b)} \right],$$

$$\alpha_n(q_z, \omega) = \frac{a \rho_b \omega^2}{\rho_0 c^2} \frac{K_n^2(|\kappa_0| \rho_b)}{K_n^2(|\kappa_0| \rho_0)} (\Delta_1^H \gamma_2 - \Delta_2^H \gamma_1).$$

Коефіцієнт  $\Gamma_n(q_z, \omega)$  характеризує зміну поля просторового заряду, з одного боку, у разі переходу від нескінченно тонкого пучка до пучка скінченно перерізу. З іншого боку, у разі зміни прицільної відстані від нульового значення до значення  $\rho_b - \rho_0$ . Коефіцієнт  $\alpha_n(q_z, \omega)$  має максимальне значення, коли пучок транспортується вздовж твірних бічної поверхні циліндра, тобто коли  $\rho_b = \rho_0$ , і зменшується зі збільшенням прицільної відстані.

Рівняння (22) представлено у вигляді характеристичного рівняння лампи з біжучою хвилею О-типу [2]. У нашому випадку воно визначає резонансну взаємодію ХПЗ пучка з власними хвилями циліндра у разі ефекту Вавілова–Черенкова.

Коли в електродинамічній системі електронний пучок відсутній ( $\omega_b = 0$ ,  $v_0 = 0$ ), рівняння (22) зводиться до дисперсійного рівняння магнітоплазмового циліндра у квазістаціонарному наближенні [25]:

$$D_n(q_z, \omega) = \Delta_1^H \Delta_2^E - \Delta_2^H \Delta_1^E = 0. \quad (23)$$

Залежно від значень поперечних хвильових чисел  $\kappa_{1,2}$  його розв'язки характеризують власні об'ємно-поверхневі (у разі  $\kappa_{1,2}^2 \in \mathbb{C}$  чи  $\kappa_{1,2}^2 > 0$ ) і поверхневі (у разі  $\kappa_{1,2}^2 < 0$ ) хвилі циліндра.

У випадку, коли  $\rho_b \gg \rho_0$  (в крайньому випадку  $\rho_b \rightarrow \infty$ ) у разі постійного радіуса хвильоводу  $\rho_0$ ,  $\alpha_n(q_z, \omega) \rightarrow 0$ , і електродинамічна система має дві незалежні підсистеми – плазмово-твердотільний циліндр і невзаємодіючий з ним потік електронів. Дисперсійне рівняння (22) розпадається на два рівняння:  $D_n(q_z, \omega) = 0$  і

$$(q_z v_0 - \omega)^2 + \Gamma_n(q_z, \omega) \omega_b^2 = 0. \quad (24)$$

Рівняння (24) є дисперсійним рівнянням трубчастого електронного пучка зі скінченням поперечним розміром його товщини  $a$ . Коефіцієнт  $\Gamma_n(q_z, \omega)$  характеризує зміну поля просторового заряду у разі переходу від нескінченно тонкого трубчастого пучка, у якого частоти ХПЗ  $\omega = q_z v_0$ , до пучка скінченого перерізу, у якого частоти ХПЗ визначаються розв'язками (24), за наявності всередині нього слабовпливаючої циліндричної неоднорідності з радіусом  $\rho_0 \ll \rho_b$ .

В електростатичному наближенні (що є рівносильним випадку, коли  $c \rightarrow \infty$ ) маємо

$$\Gamma_n(q_z, \omega) = -\Gamma_n(q_z) = q_z^2 a \rho_b K_n(|\kappa_0| \rho_b) I_n(|\kappa_0| \rho_b) \times \\ \times \left[ 1 - \frac{K_n(|\kappa_0| \rho_b) I_n(|\kappa_0| \rho_0)}{K_n(|\kappa_0| \rho_0) I_n(|\kappa_0| \rho_b)} \right],$$

який не залежить від частоти. Рівняння (24) набуває вигляду, подібного до [62] –

$$(q_z v_0 - \omega)^2 - \Gamma_n(q_z) \omega_b^2 = 0,$$

а його розв'язки визначають частоти повільної ( $\omega_-$ ) та швидкої ( $\omega_+$ ) ХПЗ пучка:

$$\omega_{\mp} = q_z v_0 \mp \omega_b \sqrt{\Gamma_n(q_z)}.$$

Фазові швидкості цих хвиль  $\omega_{\mp}/q_z$  відповідно менше і більше швидкості  $v_0$ .

Розв'язки дисперсійного рівняння (23) визначають дисперсійні залежності  $\omega_{ns}(q_z)$  власних хвиль циліндричного плазмово-твердотільного хвильоводу, який розташовано в сильному постійному співвісному магнітному полі. Модовий індекс  $s = 1, 2, 3, \dots$  є результатом багатозначності розв'язків трансцендентного рівняння (23) та відповідає кількості варіацій поля вздовж радіальної координати  $\rho$ . Взаємодія пучка з циліндром приводить до зміни частот  $\omega_{ns}$  власних хвиль хвильоводу та відповідних їм хвильових чисел  $q_{zns}$  зі зміщеннями  $\delta\omega$  та  $\delta q_z$  відповідно. Оскільки  $\omega_b \ll \omega_{ns}$ , то величини зміщень  $|\delta\omega| \ll \omega_{ns}$ , що приводить до “розгойдування” власних хвиль циліндра з обміном енергією між ними та ХПЗ. У цьому випадку відповідно до варіаційного обчислення рівняння (22) зводиться до вигляду

$$(q_{zns} v_0 - \omega_{ns} + v_0 \delta q_z - \delta\omega)^2 + \left[ \Gamma_n(q_{zns}, \omega_{ns}) + \delta q_z \Gamma'_{nq_z}(q_{zns}, \omega_{ns}) + \delta\omega \Gamma'_{n\omega}(q_{zns}, \omega_{ns}) - \frac{\delta q_z \alpha'_{nq_z}(q_{zns}, \omega_{ns}) + \delta\omega \alpha'_{n\omega}(q_{zns}, \omega_{ns})}{\delta q_z D'_{nq_z}(q_{zns}, \omega_{ns}) + \delta\omega D'_{n\omega}(q_{zns}, \omega_{ns})} \right] \omega_b^2 = 0,$$

де  $D'_{n\omega}(q_{zns}, \omega_{ns})$ ,  $\Gamma'_{n\omega}(q_{zns}, \omega_{ns})$ ,  $\alpha'_{n\omega}(q_{zns}, \omega_{ns})$  і  $D'_{nq_z}(q_{zns}, \omega_{ns})$ ,  $\Gamma'_{nq_z}(q_{zns}, \omega_{ns})$ ,  $\alpha'_{nq_z}(q_{zns}, \omega_{ns})$  – похідні від відповідних функцій  $D_n(q_z, \omega)$ ,  $\Gamma_n(q_z, \omega)$  і  $\alpha_n(q_z, \omega)$  за частотою  $\omega$  і хвильовим числом  $q_z$  відповідно, що обчислені в резонансній точці  $(q_{zns}, \omega_{ns})$  (точці перетину прямої  $\omega = q_z v_0$  і кривої  $D_n(q_z, \omega) = 0$ , що відповідає індексу  $s$ , на графіку дисперсійних залежностей ХПЗ і власних хвиль циліндра).

У разі ефекту Вавілова–Черенкова, коли швидкість електронів  $v_0$  задовольняє умову  $q_{zns} v_0 = \omega_{ns}$ , і транспортуванні трубчастого пучка вздовж поверхні циліндра, коли  $\rho_b = \rho_0$  і, отже,  $\Gamma_n(q_{zns}, \omega_{ns}) = 0$ ,  $\Gamma'_{nq_z}(q_{zns}, \omega_{ns}) = 0$  і  $\Gamma'_{n\omega}(q_{zns}, \omega_{ns}) = 0$ , отримуємо

$$(v_0 \delta q_z - \delta\omega)^2 = \frac{\delta q_z \alpha'_{nq_z}(q_{zns}, \omega_{ns}) + \delta\omega \alpha'_{n\omega}(q_{zns}, \omega_{ns})}{\delta q_z D'_{nq_z}(q_{zns}, \omega_{ns}) + \delta\omega D'_{n\omega}(q_{zns}, \omega_{ns})} \omega_b^2 = 0.$$

Дане рівняння має два комплексно-спряжені корені  $\delta\omega_{1,2}$ , коли  $\delta q_z = \text{Const}$ . Один із коренів має позитивну уявну частину, що приводить до наростання амплітуди хвилі з часом. Корінь з негативною уявною частиною відповідає загасаючій з часом хвилі. Частота цих хвиль  $\in \omega_{ns} + \text{Re } \delta\omega$ . Коли  $\delta q_z = 0$ , інкремент нестійкості

$$\text{Im } \delta\omega = \omega_b \text{Im} [\alpha'_{n\omega}(q_{zns}, \omega_{ns}) / D'_{n\omega}(q_{zns}, \omega_{ns})]$$

є пропорційний  $\sqrt{N_{b0}}$ . У разі  $\text{Re } \delta\omega < 0$  хвилі, що збуджуються, є повільними (низькочастотними), оскільки їх фазові швидкості менше швидкості електронів пучка, а у разі  $\text{Re } \delta\omega > 0$  – швидкими (високочастотними). У випадку гауссового розподілу частинок за енергіями, що відповідає реальним пучкам, кількість частинок, які витрачають свою енергію на збудження повільних хвиль, перевищує кількість частинок, які віддають енергію швидким хвилям у хвилеводі. В електродинамічній системі реалізується монотронний механізм генерації повільних електромагнітних хвиль, коли заряджені частинки пучка групуються в такій фазі електромагнітного поля, яке збуджується ними, що в середньому віддають енергію власним хвилям циліндра.

Додатково звернемо увагу на те, що розв'язки (23) для мод з ідентичними розподілами полів, але різними за знаком азимутального індексу, не збігаються. Крім того, їх розв'язки у разі різних напрямків зовнішнього магнітного поля, які відрізняються по фазі на  $\pi$ , також не збігаються. Це свідчить про те, що власні хвилі магнітоплазмового циліндра, які поширюються у протилежних азимутальних напрямках, мають різні фазові швидкості ( $\omega_{ns}/q_{zns}$ ). У цьому проявляється принцип не взаємності поширення власних хвиль плазмового циліндра, який розміщено у сильному співвісному магнітному полі. Цей ефект не взаємності приводить до зняття частотного виродження за азимутальним індексом. Невзаємність власних хвиль, що пов'язана з напрямком  $\mathbf{H}_0$ , обґрунтована протилежністю напрямків обертання електронів провідності твердотільної плазми у зовнішньому магнітному полі.

Також зазначимо, що рівняння (22)–(24) справедливі для електродинамічних систем, що містять циліндричний магнітоплазмовий твердотільний резонатор, в якому реалізуються квазі-

стаціонарні умови. У разі обмеження хвилеводу в поздовжньому напрямку ідеально провідними торцевими поверхнями  $z = 0$  і  $z = L$  поздовжні хвильові числа власних мод мають вигляд  $q_z \equiv q_{zns} = \pi l/L$ , де  $L$  – поздовжній розмір резонатора,  $l \in \mathbb{N}_0$  – аксіальний (поздовжній) модовий індекс, що відповідає кількості варіацій поля (напівдовжин хвиль) вздовж аксіальної координати  $z$ . При цьому розв'язки рівнянь (23) визначають власні частоти резонатора  $\omega_{nsl}$ , які відповідають частотам власних мод із хвильовими числами  $q_{zns}$ . Очевидно, що у разі ефекту Вавилова–Черенкова в електродинамічній системі однорідний розподіл електромагнітного поля в резонаторі вздовж  $z$  є неможливим. Отже, в нашому випадку аксіальний індекс  $l \in \mathbb{N}$ . З умови синхронізму випливає, що  $\omega_{nsl} = \pi l v_0/L$ , причому конкретному індексу  $l$  відповідає лише одна пара значень  $ns$ . Максимальна ефективність монотронного механізму збудження власної  $nsl$ -ї моди резонатора здійснюється, коли його безрозмірна довжина

$$\theta_{nsl} = \omega_{nsl}L/v_0 + \pi/2 = \pi(l + 1/2).$$

У разі хвилеводу скінченної довжини  $L$  (без провідних торцевих стінок) поздовжні хвильові числа власних мод резонатора мають вигляд  $q_z \equiv q_{zns} = \pi\delta/L$ , де аксіальний модовий індекс  $\delta \in \mathbb{R}$ . Монотронний механізм збудження власної  $ns\delta$ -ї моди резонатора має максимальну ефективність, коли

$$\theta_{ns\delta} = \omega_{ns\delta}L/v_0 \approx 7,72,$$

що відповідає першій зоні генерації:  $2\pi < \theta_{ns\delta} < 9$  [63, 64].

## 8. Висновки

У роботі наведено теорію взаємодії нерелятивістського радіально нескінченно тонкого трубчатого потоку замагнічених електронів та плазмовотвердотільного циліндра, що обдувається ним. Дія зовнішнього поздовжнього магнітного поля приводить до організованого руху заряджених частинок (електронів) плазми вздовж силових ліній. Флуктуючі періодичні процеси в потоці електронів провідності плазми збуджують силові лінії магнітного поля внаслідок наявності змінного електричного струму. Беззіштовхувальний плазмовий циліндр підтримує поширення геліконів. Їх поширення супроводжується поверхневим струмом, який

тече вздовж твірних циліндра. Зіткнення заряджених частинок руйнують поверхневий струм. Внаслідок великої провідності плазми у хвилеводі реалізуються умови формування квазістаціонарних електромагнітних полів власних хвиль. Виявлено, що хвилі хвилеводу формуються суперпозицією парціальних гібридних хвиль геліконного походження. Встановлено, що в циліндрі збуджуються гібридні об'ємно-поверхневі електромагнітні хвилі, у яких квадрати поперечних хвильових чисел  $\kappa_{1,2}^2 > 0$ , або поверхневі хвилі, у яких  $\kappa_{1,2}^2 < 0$ , геліконного походження. У разі різних знаків квадратів поперечних хвильових чисел  $\kappa_{1,2}^2$ , як і у разі їх комплексних величин, збуджуються власні гібридні об'ємно-поверхневі хвилі хвилеводу. Відзначено ефект невзаємності поширення власних хвиль хвилеводу з ідентичними структурами розподілу полів, але які відрізняються напрямом поширення за азимутальною координатою. Ефект невзаємності власних хвиль хвилеводу має місце і у разі різних напрямків зовнішнього магнітного поля, що відрізняються за фазою на  $\pi$ . Збудження власних хвиль хвилеводу здійснюється полем просторового заряду пучка з узгодженням поздовжніх компонентів електричного поля. Вивчено нестійкість зв'язаних хвиль електродинамічної системи – електронний трубчастий пучок–магнітоплазмовий циліндр, яку розташовано в сильному поздовжньому магнітному полі. Показано, що нестійкість зумовлена ефектом Вавілова–Черенкова. У разі гранично малих прицільних відстаней пучка інкремент нестійкості пропорційний  $\sqrt{N_{b0}}$ . Основним механізмом генерації повільних (низькочастотних) електромагнітних хвиль у плазмовому твердотільному хвилеводі або резонаторі є монотронний механізм.

1. R. Kompfner. *The Invention of the Traveling-Wave Tube* (San Francisco Press, 1964).
2. Л.А. Вайнштейн, В.А. Солнцев. *Лекции по сверхвысокочастотной электронике* (Сов. радио, 1973).
3. Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов. *Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков* (Физматлит, 2003), Т. 1.
4. P.T. Chupikov, R.J. Faehl, I.N. Onishchenko, Yu.V. Prokopenko, S.S. Pushkarev. Vircator efficiency enhancement at plasma assistance. *IEEE Trans. on Plasma Sci.* **34**, 14 (2006).
5. М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, П.С. Стрелков. *Плазменная релятивистская СВЧ-электроника* (Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002).
6. А.В. Дормидонтов, А.Я. Кириченко, Ю.Ф. Лонин, А.Г. Пономарев, Ю.В. Прокопенко, Г.В. Сотников, В.Т. Уваров, Ю.Ф. Филиппов. Автоколебательная система на основе диэлектрического резонатора с модами “шепчущей галереи”. *Письма в ЖТФ* **38**, 65 (2012).
7. А.Я. Кириченко, Ю.Ф. Лонин, В.Г. Папкович, А.Г. Пономарев, Ю.В. Прокопенко, В.Т. Уваров, Ю.Ф. Филиппов. Микроволновый генератор с резонатором “шепчущей галереи”. *Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Яд.-физ. иссл.* **53** (2), 135 (2010).
8. В.А. Августинович, С.Н. Артеменко, А.И. Мащенко, А.С. Шлапаковский, Ю.Г. Юшков. Демонстрация усиления в диэлектрическом черенковском лазере со стержневой замедляющей системой. *Письма в ЖТФ* **36**, 103 (2010).
9. А.И. Ахиезер, И.А. Ахиезер, Р.В. Половин, А.Г. Ситенко, К.Н. Степанов. *Электродинамика плазмы* (Наука, 1974).
10. Ю.О. Аверков, Ю.В. Прокопенко, В.М. Яковенко. Неустойчивость трубчатого электронного пучка при взаимодействии с плазмоподобной средой. *Радиофиз. электрон.* **7** (21), 28 (2016).
11. P.T. Chupikov, N.P. Dikij, D.V. Medvedev, I.N. Onishchenko, Yu.V. Prokopenko, S.S. Pushkarev. Acceleration of ions a high-current relativistic electron beam at external injection of plasma. *Ukr. J. Phys.* **53**, 640 (2008).
12. Д.В. Медведев, Н.И. Онищенко, Б.Д. Панасенко, Ю.В. Прокопенко, С.С. Пушкарёв. Ускорение ионов плазмы, инжектированной в закрытый релятивистский электронный пучок при его пространственно-временной модуляции. *Письма в ЖТФ* **34**, 41 (2008).
13. Yu.O. Averkov, Yu.V. Prokopenko, V.M. Yakovenko. Interaction between a tubular beam of charged particles and an anisotropic dispersive solid-state cylinder. *Probl. At. Sci. Technol. Ser.: Plasma Electron. New Methods Acceleration* **4** (116), 3 (2018).
14. Yu.O. Averkov, Yu.V. Prokopenko, V.M. Yakovenko. Interaction between a tubular beam of charged particles and a dispersive metamaterial of cylindrical configuration. *Phys. Rev. E* **96**, 013205 (2017).
15. О.В. Константинов, В.И. Перель. Возможность прохождения электромагнитных волн через металлы в сильном магнитном поле. *ЖЭТФ* **38**, 161 (1960).
16. P. Aigrain. “Helicons” dans les semiconducteurs. *Proc. Int. Conf. on Semiconduction Phys.* 224 (Prague, 1960).
17. R. Bowers, C. Legendy, and F. Rose. Oscillatory galvanomagnetic effect in metallic sodium. *Phys. Rev. Lett.* **7**, 339 (Sep. 1961).
18. Н.Н. Белецкий, А.П. Тетервов, В.М. Яковенко. Непотенциальные поверхностные волны в магнитоактивной плазме полупроводника. *ФТП* **6**, 2129 (1972).
19. R.W. Boswell, F.F. Chen. Helicons – the early years. *IEEE Trans. Plasma Sci.* **25**, 229 (1997).
20. F.F. Chen, R.W. Boswell. Helicons – the past decade. *IEEE Trans. Plasma Sci.* **25**, 1245 (1997).

21. D. Arnush, F.F. Chen. Generalized theory of helicon waves. II. Excitation and absorption. *Phys. Plasmas* **5**, 1239 (1998).
22. Н.Н. Белецкий, В.М. Светличный, Д.Д. Халамейда, В.М. Яковенко. *Электромагнитные явления СВЧ диапазона в неоднородных полупроводниковых структурах* (Наукова думка, 1991).
23. Yu.O. Averkov, Yu.V. Prokopenko, V.M. Yakovenko. Helicons in solid-state plasma of cylindrical configuration. *2020 IEEE Ukrainian Microwave Week* (Kharkiv, 21–25 Sept. 2020).
24. Yu.O. Averkov, Yu.V. Prokopenko, V.M. Yakovenko. Helicons in plasma solid-state waveguide of cylindrical configuration. *Probl. At. Sci. Technol. Ser.: Plasma Electron. New Methods Acceleration* **4** (122), 19 (2019).
25. Yu.O. Averkov, Yu.V. Prokopenko, V.M. Yakovenko. Waves of a Magnetoplasma solid-state cylinder under quasi-stationary conditions. *IEEE Trans. Plasma Sci.* **49**, 3078 (2021).
26. Т.М. Заборонкова, А.В. Кудрин, М.Ю. Лях, Л.Л. Попова. Несимметричные свистовые волны, направляемые цилиндрическими дактами с повышенной плотностью плазмы. *Изв. вузов. Радиофиз.* **45**, 835 (2002).
27. Т.М. Заборонкова, А.В. Кудрин, М.Ю. Лях. Возбуждение несимметричных волн заданными источниками в магнитоактивной плазме при наличии цилиндрического плазменного канала. *Изв. вузов. Радиофиз.* **46**, 452 (2003).
28. В.А. Еськин, Т.М. Заборонкова, А.В. Кудрин. Волны свистового диапазона, направляемые дактами с повышенной плотностью в столкновительной магнитоактивной плазме. *Изв. вузов. Радиофиз.* **51**, 31 (2008).
29. П.В. Бахарев, Т.М. Заборонкова, А.В. Кудрин, К. Краффт. Волны свистового диапазона, направляемые дактами с пониженной плотностью в магнитоактивной плазме. *Физика плазмы* **36**, 979 (2010).
30. P. Zhu, R.W. Boswell. Ar II laser generated by landau damping of whistler waves at the lower hybrid frequency. *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2805 (1989).
31. P. Zhu, R.W. Boswell. A new argon-ion laser based on an electrodeless plasma. *J. Appl. Phys.* **68**, 1981 (1990).
32. А.С. Белов, Г.А. Марков. Вынужденное ионизационное рассеяние волнового пучка, формирующего разрядный канал в пробочной магнитной ловушке. *Физика плазмы* **34**, 252 (2008).
33. V.F. Virko, Yu.V. Virko, V.M. Slobodyan, K.P. Shamrai. The effect of magnetic configuration on ion acceleration from a compact helicon source with permanent magnets. *Plasma Sources Sci. Technol.* **19**, 015004 (2010).
34. C. Charles, G. Giroult-Matlakowski, R.W. Boswell, A. Goulet, G. Turban, C. Cardinaud. Characterization of silicon dioxide films deposited at low pressure and temperature in a helicon diffusion reactor. *J. Vac. Sci. Technol. A* **11**, 2954 (1993).
35. Р.Н. Кауфман, Н.А. Рябова. Распространение свистовых волн в цилиндрическом плазменном волноводе, граничащем с вакуумом. *Физика плазмы* **6**, 1027 (1980).
36. Н.Ф. Воробьев, А.А. Рухадзе. О возбуждении геликона в плазменном цилиндре поверхностным источником тока. *Физика плазмы* **20**, 1065 (1994).
37. M. Kramer, Yu.M. Aliev, A.B. Altukhov, A.D. Gurchenko, E.Z. Gusakov, K. Niemi. Anomalous helicon wave absorption and parametric excitation of electrostatic fluctuations in a helicon-produced plasma. *Plasma Phys. Control. Fusion* **49**, A167 (2007).
38. Ю.О. Аверков, Ю.В. Прокопенко, В.М. Яковенко. Спектры власних хвиль плазмового твердотільного циліндра в сильному поздовжньому магнітному полі. *Радиофиз. електрон.* **26**, 37 (2021).
39. К.П. Шамрай. Коллективные механизмы поглощения ВЧ-мощности в геликонных источниках плазмы. *Физика плазмы* **25**, 934 (1999).
40. S. Cho, M.A. Lieberman. Self-consistent discharge characteristics of collisional helicon plasmas. *Phys. Plasmas* **10**, 882 (2003).
41. Francesco M. D. Pellegrino, Mikhail I. Katsnelson, and Marco Polini. Helicons in weyl semimetals. *Phys. Rev. B* **92**, 201407(R) (2015).
42. E.V. Gorbar, V.A. Miransky, I.A. Shovkovy, P.O. Sukhachov. Pseudomagnetic helicons. *Phys. Rev. B* **95**, 115422 (2017).
43. Ю.О. Аверков, Ю.В. Прокопенко, В.М. Яковенко. Спектры собственных волн анизотропного цилиндрического твердотельного волновода. *ЖТФ* **89**, 9 (2019).
44. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon Press, 1984).
45. В.Г. Левич. *Курс теоретической физики* (Наука, 1969), Т. 1.
46. В.Л. Гинзбург. *Распространение электромагнитных волн в плазме* (Наука, 1967).
47. Ф. Платцман, П. Вольф. *Волны и взаимодействия в плазме твердого тела* (Мир, 1975).
48. А.Я. Кириченко, Ю.В. Прокопенко, Ю.Ф. Филиппов, Н.Т. Черпак. *Квазиоптические твердотельные резонаторы* (Наукова думка, 2008) [ISBN 978-966-00-0945-3].
49. Ю.О. Аверков, Ю.В. Прокопенко, В.М. Яковенко. Численное исследование взаимодействия трубчатого пучка заряженных частиц с диэлектрическим цилиндром. *ЖЭТФ* **157**, 877 (2020).
50. Ю.О. Аверков, Ю.В. Прокопенко, В.М. Яковенко. Нелинейная теория взаимодействия трубчатого пучка заряженных частиц с поверхностными волнами в плазменном цилиндре. *Радиофиз. електрон.* **9** (23), 3 (2018).
51. Ю.О. Аверков, Ю.В. Прокопенко, В.М. Яковенко. Нелинейная стабилизация резистивной неустойчивости трубчатого пучка заряженных частиц, движущегося над твердотельным плазменным цилиндром. *Физика плазмы* **45**, 529 (2019).

52. Я.Б. Файнберг, В.Д. Шапиро. К нелинейной теории взаимодействия релятивистского пучка с плазмой. В кн.: *Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой* (Изд-во АН УССР, 1965).
53. Я.Б. Файнберг, В.Д. Шапиро, В.И. Шевченко. К нелинейной теории взаимодействия с плазмой «монохроматического» пучка релятивистских электронов. *ЖЭТФ* **57**, 966 (1970).
54. В.И. Курилко. О механизме развития пучковой неустойчивости в плазме. *ЖЭТФ* **57**, 885 (1970).
55. W.E. Drummond, J.H. Malmberg, T.M. O'Neil, and J.R. Thompson. Nonlinear Development of the Beam-Plasma Instability. *Phys. Fluids* **13**, 2422 (1970).
56. Р.И. Ковтун, А.А. Рухадзе. К теории нелинейного взаимодействия РЭП малой плотности с плазмой. *ЖЭТФ* **58**, 1709 (1970).
57. И.Н. Онищенко, А.Р. Линецкий, Н.Г. Мациборко, В.Д. Шапиро, В.И. Шевченко. Возбуждения монохроматической плазменной волны электронным пучком. *Письма в ЖЭТФ* **12**, 407 (1970).
58. I.N. Onishchenko, V.D. Shapiro, and V.I. Shevchenko. On nonlinear theory of instability of a monoenergetic electron beam in plasma. *Plasma Phys.* **14**, 591 (1972).
59. А.А. Иванов, В.В. Параил, Т.К. Соболева. Нелинейная теория взаимодействия моноэнергетического пучка с плотной плазмой. *ЖЭТФ* **63**, 1678 (1973).
60. Б.А. Альтеркоп, С.Е. Росинский, В.П. Тараканов. Нелинейное взаимодействие обдувающего электронного пучка с поверхностной плазменной волной. *Физика плазмы* **5**, 291 (1979).
61. М.В. Кузелев, О.В. Лазутченко, А.А. Рухадзе. Режимы и спектры черенковской пучковой неустойчивости в нелинейной плазме. *Изв. вузов. Радиофиз.* **42**, 958 (1999).
62. Ю.О. Аверков, Ю.В. Прокопенко, В.М. Яковенко. Взаимодействие потока заряженных частиц трубчатого пучка с собственными колебаниями диэлектрического цилиндра. *Радиофиз. электрон.* **7** (21), 68 (2016).
63. B.M. Marder, M.C. Clark, L.D. Bacon, et al. The split-cavity oscillator: A high-power e-beam modulator and microwave source. *IEEE Trans. Plasma Sci.* **20**, 312 (1992).
64. K.V. Galaydych, Yu.F. Lonin, A.G. Ponomarev, Yu.V. Prokopenko, G.V. Sotnikov. Nonlinear analysis of mm waves excitation by high-current reb in dielectric resonator. *Probl. At. Sci. Technol. Ser.: Plasma Physics* **6** (82), 158 (2012).

Одержано 03.05.22

Yu. O. Averkov, Yu. V. Prokopenko, V. M. Yakovenko

INSTABILITY OF A TUBULAR ELECTRON BEAM BLOWING AROUND A PLASMA SOLID-STATE CYLINDER LOCATED IN A STRONG LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

An electrodynamic system, where a magnetized tubular electron beam blows around a cylindrical solid-state plasma waveguide, has been theoretically studied. It is established that the hybrid bulk-surface or surface electromagnetic waves of the helicon origin are excited in the waveguide, if quasi-stationary conditions are satisfied. The waveguide eigenwaves are excited by the beam space-charge field with the matching of the longitudinal spectral components of the electric field. The non-reciprocity effect is pointed out between the waveguide eigenwaves with the structurally identical field distributions but different azimuthal directions of propagation, as well as if the direction of the external magnetic field changes. It is shown that the instability of coupled waves of the electrodynamic system takes place due to the Vavilov–Cherenkov effect.

*Keywords:* electron beam, space-charge wave, eigenwaves, coupled waves, beam instability, instability increment, Vavilov–Cherenkov effect.