

Л.А. БУЛАВІН,¹ К.І. ГНАТЮК,¹ Ю.Ф. ЗАБАШТА,¹ О.С. СВЄЧНІКОВА,¹
В.І. ЦИМБАЛЮК²

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
фізичний факультет, кафедра молекулярної фізики
(Просп. Глушкова, 6, Київ 03022; e-mail: 20gnatk@gmail.com)

² Національна академія медичних наук України
(Вул. Герцена, 12, Київ 04050)

ЗСУВНИЙ МОДУЛЬ ТА СТРУКТУРА ХРЯЩОВОЇ ТКАНИНИ

УДК 577

Хрящова тканина розглядається як полімерний гель, сітка якого утворена ланцюгами фібрилярних білків та протеогліканів. Запропоновано модель такої сітки, що складається із сітчастих блоків, з'єднаних прохідними ланцюгами. В рамках запропонованої моделі досліджено механізм деформації хрящової тканини. Розроблено механізм деформації в рамках такої моделі. Отримано формулу для зсувного модуля у згаданій моделі. Експериментально визначено величину зсувного модуля для еластичної хрящової тканини. Встановлено, що число прохідних ланцюгів у запропонованій моделі для еластичного типу хрящової тканини становить 10.

Ключові слова: хрящова тканина, модуль зсуву, деформація, сіткова модель.

1. Вступ

Як відомо (див., наприклад, [1, 2] та ін.), хрящова тканина відіграє важливу роль в життєдіяльності людського організму: ця тканина виконує опорну функцію, створюючи опір дії зовнішніх навантажень. В даній статті досліджується молекулярний механізм, що забезпечує опорну функцію. Хімічна структура хрящової тканини вивчена досконало. Встановлено, що ця тканина складається з клітин (2%) та міжклітинної речовини (98%), що містить воду (75%), неорганічні солі (8%), фібрилярні білки (10%) – колаген та еластин, протеоглікани та інші органічні речовини (5%).

Структурною одиницею протеогліканів є агрегат, в склад якого входять різні полімерні ланцюги. Головним ланцюгом слугує гіалуронова кислота. До неї приєднано близько сотні білкових ланцюгів. З кожним із них зв'язано до 20 ланцюгів сульфатованих глікозаміногліканів (хондротин-сульфату та ін.).

Просторова структура хрящової тканини, особливо на молекулярному рівні, порівняно з її хімічною структурою досліджена в значно меншій мірі. При цьому, в сучасних уявленнях щодо просторової структури зустрічаються суперечності.

Одна з таких суперечностей полягає в тому, що з одного боку, в літературі висловлюється думка (див., наприклад, [1] та ін.), що для протидії зовнішнім навантаженням фібрилярні білки та протеоглікани мають створювати каркас, хоча конкретна структура цього каркасу не обговорюється; з другого ж боку, в [3] пропонується модель, яку умовно будемо називати рідинною, де такий каркас відсутній: хрящова тканина розглядається як деяка рідина, в якій окремо один від одного “плавають” ланцюги фібрилярних білків та агрегати протеогліканів.

Модель, аналогічна згаданій рідинній моделі, була використана в [4], при визначенні внутрішніх сил, які виникають в хрящовій тканині. Вважається, що основним фактором, який спричиняє появу цих сил, є орієнтація молекул води поблизу поверхні протеогліканових агрегатів.

В даній статті обґрунтовується необхідність існування каркаса, пропонується модель його структури і розглядається механізм деформації цієї моделі.

2. Напружені стани хрящової тканини

Термін “напружений стан”, як відомо, використовується в механіці суцільних середовищ (див., наприклад, [5, 6] та ін.), де досліджувана фізична система розглядається як континуум.

© Л.А. БУЛАВІН, К.І. ГНАТЮК, Ю.Ф. ЗАБАШТА,
О.С. СВЄЧНІКОВА, В.І. ЦИМБАЛЮК, 2022

ISSN 0372-400X. Укр. фіз. журн. 2022. Т. 67, № 4

277

Деформації, що виникають в континуумі під дією зовнішніх навантажень, описують за допомогою тензора деформацій ϵ_{ik} . Внаслідок деформацій в континуумі виникають напруження, що протидіють зовнішній силі. Напружений стан описують, вводячи в розгляд тензор напружень σ_{ik} .

В даній статті обмежимося розглядом пружних деформацій, вважаючи, що хрящова тканина з точки зору суцільних середовищ являє собою ізотропний пружний континуум.

Для такого континуума зв'язок між тензором ϵ_{ik} та σ_{ik} , як відомо, визначається формулою

$$\sigma_{ik} = K\epsilon_{ll}\Delta_{ik} + 2G\left(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\epsilon_{ll}\right), \quad (1)$$

де K – об'ємний модуль, ϵ_{ll} – перший інваріант тензора ϵ_{ik} , Δ_{ik} – символ Кронекера. Компоненти тензора $(\epsilon_{ik} - \frac{1}{3}\epsilon_{ll})$ називають зсувними деформаціями, а G – зсувним модулем. Перший доданок суми (1) відповідає напруженому стану, що являє собою усесторонній рівномірний стиск. Як видно з формули (1), цей стан реалізується коли

$$G = 0. \quad (2)$$

Рівність (2) в механіці суцільних середовищ є характерною ознакою рідини. Це означає, що використовувати моделі, введені в [3, 4], можна лише у випадку, коли в хрящовій тканині реалізується випадок всестороннього рівномірного стику.

Однак цей стан під дією зовнішніх навантажень в хрящовій тканині, як правило, не виникає. Зокрема, не виникає він і в міжхребцевому диску, поведінка якого, як це вважається в [3], описується рідинною моделлю.

Дійсно, диск здавлюється хребцями у вертикальному напрямку і вільно деформується в горизонтальному. Це означає, що в диску виникає стан простого стику. В цьому випадку, якщо позначити вертикальну вісь цифрою 1, формула (1) набуває вигляду

$$\sigma_{11} = E\epsilon_{11}, \quad (3)$$

де E – модуль Юнга.

Цей модуль, як відомо, задовільняє рівність

$$E = \frac{9KG}{3K + G}, \quad (4)$$

з якої видно, що при виконанні рівності (2), $E = 0$, а означає, справджується рівність

$$\sigma_{11} = 0. \quad (5)$$

З рівності (5) випливає, що хрящова тканина міжхребцевого диска не виконує своєї основної – опорної функції: в дискові не виникають напруження, що протидіють тиску з боку хребців. Отже, рідинна модель, яка введена в [3] для опису поведінки міжхребцевого диска, не відповідає реальній ситуації.

Теж саме стосується будь-якого напруженого стану: рівність (2) означає, що в хрящовій тканині не виникають напруження, що протидіють зсувним деформаціям, і, отже, хрящова тканина перестає виконувати опорну функцію.

3. Сіткова модель хрящової тканини

Як це видно з попереднього, зсувний модуль G відіграє роль ключового параметра, який диктує структуру хрящової тканини. Уже згадувалось, що G має відрізнятись від нуля. Але водночас, значення G не повинно бути надто високим, щоб забезпечити необхідну хрящовій тканині здатність до значних деформацій. Якою має бути структура хрящової тканини, щоб задовольняти обидві умови?

Виходячи із хімічного складу хрящової тканини, можна стверджувати, що з точки зору фізики ця тканина, по суті, є водним полімерним розчином. Останній, як відомо [7], може знаходитись в двох фазових станах, утворюючи золь- або гель-фазу. Для першої $G = 0$, для другої

$$G > 0, \quad (6)$$

причому, значення G малі порівняно із значеннями G для твердого тіла. Ця обставина дозволяє говорити, що хрящова тканина в основному має структуру гелю.

Макромолекули, що входять до його складу, як відомо [7], утворюють сітку, в якій ланцюги розділені вузлами на субланцюги. Як уже зазначалося, із полімерів, що входять до складу хрящової тканини, найбільшу частину складають фібрилярні білки. Тому логічно стверджувати, що сітка хрящової тканини, в основному, утворена ланцюгами саме цих полімерів.

В протеогліканових агрегатах ланцюги з'єднані між собою, фактично утворюючи сітку. Тому ці

агрегати можна розглядати, як частину загальної сітки хрящової тканини.

Вважатимемо, що в моделі сітки, яку ми намагатимемось побудувати, ланцюги мають однакові фізичні властивості, нехтуючи при цьому різницею, яка викликана їх різним хімічним складом.

Простір між субланцюгами сітки зайнято молекулами води та інших речовин, які не використано при побудові сітки.

Така сітка і є, на думку авторів, тим каркасом, про який йшлося у вступі, і який забезпечує опорну функцію хрящової тканини.

Як уже згадувалося, поняття “зсувний модуль” вводиться в механіці суцільних середовищ, де тензор деформацій вважають неперервною функцією $\epsilon_{ik}(\mathbf{r})$ вектора $\mathbf{r} = x_1, x_2, x_3$ із проєкціями, які є декартовими координатами x_1, x_2, x_3 . Область, що має нескінченно малий розмір dr і служить околom точки з радіусом-вектором \mathbf{r} , називається математично нескінченно малим об’ємом. Тензор $\epsilon_{ik}(\mathbf{r})$ є величиною, що характеризує деформацію згаданої області. Відповідно деформаційною характеристикою цієї області є також зсувний модуль.

Отже, коли йдеться про зсувний модуль хрящової тканини, остання розглядається як континуум.

Згідно з термодинамікою (див., наприклад, [8] та ін.) такий розгляд стає можливим, якщо систему можна розглядати як сукупність слабо взаємодіючих між собою областей, в яких існує локальна рівновага. Таку область називають фізично нескінченно малим об’ємом. Скорочено називатимемо її блоком. Розмір блока позначимо через L .

Математично нескінченномалий об’єм є ідеалізованим образом блока. Отже, зсувний модуль характеризує деформацію блока як цілого.

Існування слабої взаємодії означає, що блоки розділені міжблоковими прошарками, структура яких суттєво розпорядкована порівняно із структурою блока. Позначимо товщину такого прошарка через h .

Згадана термодинамічна модель для хрящової тканини набуває вигляду сітки, наведеної на рис. 1.

На рис. 1 вузли зображено зафарбованими кружальцями, ланцюги – суцільними лініями, межі блоків – пунктирами. Простір, зайнятий блоками, затоновано. Хоча в дійсності розташування вузлів у просторі не впорядковане, на рис. 1 задля нао-

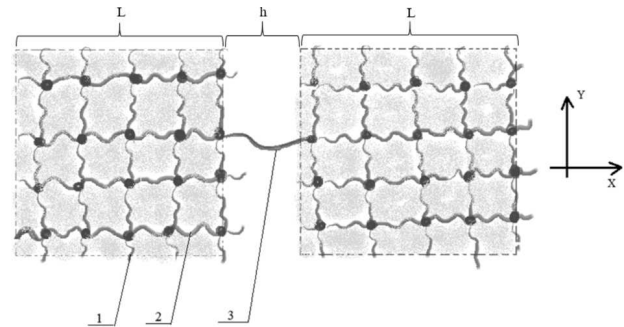


Рис. 1. Сіткова модель хрящової тканини

чності вузли розташовані так, що вони утворюють ґратку.

Характерною особливістю сітки, зображеної на рис. 1, є наявність в ній трьох типів субланцюгів: поверхневих 1, які приєднані одним своїм кінцем до поверхневого вузла блока; внутрішніх 2, які своїми обома кінцями приєднані до сусідніх вузлів даного блока; та прохідних 3, які одним кінцем приєднані до поверхневого вузла одного, а другим – до найближчого вузла сусіднього.

Враховуючи те, що хрящова тканина на 75% складається з води, вважатимемо, що за порядком величини значення l для хрящової тканини співпадає із відповідним значенням для рідин $l = 10^{-7}$ м, яке ми запозичуємо з [9].

Оцінимо значення L_1 – відстані між вузлами.

Позначимо через d розмір ланки. Розглядатимемо ланцюг як циліндр з діаметром d . Вважатимемо, що ланцюги утворюють просту кубічну ґратку з коміркою, яка має об’єм

$$V_1 = L_1^3. \quad (7)$$

Комірку утворюють 12 субланцюгів, причому в межах комірки розташовується $\frac{1}{4}$ частина об’єму, зайнятого цими ланцюгами. Відповідно для об’єму, полімеру V_1 в комірці маємо

$$V_1 = \frac{1}{4} 12 \frac{\pi d^2 L_1}{4}. \quad (8)$$

Як уже згадувалося, відносний об’єм, зайнятий полімером в хрящовій тканині, за порядком величини дорівнює 0,1, тобто

$$\frac{V_1}{V} \sim 0,1. \quad (9)$$

Підставляючи нерівності (7, 8) у вираз (9), маємо оцінку

$$L_1 \sim 10d. \quad (10)$$

Приймаючи, що $d \sim 10^{-9}$, одержуємо числову оцінку $L_1 \sim 10^{-8}$ м.

Як видно з рис. 1, товщина міжблокового шару за порядком величини дорівнює L_1 , тобто, $h \sim 10^{-8}$ м.

4. Механізм деформації сіткової моделі

Як зазначалось, хрящова тканина має змогу виконувати властиву їй опорну функцію завдяки умові (6). Завдяки тій самій умові в хрящовій тканині можуть поширюватися поперечні хвилі. Відповідно, має місце відома формула

$$G = \rho c^2, \quad (11)$$

де ρ – густина хрящової тканини, c – швидкість поширення поперечної хвилі.

Загальновідомою є також формула

$$c = \frac{\omega}{k}, \quad (12)$$

де ω – частота коливань, k – хвильове число.

Як уже згадувалось, зсувний модуль характеризує деформацію блока як цілого. Іншими словами, введення поняття “зсувний модуль” пов’язане із введенням просторового масштабу, рівного L .

Тим самим ми обмежуємо довжину хвилі λ нерівністю

$$\lambda \geq 2L, \quad (13)$$

яку можна переписати у вигляді

$$k \leq \frac{\pi}{L}. \quad (14)$$

Нехай напрямком поширення хвилі є вісь x ; відповідно рух блоків відбувається в напрямку осі Y (рис. 1).

Йдеться про плоску хвилю, отже зміщення блоків, центри інерції яких відповідають однаковій координаті x , також однакові. Ця обставина дозволяє визначити характеристики хвилі, вивчаючи будь-яку лінійну сукупність блоків, для яких за відсутності хвилі координата у всіх центрів інерції однакова, наприклад, $y = 0$.

Позначаючи через u_i та $u_{(i+1)}$ зміщення i та $(i+1)$ блоків такої лінійної сукупності, а через ΔU_i – різницю $U_{i+1} - U_i$ для сили F_i , що деформує перехідні ланцюги, з’єднуючі обидва блоки, запишемо вираз

$$F_i = -f \Delta U_i, \quad (15)$$

де f – силова стала, пов’язана із відносним зміщенням блоків.

Гранична частота ω_m коливання в цієї сукупності блоків визначається рівністю

$$\omega_m = 2\sqrt{\frac{f}{m}}, \quad (16)$$

де m – маса блока, яку розраховуватимемо за формулою

$$m = \rho L^3. \quad (17)$$

Підставляючи в формулу (12) рівності (16) та (17), із врахуванням виразу (11) отримуємо

$$G = \frac{4}{\pi^2} \frac{f}{L}. \quad (18)$$

Позначимо через n число перехідних ланцюгів, які з’єднують сусідні блоки. Відповідно, для сили F_i маємо вираз

$$F_i = nQ_i, \quad (19)$$

де Q – сила, що припадає на перехідний ланцюг.

Порівнюючи рівності (15) та (19), запишемо

$$\Delta U_i = -\frac{n}{f} Q_i. \quad (20)$$

Число ланок в перехідному ланцюгові дорівнює $\xi = \frac{L_1}{d}$. При деформації цього ланцюга, викликаного зміщенням блоків в напрямку осі Y , в тому ж напрямку зміщуються ланки перехідного ланцюга.

Позначивши через $W_{i,j}$ та $W_{i,j+1}$ зміщення ланок j та $(j+1)$, а через $\Delta W_{i,j}$ різницю $W_{i,j+1} - W_{i,j}$, маємо

$$\Delta U_i = \sum_{j=1}^{\xi} \Delta W_{i,j}. \quad (21)$$

Замінімо цей вираз наближеною рівністю

$$\Delta U_i \approx \xi \Delta W_i, \quad (22)$$

де ΔW_i – середнє значення різниці $\Delta W_{i,j}$.

На зв'язки, що з'єднують ланки, діє одна й та сама сила Q_i , що дозволяє записати вираз

$$Q_i = -q\Delta W_i, \quad (23)$$

де q – силова стала, пов'язана із відносним зміщенням ланок.

Підставляючи формулу (23) і рівність (22), отримуємо

$$\Delta U_i = -\frac{\xi}{q} Q_i. \quad (24)$$

Із порівняння виразів (20) та (24) маємо

$$f = \frac{nq}{\xi}, \quad (25)$$

і відповідно формула (18) набуває вигляду

$$G = \frac{4}{\pi^2} \frac{nqd}{LL_1}. \quad (26)$$

Використовуючи введене в [10] уявлення про віртуальні зв'язки білкових ланцюгів, вважатимемо, що деформація прохідних ланцюгів відбувається за рахунок обертання цих зв'язків. Значення $q = 3,4$ Н/м, яке відповідає такому типу деформації, запозичуємо із [11].

5. Експеримент

В статті йдеться про пружні властивості хрящової тканини, тому з точки зору експерименту, важливо вибрати для дослідження який вид тканини, де б ці властивості проявлялися найбільш яскраво. Як уже згадувалося, пружність хрящової тканини, в основному, визначається фібрилярними білками – колагеном та еластином, причому піддатливість останнього, порівняно з колагеном, набагато більша. У зв'язку з цим, маючи на увазі мету дослідження, найбільш доцільно вибрати вид хрящової тканини з максимальною концентрацією еластину. Таким видом є еластична хрящова тканина, яка є складовою частиною різних органів, зокрема, вуха.

Для виготовлення зразків використовувалося вуха свині. З верхньої частини вухної раковини вирізалися смужки шириною $a = 6$ мм (рис. 2, *a*). З них після видалення шарів шкіри отримувалися пластинки хрящової тканини, товщина яких після очищення поверхонь становила $b = 4$ мм.

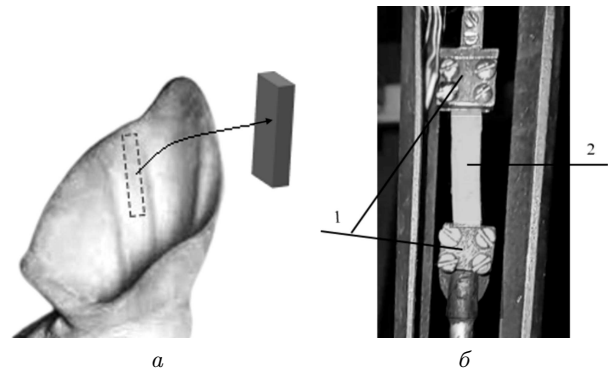


Рис. 2. Виготовлення зразків (*a*) та встановлення в приладі (*б*) (1 – затискачі, 2 – зразок)

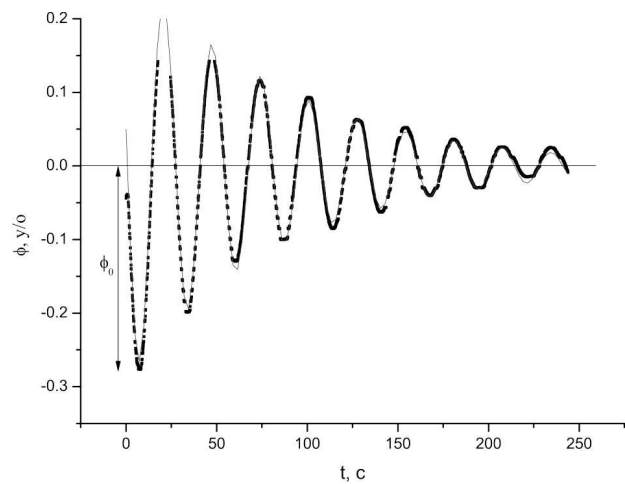


Рис. 3. Залежність кута повороту ϕ маятника від часу t

Для визначення зсувного модуля G використовувався метод крутильного маятника. Теорія методу та конструкція приладу крутильного маятника приведені в [12, 13].

В приладі зразок жорстко закріплювався за допомогою затискачів, як показано на рис. 2, *b*. Робоча довжина зразка l становила 2,7 мм.

У використаному методі, первинною експериментальною інформацією є залежність кута повороту маятника ϕ від часу t . Одну із отриманих залежностей наведено на рис. 3. Запис коливань здійснювався шляхом відео реєстрації і подальшого опрацювання за допомогою програмного забезпечення *Tracker*. Вимірювання проводилися при температурі 20 °С.

Із залежностей $\phi(t)$ визначалась циклічна частота коливань Ω .

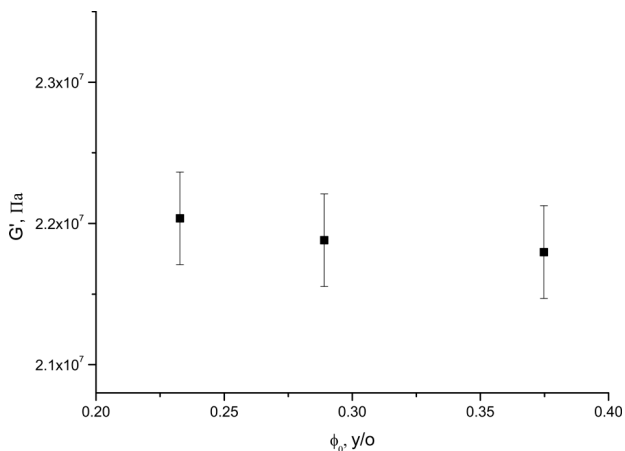


Рис. 4. Залежність зсувного модуля від початкової амплітуди коливань ϕ_0

Зсувний модуль G розраховувався за формулою, яка пропонується теорією використаного методу

$$G = \frac{J_s l}{J} \Omega^2, \quad (27)$$

де J_s – момент інерції обертальної частини маятника, J – момент інерції поперечного перерізу зразка.

Розрахунок моменту інерції J проводився за формулою (див., наприклад, [14] та ін.)

$$J = 0,3 b^3 a. \quad (28)$$

Формулу (29) отримано при умові, що деформації зразка, спричинені коливаннями, є пружними. При виконанні цієї умови модуль зсуву не залежить від амплітуди коливань. Перевіримо, чи задовільняє наш експеримент згадані умови. З рис. 4, в межах довірчого інтервалу значення G' залишається сталим, що підтверджує справедливість використання формули (29).

Згідно з формулою (26) кількість прохідних ланцюгів, що з'єднують сусідні блоки, визначається виразом

$$n = G \frac{\pi^2 L L_1}{4 q d}. \quad (29)$$

Підставляючи в цей вираз середнє значення G' , яке становить $2,1749 \cdot 10^7$ Па, і приведені вище числові значення інших величин, знаходимо, що для еластичної хрящової тканини число згаданих прохідних ланцюгів дорівнює десяти.

6. Висновки

Хрящова тканина, якщо не брати до уваги клітини, за своєю структурою є полімерним гелем. Основою цієї структури є сітка, яка утворена ланцюгами фібрилярних білків та протеогліканів. Вона складається з сітчастих блоків із розміром порядку 10^{-7} м, які з'єднані між собою перехідними ланцюгами.

При деформації, що викликана зовнішніми силами, блоки переміщуються як ціле. Внаслідок цього зовнішнє навантаження фактично сприймають перехідні ланцюги.

Кількість перехідних ланцюгів набагато менша, ніж кількість ланцюгів, що припадає на поперечний переріз сусідніх блоків. Тому перехідні ланцюги зазнають значної деформації, що призводить до малих значень зсувного модуля хрящової тканини порівняно з твердим тілом. Як показав проведений експеримент для дослідженої еластичної хрящової тканини зсувний модуль за порядком величини становить 10^7 Па, а число перехідних ланцюгів, які з'єднують сусідні ланцюги, є порядком десяти. Як відомо, з віком хрящова тканина стає більш жорсткою. Це буде проявлятися у збільшенні зсувного модуля. З позиції запропонованого механізму деформації, зростання зсувного модуля викликано збільшенням кількості перехідних ланцюгів. Згідно з запропонованою моделлю відновити гнучкість хрящової тканини можна, вводячи в хрящову тканину речовину, яка розташовується в міжблокових прошарках, здатна розривати перехідні ланцюги.

1. Ю.И. Афанасьев. *Гистология, Цитология и Эмбриология*, 5-а редакція, За редакцією Ю.И. Афанасьева, Н.А. Юриной (Медицина, 2002).
2. О.Д. Луцик, А.Й. Иванова, К.С. Кабак, Ю.Б. Чайковский. *Гистология Людини* (Книга Плюс, 2010) [ISBN: 966-7619-39-7].
3. P. Poillot, C.L. Le Maitre, J.M. Huyghe. The strain-generated electrical potential in cartilaginous tissues: A role for piezoelectricity. *Biophys. Rev.* **13**, 91 (2021).
4. V.Y. Antonchenko, V.V. P'in, N.N. Makovskii. Molecular-statistical properties of water near the surface. *Colloid J. Russ. ACAD+* **50**, 895 (1989).
5. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Гидродинамика* (Наука, 1988).
6. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теория Упругости* (Наука, 1982).
7. P.-G. De Gennes, P.-G. Gennes. *Scaling Concepts in Polymer Physics* (Cornell university press, 1979) [ISBN: 0-8014-1203-X].

8. Ю.Л. Климонтович. *Статистическая физика: учебное пособие* (Наука, 1982).
9. Л.А. Булавин, Ю.Ф. Забашта. Локальний максвеллівський розподіл у рідинах. *Ukr. J. Phys.* **57**, 1156 (2012).
10. P.J. Flory. *Statistical mechanics of chain molecules*. (John Wiley & Sons, 1969).
11. C.Y. Liang, S. Krimm, G. Sutherland. Infrared spectra of high polymers. I. Experimental methods and general theory. *J. Chem. Phys.* **25**, 543 (1956).
12. A.Z. Golik, A.F. Lopan. Investigation of viscous-elastic properties of carpon at infrasonic frequencies. *Ukr. J. Phys.* **12**, 988 (1967).
13. Л.Ю. Оксан, О.С. Свечнікова, Т.Ю. Ніколаєнко. Метод визначення зсувної пружності матеріалу в процесі його твердіння. *Funct. Mater.* **14**, 146 (2007).
14. J. Bird. *Engineering Mathematics* 5th edition (Taylor & Francis, 2007).

Одержано 03.06.22

L.A. Bulavin, K.I. Hnatiuk,
Yu.F. Zabashta, O.S. Svechnikova, V.I. Tymbaliuk

THE SHEAR MODULUS AND STRUCTURE OF CARTILAGE TISSUE

Cartilage tissue has been considered as a polymeric gel network formed from chains of fibrillar proteins and proteoglycans. A theoretical model of the network consisting of network units connected by inter-unit chains is proposed, the corresponding deformation mechanism for cartilage tissue is developed, and a formula for the shear modulus is obtained. The shear modulus for elastic cartilage tissue is also determined experimentally. The number of inter-unit chains in the model of the elastic cartilage tissue is evaluated to be equal to 10.

Keywords: cartilage tissue, shear modulus, deformation, network model.