

М.М. ЧЕПІЛКО, С.О. ПОНОМАРЕНКО

Навчально-науковий інститут аерокосмічних технологій  
 Національний технічний університет України  
 “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”  
 (Просп. Перемоги, 37, Київ 03056; e-mail: chepilkomt@gmail.com)

## ПРОБЛЕМНІ ПИТАННЯ МЕТАЛОПЛАЗМОНІКИ ОБ'ЄМНИХ ПОЛЯРИТОНІВ У МАГНІТОСТАТИЧНОМУ ПОЛІ

УДК 537.6/.8

*Запропоновано метод, який формалізує розв'язок задач електродинаміки об'ємних плазмон-поляритонів, де виникає проблема з вибором додаткових граничних умов, незалежний від кількості хвиль у їх електронній компоненті. Цей метод базується на використанні оператора Гріна для хвильового рівняння об'ємних плазмон-поляритонів та теорії лишків функцій комплексної змінної. У загальній постановці задачі, використовуючи методи тензорної алгебри, знайдено матричні коефіцієнти відбиття та заломлення електромагнітних хвиль на поверхні металу у області існування об'ємних плазмон-поляритонів. Побудовано оператор Гріна хвильового рівняння об'ємних плазмон-поляритонів у магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0$  та проаналізовано їх дисперсійні “поверхні”  $\omega = f(\mathbf{k}, \mathbf{H}_0)$ .*

*Ключові слова:* оператор Гріна, плазмони, плазмон-поляритони, просторова дисперсія, додаткові граничні умови, магнітостатичне поле.

### 1. Вступ

У попередній роботі [1] було виконано узагальнення моделі Друде–Лоренца на випадок об'ємних та поверхневих плазмонів (без врахування ефектів запізнення  $c \rightarrow \infty$ ) у немагнітному металевому зразку, що знаходиться у зовнішньому статичному магнітному  $\mathbf{H}_0$  та електричному  $\mathbf{E}_0$  полі з врахуванням ефектів просторової дисперсії.

У даній роботі ми розширимо аналіз явищ металоплазмоніки на випадок плазмон-поляритонів (коли будуть суттєвими ефекти запізнення  $c \neq \infty$ ) у немагнітному металевому зразку, за тих самих зовнішніх умов, що були задані у попередній роботі [1]. Ілюстративні розрахунки виконані, як і у попередній роботі, на прикладі антимоніду індію (напівпровідник InSb  $n$ -типу з вузькою забороненою зоною порядку 0,18 еВ), який завдяки своїм унікальним фізичним властивостям [2] має широке застосування у електроніці та приладобудуванні.

Врахування ефектів просторової дисперсії природно піднімає давню проблему додаткових граничних умов [3–7], оскільки електродинамічних

граничних умов у цьому випадку буде недостатньо. Принципових труднощів у цьому питанні немає, можна використати граничні умови електронної компоненти (плазмонів) плазмон-поляритонів, але тут же виникає проблема аргументації на користь того чи іншого вибору додаткових граничних умов.

У даній роботі запропоновано метод, який формалізує розв'язок задач електродинаміки об'ємних плазмон-поляритонів у магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0$ , де виникає проблема з вибором додаткових граничних умов, незалежний від кількості хвиль у електронній компоненті плазмон-поляритонів. Цей метод базується на використанні оператора Гріна [8] для хвильового рівняння об'ємних плазмон-поляритонів та теорії лишків [9] функцій комплексної змінної.

Використовуючи оператор Гріна та методи тензорної алгебри побудовані, у загальній постановці задачі, матричні коефіцієнти відбиття  $\hat{N}$  та заломлення  $\hat{R}$  електромагнітної хвилі, яка падає на поверхню металевого зразка, що знаходиться у магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0$ , у частотній області, де існують об'ємні плазмон-поляритони. Акту-

альність цієї задачі зумовлена широким впровадженням в сучасній аерокосмічній галузі стелс-технологій.

Знайдено загальне дисперсійне рівняння об'ємних плазмон-поляритонів у магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0$ . Проаналізовано вплив просторової дисперсії та магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$  на їх фізичні властивості. Показано, що на відміну від об'ємних плазмон-поляритонів у стандартній моделі Друде–Лоренца [10–12], тут виникають два додаткові типи низькочастотних об'ємних плазмон-поляритонів. Один із них (з найнижчою частотою) формується просторовою дисперсією та магнітостатичним полем  $\mathbf{H}_0$ . Інший – магнітостатичним полем  $\mathbf{H}_0$ , а вплив просторової дисперсії на їх фізичні властивості нехтовно малий.

Що стосується високочастотних об'ємних плазмон-поляритонів, то вплив просторової дисперсії та магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$  на їх фізичні властивості незначний і вони подібні до таких у стандартній моделі Друде–Лоренца [10–12].

## 2. Оператор Гріна і проблема додаткових граничних умов у металоплазмоніці з просторовою дисперсією

Розглянемо макроскопічне монохроматичне електромагнітне поле

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (1)$$

яке задовільняє хвильове рівняння [13], [14] у лінійному кристалічному середовищі із заданими матеріальними параметрами. Його розв'язок формально можна виразити [8] через інтегральний оператор Гріна  $\hat{G}$ :

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \int \hat{G}(\omega, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{J}(\omega, \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (2)$$

де  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\omega, \mathbf{r})$  – вектор (див. далі) густини електричного струму.

Рівняння, якому задовільняє фур'є-образ оператора Гріна  $\hat{G} = \hat{G}(\omega, \mathbf{k})$ , має такий вигляд:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\gamma}(\omega, \mathbf{k}) G^{\gamma\beta}(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{4\pi i \omega}{c^2} \delta_{\alpha\beta}, \\ \hat{G}(\omega, \mathbf{k}) &= \int \hat{G}(\omega, \mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \\ W_{\alpha\beta} &= \mathbf{k}^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - q^2 \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k})_{\alpha\beta}, \quad q = \frac{\omega}{c}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\hat{W}$  – хвильовий оператор, одержаний виходячи з рівнянь Максвелла у немагнітному металі,  $\hat{\varepsilon}$  – тензор діелектричної проникності металу [1], що знаходиться у магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0$ .

Фур'є-образ оператора Гріна виражається через взаємну матрицю

$$A_{\alpha\beta}(\hat{W}) = \frac{1}{2} e_{\alpha\nu\mu} e_{\beta\gamma\lambda} W^{\gamma\nu} W^{\lambda\mu} \quad (4)$$

та визначник  $\det(\hat{W})$  хвильового оператора  $\hat{W}$  таким чином:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \frac{A_{\alpha\beta}(\hat{W})}{\det(\hat{W})}. \quad (5)$$

Полюси фур'є-образу оператора Гріна  $\hat{G}$  звичайним чином визначають дисперсійне рівняння об'ємних плазмон-поляритонів  $\det(W) = 0$ .

Електричне поле плазмон-поляритонів  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})$  у фізичному просторі буде визначатися інтегралом

$$\mathbf{E} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{G}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{J}(\omega, \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k}, \quad (6)$$

який обчислюється методами теорії лишків [9] функцій комплексної змінної. При обчисленні інтеграла (6) вибір контуру інтегрування повинен бути узгодженим з принципом випромінювання.

Результат обчислення інтеграла (6) сформує суперпозицію електромагнітних хвиль з частотою  $\omega$  у кількості рівній кількості фізично значимих полюсів фур'є-образу оператора Гріна.

Цілком зрозуміло, що амплітуди цих хвиль (незалежно від їх кількості) будуть виражатися через єдиний вектор  $\mathbf{J}$ .

Зокрема при розгляді задачі про відбиття електромагнітної хвилі від плоскої поверхні розподілу двох середовищ  $z = 0$  електричне поле заломлених хвиль буде визначатися однократним інтегралом

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi} \int \hat{G}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{J}(\omega, \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) dk_z. \quad (7)$$

Формально результат інтегрування в (7) буде мати таке представлення:

$$\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}_j} \hat{U}(\omega, \mathbf{k}_j) \mathbf{J}(\omega, \mathbf{k}_j) \exp(i\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega t). \quad (8)$$

Явний вигляд матриці  $\hat{U} = \hat{U}(\omega, \mathbf{k})$  визначається матеріальними параметрами металевого зразка. Вектор  $\mathbf{J}$  в (7) виступає аналогом постійної інтегрування, образ якого вже можна буде визначити (див. далі) за допомогою електродинамічних граничних умов.

Таким чином, показано, що використання оператора Гріна та теорії лишків функцій комплексної змінної у металоплазмоніці з просторовою дисперсією дозволяє обійти проблему вибору додаткових граничних умов у електронній компоненті плазмон-поляритонів. Цей підхід є раціональним, оскільки вплив стану приповерхневої зони на процес формування плазмон-поляритонів у глибині металевого зразка буде незначним.

Що стосується поверхневих плазмон-поляритонів, то тут вплив приповерхневої зони на їх властивості може бути суттєвим, але його можна буде врахувати, аналогічно [1], за рахунок редукції електродинамічних граничних умов.

### 3. Метод оператора Гріна у задачі про відбиття та заломлення електромагнітних хвиль на поверхні металу у загальній постановці задачі

Розглянемо у загальній постановці задачу про відбиття та заломлення електромагнітних хвиль на плоскій межі поділу діелектрик-метал  $z = 0$  у частотних зонах, де існують плазмон-поляритони, використовуючи для цього метод оператора Гріна.

Далі будемо вважати, що метал заповнює напівпростір  $z \leq 0$ , а електричне поле падаючої на поверхню  $z = 0$  електромагнітної хвилі апроксимуємо плоскою монохроматичною хвилею:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\omega, \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t), \quad \text{при } z \geq 0. \quad (9)$$

В принципі у фур'є-просторі матричні коефіцієнти відбиття  $\hat{N} = \hat{N}(\omega, \mathbf{k})$  та заломлення  $\hat{R} = \hat{R}(\omega, \mathbf{k})$ , які визначають електричні поля відповідно відбитої  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(\omega, \mathbf{k})$  та заломленої  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2(\omega, \mathbf{k})$  електромагнітних хвиль, для спеціальних випадків постановки задачі давно відомі [15], [16]. Щодо загальної постановки цієї задачі для металоплазмоніки об'ємних поляритонів, то тут виникають певні проблеми, для розв'язку яких доцільно використати метод оператора Гріна і виразити еле-

ктричні поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= (\hat{N}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}_0(\omega, \mathbf{k})), \\ \mathbf{E}_2 &= (\hat{R}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}_0(\omega, \mathbf{k})) \end{aligned} \quad (10)$$

та матричні коефіцієнти  $\hat{N}$  та  $\hat{R}$  у термінах (6)–(8).

Логіка застосування методу оператора Гріна потребує введення до розгляду допоміжної поверхневої густини електричного струму:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 \delta(z) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t), \quad (11)$$

яка буде відігравати роль джерела відбитої та заломленої електромагнітних хвиль. Її фур'є-образ має такий вигляд:

$$\mathbf{J}(\omega', \mathbf{k}'_\tau) = \frac{\mathbf{J}_0}{2\pi} \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k}_\tau - \mathbf{k}'_\tau), \quad (12)$$

де  $\mathbf{k}_\tau = (k_x, k_y, 0)$  – хвильовий вектор, дотичний до поверхні розподілу  $z = 0$  контактуючих середовищ.

Спочатку знайдемо електричне поле плазмон-поляритонів. Комбінуючи формули (5), (7) і (12) знайдемо його представлення у вигляді інтегралу:

$$\mathbf{E} = \frac{2i\omega}{c^2} \int \frac{\hat{A}(\hat{W}(\omega, \mathbf{k}))}{\det(\hat{W}(\omega, \mathbf{k}))} \mathbf{J}_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_i \omega t) dk_z. \quad (13)$$

Його обчислення виконується методом теорії лишків функцій комплексних змінних. Формально результат інтегрування запишемо таким чином:

$$\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}_j} (\hat{U}(\omega, \mathbf{k}_j) \mathbf{J}_0) \exp(i\mathbf{k}_j \mathbf{r} - i\omega t), \quad (14)$$

де  $\mathbf{k}_j$  – хвильові вектори, які визначаються полюсами підінтегрального виразу (розв'язками рівняння  $\det \hat{W}(\omega, \mathbf{k}) = 0$  відносно  $k_z$ ) в (13). Контур інтегрування в (13) вибирається таким чином, щоб результат інтегрування призводив до електромагнітних хвиль, які розповсюджуються від межі поділу  $z = 0$  двох середовищ у глибину металу.

Аналогічним чином визначається магнітне поле плазмон-поляритонів:

$$\mathbf{H} = \sum_{\mathbf{k}_j} \frac{\omega}{c} (\hat{B}(\omega, \mathbf{k}_j) \mathbf{J}_0) \exp(i\mathbf{k}_j \mathbf{r} - i\omega t), \quad (15)$$

$$\hat{B}(\omega, \mathbf{k}) = (k^\times \hat{U}(\omega, \mathbf{k})),$$

де

$$k^\times = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

дуальний тензор хвильового вектора  $\mathbf{k}$ .

Формули (14), (15) повністю визначають структуру електромагнітного поля плазмон-поляритонів у металевому зразку, що знаходиться у магнітостатичному полі. Щодо величини  $\mathbf{J}_0$  в (14), (15), то цей вектор далі визначається за рахунок електродинамічних граничних умов [13] через амплітуду  $\mathbf{E}_0$  електричного поля падаючої на поверхню металу електромагнітної хвилі.

Далі для знаходження виразів для матричних коефіцієнтів використаємо електродинамічні граничні умови [13]. При цьому врахуємо, що у даній роботі розглядається немагнітний металевий зразок, а тому магнітне поле буде неперервним на межі поділу  $z = 0$ . За цих умов система електродинамічних граничних умов для електромагнітних полів набуває вигляду

$$\begin{aligned} ((\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n}) \Big|_{z=0} &= 0, \\ (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \Big|_{z=0} &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

де  $\mathbf{E}_{0,1,2}$  – електричні,  $\mathbf{H}_{0,1,2}$  – магнітні поля,  $\mathbf{n}$  – вектор зовнішньої нормалі до поверхні металу.

Далі використавши 2-ге рівняння Максвелла [13]

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}, \quad (18)$$

де  $\mathbf{D}$  – вектор індукції електричного поля, та формули (14), (15), запишемо замкнуту систему рівнянь відносно невідомих величин  $\mathbf{E}_1$  та  $\mathbf{J}_0$  таким чином:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 - (\hat{U}_2 \cdot \mathbf{J}_0)) \times \mathbf{n}) \Big|_{z=0} &= 0, \\ ((\mathbf{k}_0 \times \mathbf{E}_0) + (\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_1) - \varepsilon(\hat{B}_2 \cdot \mathbf{J}_0)) \Big|_{z=0} &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$\hat{U}_2 = \sum_{\mathbf{k}_j} \hat{U}(\omega, \mathbf{k}_j), \quad \hat{B}_2 = \sum_{\mathbf{k}_j} \hat{B}(\omega, \mathbf{k}_j). \quad (20)$$

В ізотропному середовищі з діелектричною проникністю  $\varepsilon = \text{const}$  поляризація електромагнітного поля є поперечною, а його фаза визначається дисперсійним рівнянням

$$(\mathbf{k}_{0,1} \mathbf{E}_{0,1}) = 0, \quad \mathbf{k}_{0,1}^2 - q^2 \varepsilon = 0. \quad (21)$$

Помноживши векторно 1-е рівняння в (19) на  $\mathbf{k}_1$  та враховуючи поперечність електромагнітних хвиль в області  $z > 0$  (див. (21)), знайдемо вираз для амплітуди електричного поля відбитої хвилі:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n})} (\mathbf{k}_1 \times (\mathbf{n} \times ((\hat{U}_2 \cdot \mathbf{J}_0) - \mathbf{E}_0))). \quad (22)$$

Якщо підставити цей вираз для  $\mathbf{E}_1$  у друге рівняння в (19), то отримаємо векторне рівняння

$$\begin{aligned} &(\mathbf{k}_1 \times (\mathbf{k}_1 \times (\mathbf{n} \times (\hat{U}_2 \cdot \mathbf{J}_0)))) - \varepsilon(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n})(\hat{B}_2 \cdot \mathbf{J}_0) - \\ & - (\mathbf{k}_1 \times (\mathbf{k}_1 \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0))) + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{k}_0 \times \mathbf{E}_0) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

відносно вектора  $\mathbf{J}_0$ . Для розв'язку рівняння (23) його доцільно переписати у матричному представленні. Для цього окрім (16) введемо матриці

$$n^\times = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$P_{1\alpha\beta} = \mathbf{k}_1^2 \delta_{\alpha\beta} - k_{1\alpha} k_{1\beta}.$$

Використавши (24) в (23), отримаємо матричне рівняння

$$(\hat{X} \cdot \mathbf{J}_0) = -(\hat{F} \cdot \mathbf{E}_0), \quad (25)$$

відносно  $\mathbf{J}_0$ , де

$$\begin{aligned} \hat{X} &= (\hat{P}_1 \cdot n^\times \cdot \hat{U}_2) + \varepsilon(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n}) \hat{B}_2, \\ \hat{F} &= (\hat{P}_1 \cdot n^\times) - (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n}) n^\times. \end{aligned} \quad (26)$$

Його розв'язок має такий вигляд:

$$\mathbf{J}_0 = (\hat{Z} \cdot \mathbf{E}_0), \quad \hat{Z} = -(\hat{X}^{-1} \cdot \hat{F}). \quad (27)$$

Формули (22), (14) та (27) повністю визначають структуру електричних полів відбитої та заломленої електромагнітних хвиль на межі поділу  $z = 0$  ізотропний діелектрик-немагнітний метал:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= (\hat{N} \cdot \mathbf{E}_0), \\ \hat{N} &= \frac{1}{(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n})} (k_1^\times \cdot n^\times \cdot ((\hat{U}_2 \cdot \hat{Z}) - I)), \\ \mathbf{E}_2 &= (\hat{R} \cdot \mathbf{E}_0), \quad \hat{R} = (\hat{U}_2 \cdot \hat{Z}), \end{aligned} \quad (28)$$

де  $\hat{I}$  – одиничний тензор.

Порівняння виразів (28) та (10) вказує на те, що величини  $\hat{N}$ ,  $\hat{R}$  в (28) є матричними коефіцієнтами відбиття та заломлення електромагнітних хвиль на межі поділу  $z = 0$  ізотропний діелектрик-немагнітний метал, які були отримані у загальній постановці задачі.

Величини  $\hat{N}$ ,  $\hat{R}$  мають прозору для розуміння, але досить таки громіздку матричну конструкцію, яку, у принципі, неважко запрограмувати на одній з алгоритмічних мов високого рівня для виконання актуальних чисельних розрахунків.

#### 4. Оператор Гріна плазмон-поляритонів немагнітних металів, які знаходяться у магнітостатичному полі $\mathbf{H}_0$

Далі ми обмежимося розглядом плазмон-поляритонів у немагнітному металі, що знаходиться у зовнішньому магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0$ , де  $\hat{\mu} = 1$ . Його діелектричну проникність  $\hat{\epsilon}$ , яка визначається узагальненою моделлю Друде-Лоренца [1], можна записати у такому вигляді:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \omega_p^2 \left( \frac{D_0}{D_0^2 - \omega^2 \omega_H^2} \delta_{\alpha\beta} - \frac{\omega^2 \omega_{H\alpha} \omega_{H\beta}}{D_0(D_0^2 - \omega^2 \omega_H^2)} + i \frac{\omega e_{\alpha\beta\gamma} \omega_H^\gamma}{D_0^2 - \omega^2 \omega_H^2} \right), \quad (29)$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m^*}, \quad \omega_H = \frac{e \mathbf{H}_0}{m^* c},$$

$$D_0 = \omega^2 - \omega_k^2 + 2i\omega\gamma, \quad \omega_k = \omega_p r_D |\mathbf{k}|,$$

де  $\omega_p$  – плазмова циклічна частота,  $\omega_H$  – вектор циклотронної частоти,  $r_D$  – дебаєвський радіус екранування електронів у металі,  $\gamma$  – параметр дисипації плазмонів.

Далі введемо до розгляду такі параметри:

$$Q = \mathbf{k}^2 - q^2 \epsilon_0, \quad \epsilon_0 = 1 - \frac{\omega_p^2 D_0}{D_0^2 - \omega^2 \omega_H^2}, \quad (30)$$

$$M_{\alpha\beta} = q^2 M m_\alpha m_\beta, \quad M = \frac{\omega_p^2 \omega^2 \omega_H^2}{D_0(D_0^2 - \omega^2 \omega_H^2)}, \quad (31)$$

$$G_{\alpha\beta} = q^2 G e_{\alpha\beta}^\gamma m_\gamma, \quad G = - \frac{\omega_p^2 \omega |\omega_H|}{D_0^2 - \omega^2 \omega_H^2},$$

де  $\mathbf{m} = \frac{\omega_H}{|\omega_H|}$  – одиничний вектор, направлений вздовж магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$ .

Величини (29)–(31) дозволяють виразити діелектричну проникливість металу і хвильовий оператор у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= \epsilon_0 \delta_{\alpha\beta} + M m_\alpha m_\beta + i G e_{\alpha\beta}^\gamma m_\gamma, \\ W_{\alpha\beta} &= Q \delta_{\alpha\beta} - (k_\alpha k_\beta + M_{\alpha\beta}) - i G_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (32)$$

Фур'є-образи оператора Гріна та електричного поля плазмон-поляритонів тут конкретизуються через алгебраїчні доповнення

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}(\hat{W}) &= Q(Q \delta_{\alpha\beta} - (\mathbf{k}^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta) - \\ &- q^2 M(\mathbf{m}^2 \delta_{\alpha\beta} - m_\alpha m_\beta)) + \\ &+ q^2 (M e_{\alpha}{}^{\nu\mu} k_\nu m_\mu e_{\beta}{}^{\nu\mu} k_\nu m_\mu - q^2 G^2 m_\alpha m_\beta) - \\ &- i q^2 G e_{\alpha\beta}{}^\nu ((\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}) k_\nu - (Q - q^2 M) m_\nu) \end{aligned} \quad (33)$$

та визначник

$$\begin{aligned} \det(\hat{W}) &= Q(Q(Q - \mathbf{k}^2 - q^2 M) + \\ &+ q^2 (M(\mathbf{k} \times \mathbf{m})^2 - q^2 G^2)) + q^4 G^2 ((\mathbf{k} \cdot \mathbf{m})^2 + q^2 M) \end{aligned} \quad (34)$$

хвильового оператора (32) таким чином:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \frac{A(\hat{W})_{\alpha\beta}}{\det(\hat{W})}, \quad \mathbf{E} = \hat{G} \mathbf{J}, \quad (35)$$

де  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\omega, \mathbf{k})$  – фур'є-образ густини електричного струму.

#### 5. Об'ємні плазмон-поляритони немагнітних металів, що знаходяться у магнітостатичному полі $\mathbf{H}_0$

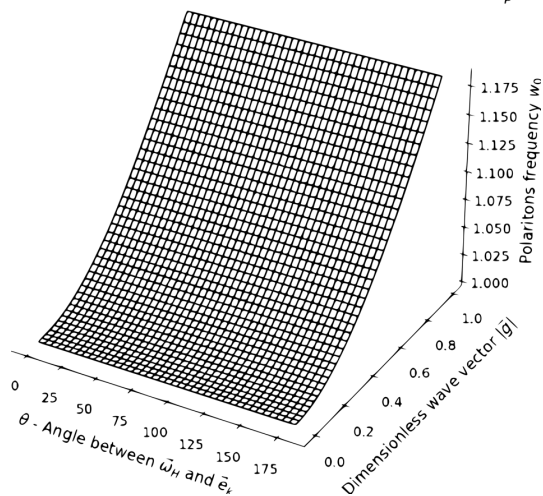
Ключовим питанням плазмоніки металів у магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0$  є знаходження розв'язків дисперсійного рівняння  $\det(\hat{W}) = 0$ , які визначають набір полюсів фур'є-образу оператора Гріна, а тим самим і структуру електромагнітного поля об'ємних плазмон-поляритонів. Для їх знаходження доцільно ввести до розгляду такі безрозмірні змінні, як

$$\begin{aligned} w &= \frac{\omega}{\omega_p}, \quad \mathbf{w}_H = \frac{\omega_H}{\omega_p}, \quad \mathbf{g} = \frac{\mathbf{k}c}{\omega_p}, \\ \mathbf{w}_g &= \rho_D \mathbf{g}, \quad \rho_D = \frac{\omega_p}{c} r_D, \quad \frac{\gamma}{\omega_p} \ll 1. \end{aligned} \quad (36)$$

Використовуючи (36) в (33) та (34), отримуємо дисперсійне рівняння об'ємних плазмон-поляритонів у такому вигляді:

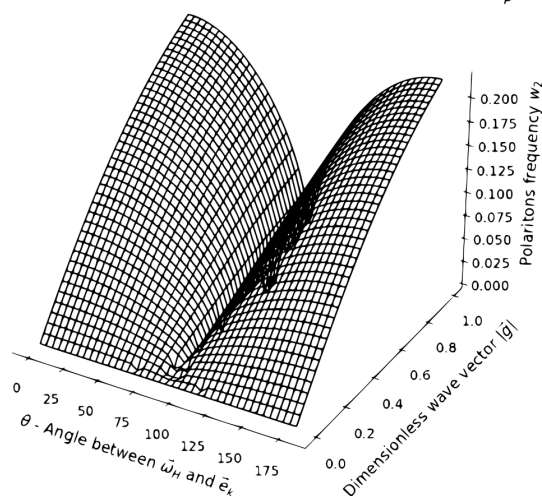
$$\begin{aligned} Q(Q(Q - \mathbf{g}^2 - w^2 M) + w^2 (M(\mathbf{g} \times \mathbf{m})^2 - w^2 G^2)) + \\ + w^4 G^2 ((\mathbf{g} \cdot \mathbf{m})^2 + w^2 M) = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

Dispersion surface of polaritons  $w_0 = f(\theta, \vec{g})$ ,  $\vec{g} = \frac{|\vec{k}|c}{\omega_p}$



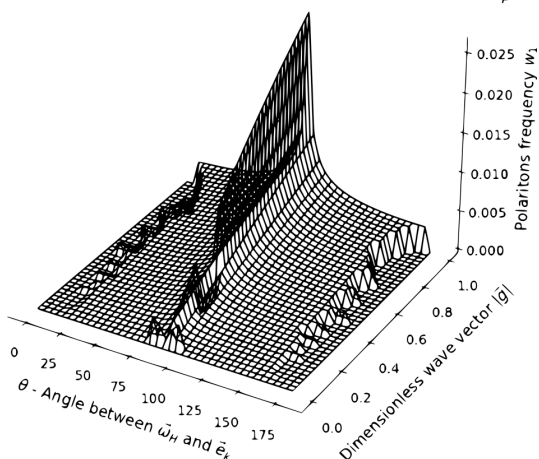
**Рис. 1.** Дисперсійна “поверхня” високочастотних плазмон-поляритонів у нехтовно слабкому магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0 \rightarrow 0$

Dispersion surface of polaritons  $w_2 = f(\theta, \vec{g})$ ,  $\vec{g} = \frac{|\vec{k}|c}{\omega_p}$



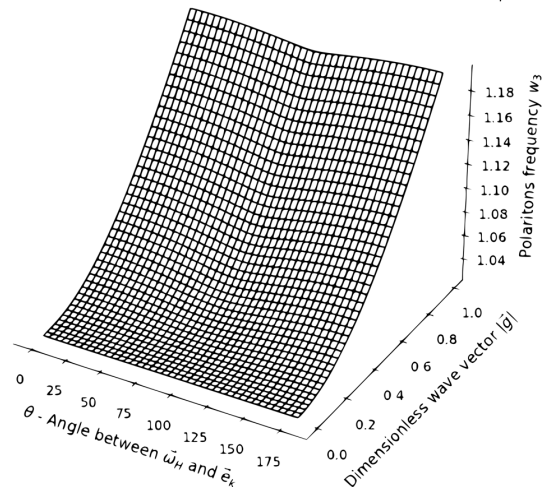
**Рис. 3.** Дисперсійна “поверхня” низькочастотних плазмон-поляритонів, зумовлених магнітостатичним полем  $\mathbf{H}_0$

Dispersion surface of polaritons  $w_1 = f(\theta, \vec{g})$ ,  $\vec{g} = \frac{|\vec{k}|c}{\omega_p}$



**Рис. 2.** Дисперсійна “поверхня” низькочастотних плазмон-поляритонів, зумовлених магнітостатичним полем  $\mathbf{H}_0$  та просторовою дисперсією

Dispersion surface of polaritons  $w_3 = f(\theta, \vec{g})$ ,  $\vec{g} = \frac{|\vec{k}|c}{\omega_p}$



**Рис. 4.** Дисперсійна “поверхня” високочастотних плазмон-поляритонів у магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0$

де

$$\begin{aligned}
 Q &= \mathbf{g}^2 - w^2 \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = 1 - \frac{D_g}{D_g^2 - w^2 w_H^2}, \\
 M &= \frac{w^2 w_H^2}{D_g(D_g^2 - w^2 w_H^2)}, \\
 G &= -\frac{w w_H}{D_g^2 - w^2 w_H^2}, \quad D_g = w^2 - w_g^2.
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

Спочатку знайдемо розв’язок дисперсійного рівняння плазмон-поляритонів немагнітного металу без впливу зовнішнього магнітостатичного поля ( $\mathbf{H}_0 \rightarrow 0$ )

$$Q = \mathbf{g}^2 - w^2 \left( 1 - \frac{1}{w^2 - w_g^2} \right) = 0.
 \tag{39}$$

Він є єдиним і має такий вигляд:

$$w_0^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{g}^2 + 1 - w_{\mathbf{g}}^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\mathbf{g}^2 + 1 - w_{\mathbf{g}}^2)^2 + 4w_{\mathbf{g}}^4}. \quad (40)$$

Графічне відображення розв'язку (40) рівняння (39) наведено на рис. 1, з яким ми будемо далі порівнювати дисперсійні "поверхні" плазмон-поляритонів металу у зовнішньому магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0$ . Оскільки  $w_{\mathbf{g}} \ll 1$ , то тут вплив простої дисперсії на фізичні властивості плазмон-поляритонів буде нехтовно малим і розв'язок рівняння (39) фактично буде співпадати з дисперсійним співвідношенням плазмон-поляритонів у стандартній моделі Друде-Лоренца [10–12].

У попередній роботі [1] було показано, що розміщення металевого зразка у зовнішньому магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0$  при  $c \rightarrow \infty$  призводить до появи двох додаткових типів низькочастотних об'ємних плазмонів. Цілком зрозуміло, що врахування ефектів запізнення ( $c < \infty$ ) призведе до виникнення відповідних їм плазмон-поляритонів. Їх дисперсійні "поверхні" визначаються розв'язками рівняння (37), які можна побудувати лише методами обчислювальної математики. Уже сама структура рівняння (37) вказує на суттєвий вплив магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$  на дисперсію плазмон-поляритонів.

Чисельні розв'язки дисперсійного рівняння (37), що відповідають низькочастотним плазмон-поляритонам, формують їх дисперсійні "поверхні", які зображені на рис. 2 та рис. 3.

Так, на рис. 2 зображена дисперсійна "поверхня" низькочастотних плазмон-поляритонів зумовлених комплексним впливом просторової дисперсії та магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$  (радіодіапазон:  $\omega \approx \omega_{\mathbf{k}}$ ). Видно, що у цьому випадку плазмон-поляритони фактично формуються за умови, що вектори  $\mathbf{k}$  та  $\mathbf{H}_0$  будуть взаємно ортогональними. Звернемо також увагу на те, що залежність  $\omega_1 = f_1(\mathbf{k})$  є немонотонною.

Далі на рис. 3 зображена дисперсійна "поверхня" низькочастотних плазмон-поляритонів, зумовлених магнітостатичним полем  $\mathbf{H}_0$  (ЗВЧ частоти:  $\omega \approx \omega_H$ ). Що стосується просторової дисперсії, то тут її вплив буде нехтовно слабким ( $\omega_{\mathbf{k}} \ll \omega_H$ ).

Порівнюючи рис. 3 з рис. 1 можна зробити висновок, що у цьому випадку магнітостатичне поле  $\mathbf{H}_0$  в околі ортогональності векторів  $\mathbf{k}$  та  $\mathbf{H}_0$  подавляє формування плазмон-поляритонів.

Останній з трьох існуючих розв'язків дисперсійного рівняння (37) відповідає (див. рис. 4) високочастотним плазмон-поляритонам ( $\omega \approx \omega_p$ ), які аналогічні плазмон-поляритонам у стандартній моделі Друде-Лоренца [10–12]. Порівнюючи рис. 4 з рис. 1 зробимо висновок, що у цьому випадку просторова дисперсія і магнітостатичне поле  $\mathbf{H}_0$  слабо впливають на фізичні властивості плазмон-поляритонів, оскільки  $\omega_{\mathbf{k}} \ll \omega_p$  і  $\omega_H \ll \omega_p$ .

## 6. Підсумки

У даній роботі запропоновано метод, який формалізує розв'язок задач електродинаміки об'ємних плазмон-поляритонів, де виникає проблема з вибором додаткових граничних умов, незалежний від кількості хвиль у їх електронній компоненті. Цей метод базується на використанні оператора Гріна для хвильового рівняння об'ємних плазмон-поляритонів та теорії лишків функцій комплексної змінної.

Використовуючи властивості оператора Гріна для хвильового рівняння об'ємних плазмон-поляритонів та методи тензорної алгебри, знайдені, у загальній постановці задачі, матричні коефіцієнти відбиття та заломлення електромагнітних хвиль на поверхні металу в області існування об'ємних плазмон-поляритонів.

Побудовано оператор Гріна хвильового рівняння об'ємних плазмон-поляритонів у магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0$ . Полюси фур'є-образу оператора Гріна визначають спектр об'ємних плазмон-поляритонів металевого зразка у магнітостатичному полі.

Виявлено, що просторова дисперсія та магнітостатичне поле  $\mathbf{H}_0$  призводять до появи додаткових типів (у порівнянні із стандартною моделлю Друде-Лоренца) об'ємних плазмон-поляритонів з дисперсією, яка суттєво залежить від взаємної орієнтації напрямку їх розповсюдження  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$  та магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$ .

Залежність фізичних властивостей плазмон-поляритонів від магнітостатичних полів  $\mathbf{H}_0$  можливо використати як метод керування у прикладних задачах металоплазмоніки.

1. М.М. Чепілко, С.О. Пономаренко. Узагальнена модель Друде–Лоренца та її застосування у металоплазмоніці. *Укр. фіз. журн.* **67**, 431 (2022).
2. Electronic archive. *New semiconductor materials. Characteristics and properties*; URL: [www.ioffe.ru/SVA/NSM/Semicond/InSb/index.html](http://www.ioffe.ru/SVA/NSM/Semicond/InSb/index.html).
3. С.И. Пекар. Теория электромагнитных волн в кристалле, в котором возникают экситоны. *ЖЭТФ* **33**, 1022 (1967).
4. В.М. Агранович, В.Л. Гинзбург. *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов* (Наука, 1965).
5. G.S. Agarwal, D.N. Pattanyak, T. Wolf. Structure of the electromagnetic field in a spatially dispersive medium. *Phys. Rev. Letts* **27**, 1022 (1971).
6. G.S. Agarwal, D.N. Pattanyak, T. Wolf. A generalized extinction theorem for exciton polarization in spatially dispersive media. *Phys. Rev. Lett. A* **40**, 279 (1972).
7. В.М. Агранович, В.И. Юдсон. К вопросу о граничных условиях в средах с пространственной дисперсией. В сб. *Современные проблемы оптики и ядерной физики* (Наукова думка, 1974).
8. Ф.М. Морс, Г. Фешбах. *Методы теоретической физики* (Рипол Классик, 2013).
9. Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. *Лекции по теории функций комплексного переменного* (Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1989).
10. Stefan A. Maier. *Plasmonics: Fundamentals and Applications* (Springer Science + Business Media LLC, 2007) [ISBN: 0-387-33150-6].
11. S. Enoch, N. Bonod. *Plasmonics: From Basics to Advanced Topics* (Springer, 2012) [ISBN-10: 3642280781].
12. Н.Б. Брандт, В.А. Кульбачинский. *Квазичастицы в физике конденсированного состояния* (Физматлит, 2005) [ISBN: 5-9221-0564-7].
13. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред* (Наука, 1982).
14. А.С. Давыдов. *Теория твердого тела* (Наука, 1976).
15. Ф.И. Федоров. *Оптика гиротропии* (Наука и техника, 1976).
16. Ф.И. Федоров. *Оптика анизотропных сред* (Едиториал УРСС, 2004).

Одержано 21.02.22

*N.M. Chepilko, S.A. Ponomarenko*

#### PROBLEMATIC ISSUES OF METAL PLASMONICS OF BULK POLARITONS IN THE MAGNETOSTATIC FIELD

A method has been proposed to formalize the solution of the problems in the electrodynamic of bulk plasmon-polaritons in which there arises a difficulty associated with the choice of additional boundary conditions independent of the number of waves in the electronic component of plasmon-polaritons. This method is based on the application of Green's operator for the wave equation describing bulk plasmon-polaritons and the residue theory of the complex-variable analysis. In the framework of the general formulation of the problem and using the methods of tensor algebra, the matrix coefficients of reflection and refraction of electromagnetic waves at the metal surface have been determined under conditions when bulk plasmon-polaritons exist. Green's operator for the wave equation of bulk plasmon-polaritons in the magnetostatic field  $\mathbf{H}_0$  has been constructed, and their dispersion "surfaces"  $\omega = f(\mathbf{k}, \mathbf{H}_0)$  have been analyzed.

*Keywords:* Green's operator, plasmons, plasmon-polaritons, spatial dispersion, additional boundary conditions, magnetostatic field.