

М.М. ЧЕПІЛКО, С.О. ПОНОМАРЕНКО

Навчально-науковий інститут аерокосмічних технологій  
Національний технічний університет України  
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"  
(Просп. Перемоги, 37, Київ 03056)

## ФІЗИЧНІ ОСНОВИ ФЕРОМАГНІТНОГО ГІРОСКОПА З НАНОРОЗМІРНИМИ ЧУТЛИВИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

УДК 537.6/.8

Розглянуто фізичні основи застосування сучасних нанотехнологій для розробки нанорозмірних та енергоефективних чутливих датчиків для систем управління малогабаритних супутників. Практичний інтерес викликає створення феромагнітного гіроскопа, в ролі моделі якого пропонується використати періодичну структуру (псевдокристал) з когерентних монодомених феромагнітних квантових точок (ФКТ), локалізованих у сферичних наноконтейнерах, де вони будуть перебувати у стані квантової левітації. Внаслідок ефекту Ейнштейна-де Гааза, ФКТ будуть мати момент імпульсу, що зберігається у часі. Для контролю за орієнтацією псевдокристала у просторі він кріпиться до рухомої платформи, розміщеної у зовнішньому двокомпонентному магнітному полі (МП). Статична компонента МП є перпендикулярною до основи псевдокристала, а динамічна – до його бічної сторони. За рахунок аналізу спектра поглинання динамічного МП, залежного від орієнтації псевдокристала у просторі, існує можливість розрахувати кутові координати його нового положення, які визначаються взаємною орієнтацією фіксованого напрямку моменту імпульсу ФКТ та вектора зовнішнього статичного МП.

**Ключові слова:** нанофізика, наночастинка, феромагнітна квантова точка, левітація, гіроскоп, спіні, магнетон, момент імпульсу.

### 1. Вступ

Останнім часом підвищений інтерес викликають наносупутники, під якими розуміють надмалі штучні супутники стандарту CubeSat (cube satellite). Це "кубики" розміром  $10 \times 10 \times 10$  сантиметрів і масою до 1 кілограма. Їхні зовнішні поверхні оснащені сонячними батареями, а всередині розміщені мікроелектронні елементи живле-

ння, системи передавання і приймання сигналів, відеокамерами для проведення космічної зйомки поверхні Землі, тощо. Недоліки супутників стандарту CubeSat у тому, що вони маленькі та мають обмежені енергетичні можливості. Перевагою є ширша гама напрямів досліджень і технологій, які можна швидко реалізувати за відносно невеликих фінансових витрат. У зв'язку з цим є практично значущим розгляд можливостей нанофізики та нанотехнологій у розробленні нанорозмірних та енергоефективних чутливих датчиків для систем управління малогабаритних супутників. При цьому головний інтерес викликає створення феромагнітного гіроскопа з нанорозмірними чутливими елементами.

Цитування: Чепілко М.М., Пономаренко С.О. Фізичні основи феромагнітного гіроскопа з нанорозмірними чутливими елементами. *Укр. фіз. журн.* **69**, № 6, 395 (2024).  
Citation: Chepilko N.M., Ponomarenko S.A. Physical principles of a ferromagnetic gyroscope with nanoscale sensitive elements. *Ukr. J. Phys.* **69**, No. 6, 395 (2024). <https://doi.org/10.15407/ujpe69.6.395>.

ISSN 0372-400X. *Укр. фіз. журн.* 2024. Т. 69, № 6

## 2. Модель нанорозмірного чутливого елемента феромагнітного гіроскопа

В ролі моделі феромагнітного гіроскопа виберемо  $N$  сферично-симетричних наноконтейнерів, в околі центра яких у стані квантової левітації (див. Додаток) знаходяться феромагнітні квантові точки (ФКТ), тобто сферично-симетричні об'єкти створені з феромагнітного матеріалу з характеристичним розміром  $d \leq 10$  нм (див. далі). З таких елементарних структур створюється шарувата періо-

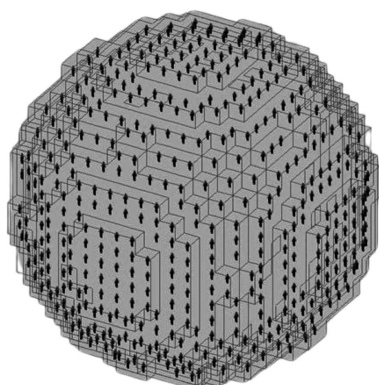


Рис. 1. Модель феромагнітної квантової точки

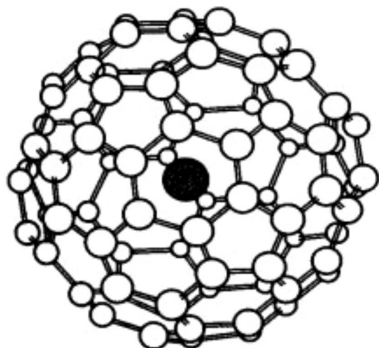


Рис. 2. Феромагнітна квантова точка інкапсульована у наноконтейнер

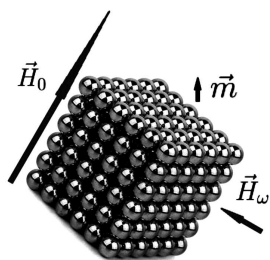


Рис. 3. Векторна схема феромагнітного гіроскопа

дична структура з кубічною симетрією (феромагнітний псевдокристал з кубічною симетрією).

У такій структурі ФКТ рівновіддалені одна від одної на відстань  $a$ , яка дорівнює діаметру сферично-симетричного контейнера  $a = 2r_0$ , де знаходиться ФКТ (див. рис. 1, 2 та рис. 3).

При технологічній реалізації псевдокристала отримаємо матрицю для ФКТ, в якій вони будуть віддалені одна від одної на відстань достатню, щоб вважати, що між ФКТ має місце лише магнітна диполь-дипольна взаємодія.

За цих умов знімається питання впливу симетрії псевдокристала на його макроскопічні магнітні властивості, тобто мова про кубічну симетрію псевдокристала ведеться лише для конкретизації моделі.

У даній роботі ми зосередимося на аналізі фізичних принципів функціонування феромагнітного гіроскопа з нанорозмірними чутливими елементами (див. рис. 1), що утворюють тривимірну, періодичну, шарувату структуру (див. далі рис. 3) заданого об'єму  $V$  (штучний, шаруватий кристал з нанорозмірних чутливих елементів), тобто отримані результати дослідження будуть мати якісно-схематичний характер.

Відправною точкою для такого аналізу ми вибрали відомий з курсу загальної фізики ефект Ейнштейна-де Гааза [1, 3], який полягає у тому, що феромагнетик під час намагнічування уздовж певної осі набуває відносно неї момент імпульсу (обертального імпульсу)  $\mathbf{L} = \text{const}$ , який буде пропорційним магнітному моменту  $\mathbf{M}$  феромагнітного зразка.

Відзначимо, що у роботах [4, 5] висловлювалися пропозиції використати класичні ефекти Ейнштейна-де Гааза [1, 3] і Барнетта [6, 8] (ефект Барнетта у відомому сенсі зворотний ефекту Ейнштейна-де Гааза) для побудови феромагнітних гіроскопів. Однак у випадку масивних кристалів ці ефекти, зважаючи на малість їхніх кількісних показників, мали суто академічний інтерес. Водночас у разі наноб'єктів, що мають квантові властивості, ситуація може бути якісно іншою.

Як показують теоретичні та експериментальні дослідження [9, 14], у феромагнітних кристалах магнітний момент його атомів, у наслідок спін-орбітальної взаємодії та магнітної анізотропії, буде істотно меншим, ніж сума некомпенсованих магнетонів Бора (спінових магнітних моментів елект-

ронів) цих же атомів. У той самий час у нанорозмірного феромагнетика з характеристичним розміром  $1 \leq d \leq 12$  нм (де може перебувати від 10 до  $10^4$  атомів), внаслідок перебудови міжатомної взаємодії та переважаючої ролі поверхневих атомів над об'ємними, нанорозмірний феромагнетик стає монодоменим, а його власний магнітний момент наближається за своїм значенням до векторної суми некомпенсованих магнетонів Бора атомів, що входять до його складу, і стає істотно більшим [11, 12] порівняно з випадком феромагнітного кристала.

Ансамблі нанорозмірних феромагнітних утворень, які мають властивість надзвичайно великого питомого намагнічування (що істотно перевищує питома намагнічування феромагнітного кристала) у слабких зовнішніх магнітних полях без виникнення гістерезису, називають суперпарамагнетиками [11, 13]. Їх можна розглядати як “великі блоги” для створення нових матеріалів і приладів.

Для досягнення мети роботи необхідно:

- розглянути структуру і проаналізувати фізичні властивості нанорозмірних чутливих елементів;
- проаналізувати квантові стани нанорозмірних чутливих елементів, які зумовлені ефектом Ейнштейна–де Гааза;
- розглянути питання квантової левітації нанорозмірних чутливих елементів у сферичному нанорозмірному контейнері;
- проаналізувати механізм відслідковування зміни орієнтації псевдокристала відносно фіксованого напрямку магнітного моменту нанорозмірних чутливих елементів за рахунок збереження їх моменту імпульсу.

Наразі нанорозмірні феромагнітні утворення потрібного розміру конструюють, в основному, з іонів перехідних елементів. Відомо безліч [11, 12] молекул-магнітів:  $V_{15}$ ,  $Fe_8$ ,  $Fe_{10}$ ,  $Fe_{30}$ ,  $mn_2As$ ,  $mn_6$ ,  $mn_{12}$  тощо. Відзначимо, що технологія виготовлення нанорозмірних феромагнітних утворень нині добре розвинута у зв'язку з їх широким застосуванням у медикобіологічній практиці.

Звернемо увагу також на той факт, що нанорозмірні утворення з іонів перехідних елементів будуть наділені не тільки магнітним моментом, а й некомпенсованим електричним зарядом.

Як модель чутливого елемента феромагнітного гіроскопа розглянемо нанорозмірну феромагнітну кулю, радіус якої  $R$  має розмір порядку  $1 \leq$

$\leq R \leq 12$  нм. Таке утворення, що буде складатися з невеликої кількості атомів ( $10-10^4$ ) (див. рис. 1), називається по-різному: наночастинкою, нанокристалом, штучним атомом або квантовою точкою, оскільки воно ще має квантові властивості. Далі ми будемо використовувати термін “феромагнітна квантова точка” (ФКТ).

Будемо вважати, що ФКТ інкапсульована у наноконтейнер у вигляді сфери (див. рис. 2), у котрої радіус у кілька десятків разів перевищує радіус ФКТ, де вона буде перебувати у стані квантової левітації (як матеріальна точка, що перебуває у сферично-симетричній потенціальній ямі [20] (див. Додаток). Левітація ФКТ необхідна, щоб виключити вплив навколишнього середовища на її динаміку (щодо тертя, то у цьому випадку воно буде повністю відсутнім).

ФКТ цікаві тим, що наділені внутрішнім, додатковим ступенем вільності – монодоменим магнітним моментом  $\mathbf{m}$ , який зумовлює велике розмаїття властивостей і дає змогу зондувати й керувати їхнім станом за допомогою зовнішнього магнітного поля з напруженістю  $\mathbf{H}_0$ .

В ролі чутливого елемента феромагнітного гіроскопа пропонується розглядати ФКТ, яка прецесує у зовнішньому магнітному полі, перебуваючи у стані квантової левітації, у якій магнітний момент  $\mathbf{m}$  значною мірою формується її некомпенсованою спіновою підсистемою.

Феромагнітний гіроскоп буде практично значущим за умови, що квантовий момент імпульсу ФКТ  $\mathbf{S}$ ,  $S = |\mathbf{S}| = N \frac{\hbar}{2}$ , який зумовлений її спіновою підсистемою, що складається з  $N$  некомпенсованих спінів, буде істотно перевищувати її класичний механічний момент імпульсу  $\mathbf{l}_0 = \hat{J}_0 \omega_0$ . Тут  $J_0 = \frac{2}{5} m_0 R^2$  – класичний момент інерції феромагнітної кулі з інертною масою  $m_0$ , радіусом  $R$ , що обертається з циклічною частотою класичного ефекту Ейнштейна–де Гааза  $\omega_0$ . Лише за умови виконання цієї умови, з якої випливає нерівність

$$\omega \simeq S/J_0 \gg \omega_0, \quad (1)$$

намагнічена ФКТ перебуватиме у стані обертального руху з частотою  $\omega$ , тобто виникатиме супер-ефект Ейнштейна–де Гааза.

В підсумку механічний момент імпульсу ФКТ  $\mathbf{j}$ , що зберігається, буде визначається формулою

$$\mathbf{j} = \mathbf{l}_0 + \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \text{const}, \quad \mathbf{l}_0 \ll \mathbf{S}. \quad (2)$$

Відповідно ми можемо вважати, що вектор моменту імпульсу псевдокристалла  $\mathbf{J} = \text{const}$  визначається векторною сумою

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^N \mathbf{j}_i \simeq \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_i \quad (3)$$

нескомпенсованих спінів ФКТ, що раніше було відомо [11, 14] з експериментальних досліджень.

Величина магнітного моменту ФКТ визначається ланцюжком формул

$$m = \mu_B N = \mu_B \frac{2S}{\hbar} = -\gamma S, \quad (4)$$

де  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$  – магнетон Бора (елементарний магнітний момент електрона), а  $\gamma = \frac{|e|\hbar}{m_e c}$  – гіромагнітне відношення електрона. Згідно з формулою (1) частота обертання ФКТ дорівнюватиме

$$\omega \simeq \frac{S}{J_0} = \frac{5}{4} \frac{N\hbar}{m_0 R^2}, \quad N \gg 1, \quad \omega \gg \omega_0. \quad (5)$$

Зробимо оцінку величини  $\omega$ . Очевидно, що величини  $N$  і  $R$  взаємозалежні. Встановимо між ними функціональний зв'язок. Для цього ФКТ і її структурний елемент будемо розглядати як кулі радіусом  $R$  і  $r_a$  відповідно, а зв'язок між їх об'ємами  $V$  і  $V_a$  та інертними масами  $m_0$  і  $m_a$  запишемо таким чином  $V \simeq NV_a/k$ ,  $m_0 \simeq Nm_a/k$ , де  $k$  – кількість нескомпенсованих спінів у структурного елемента ФКТ. Тоді кількість нескомпенсованих спінів ФКТ  $N$  в об'ємі  $V$  та величина  $\omega$  будуть мати такі представлення:

$$N = k \left( \frac{R}{r_a} \right)^3, \quad \omega = \frac{5}{4} \frac{k\hbar}{m_a R^2}. \quad (6)$$

Кількісну оцінку величин  $N$  і  $\omega$  зробимо на прикладі такого структурного елемента ФКТ, як атом заліза, у якого  $m_a = 9,27 \cdot 10^{-23}$  г,  $r_a = 1,2 \cdot 10^{-8}$  см,  $k = 4$ . У цьому випадку для ФКТ з характеристичним розміром  $R \simeq 1$  нм отримаємо

$$N \simeq 4 \cdot 72 = 289, \quad \omega \simeq 1,43 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{с}}. \quad (7)$$

Істотно, що ФКТ з  $R \simeq 1$  нм у стані квантової левітації буде обертатися з кутовою швидкістю порядку  $10^{11} \frac{1}{\text{с}}$  (рух за інерцією) тільки за рахунок наявності у неї монодоменого магнітного моменту  $\mathbf{m}$ , без будь-яких енергетичних витрат (супер-ефект Ейнштейна-де Гааза).

Для оцінки величини індукції магнітного поля ФКТ  $B_{\mu_B}$ , зумовленого її магнітним моментом  $m$ , використаємо рівність  $B_{\mu_B} m \simeq \hbar \omega$ . Звідси, враховуючи формули (1), (4), отримуємо

$$B_{\mu_B} \simeq \frac{\hbar \omega}{\gamma S} = \frac{\hbar}{\gamma J_0}. \quad (8)$$

По порядку величини індукція магнітного поля ФКТ (8) буде мати таке значення

$$B_{\mu_B} \simeq 5 \cdot 10^3 \text{ Гс}. \quad (9)$$

Формула (9) свідчить про те, що магнітний момент ФКТ  $\mathbf{m}$  створює суттєве магнітодипольне поле, яке буде потрібно враховувати у подальших розрахунках.

Таким чином ми знайшли фізичне обґрунтування для використання у перспективі ФКТ як чутливого елемента феромагнітного гіроскопа.

Корисною для розуміння фізики штучних магнітних матеріалів є робота [15] та цитовані в [15] наукові публікації, в яких розглядалися магнітні композити, котрі можна створити шляхом вбудови суперпарамагнітних наночастинок в рідку, полімерну чи тверду просту кубічну матрицю.

Для побудови приладу на основі моделі псевдокристалла, що реально працює, потрібно врахувати той факт, що ФКТ є квазікласичним об'єктом, який слід ізолювати від зовнішнього впливу за рахунок того чи іншого механізму левітації.

У профільній науковій літературі можна знайти теоретичний опис різних механізмів левітації макроскопічних об'єктів. Найбільш відомим механізмом левітації феромагнітних макроскопічних об'єктів є ефект Мейснера [16, 19]. Саме ефектом Мейснера пояснюється левітація надпровідника над сильним магнітом (або магніту над надпровідником). Але реалізація левітації упорядкованого ансамбля ФКТ на основі ефекту Мейснера є малоперспективною у силу її технологічної складності.

З огляду на мету даної роботи, з нашої точки зору, більш перспективною є квантова левітація ФКТ (яка раніше не розглядалася у науковій літературі) у підходящому наноконтейнері, який відіграватиме для ФКТ роль глибокої потенціальної ями [20]. У цьому випадку проблема ізоляції ФКТ від впливу навколишнього середовища вирішується автоматично, за рахунок механізму кван-

тової левітації ФКТ у наноконтейнері (див. Додаток та рис. 2).

З точки зору прикладних застосувань псевдокристал доцільно жорстко кріпити нижньою гранню до рухомої платформи, яка знаходиться у зовнішньому однорідному магнітостатичному полі з напруженістю  $\mathbf{H}_0$ . Магнітостатичне поле  $\mathbf{H}_0$  доцільно вибрати перпендикулярним до рухомої платформи, на якій розташовано цей псевдокристал.

З огляду на закон збереження сумарного моменту імпульсу ФКТ  $\mathbf{J} = \text{const}$ , зміна орієнтації рухомої платформи у просторі буде призводити до зміни напрямку вектора повної індукції магнітного поля  $\mathbf{V}_{\text{res}}$ , який формується як векторна сума магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$  та магнітодипольного поля псевдокристала  $\mathbf{V}$ , зумовленого магнітними моментами  $\mathbf{m}$  ФКТ (див. далі). Контроль за індукцією магнітного поля  $\mathbf{V}_{\text{res}}$ , у свою чергу, дозволить отримати дані про орієнтаційну динаміку літального апарата.

З метою контролю за орієнтаційною динамікою літального апарата над геометричним центром верхньої грані псевдокристала необхідно закріпити датчик магнітометра. За його допомогою вимірюється індукція результуючого магнітного поля  $\mathbf{V}_{\text{res}} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V}$ . Як буде показано далі у компонентах вектора індукції результуючого магнітного поля  $\mathbf{V}_{\text{res}}$  зосереджуються дані про зміну орієнтації псевдокристала у просторі, тобто дані про орієнтаційну динаміку літального апарата.

### 3. Аналіз динаміки намагніченості псевдокристала

Введемо декартову систему координат  $OXYZ$ , центр якої  $O$  буде знаходитися у геометричному центрі псевдокристала, а осі  $X, Y, Z$  паралельні його бічним ребрам. Орти цієї системи координат позначимо таким чином:  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ .

Будемо вважати, що вздовж осей  $X, Y, Z$  знаходиться по  $2N_{1,2,3} + 1$  ФКТ. Тут і далі  $N_{1,2,3}$  – цілі числа. Загальна кількість ФКТ у псевдокристалі буде рівною  $N = (2N_1 + 1) \times (2N_2 + 1) \times (2N_3 + 1)$ .

Координати кожної ФКТ будуть визначатися радіус-вектором  $\mathbf{r}_n = a\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , де  $n_{1,2,3} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N_{1,2,3}$ .

З огляду на властивості ФКТ [11,12] та їх значну взаємовіддаленість допустимо вважати, що між ними існує лише магнітодипольна взаємодія.

У вибраній системі координат індукцію магнітодипольного поля  $\mathbf{V}_n = \mathbf{V}_n(\mathbf{r})$  ФКТ з координатами  $\mathbf{r}_n$  можна записати у такому вигляді:

$$\mathbf{V}_n = - \left( \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} - 3 \frac{\hat{D}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \mathbf{m}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^5} \right). \quad (10)$$

Згідно з принципом суперпозиції магнітодипольне поле  $\mathbf{V}_d$  псевдокристала можна записати таким чином:

$$\mathbf{V}_d = - \sum_n \left( \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} - 3 \frac{\hat{D}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \mathbf{m}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^5} \right). \quad (11)$$

Для подальших викладок доцільно виразити вектор (11) через намагніченість псевдокристала:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_n \mathbf{m}, \quad \text{або} \quad \mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{a^3} \quad (12)$$

у такому вигляді

$$\mathbf{V}_d = -\hat{G}(\mathbf{r})\mathbf{M}, \quad \hat{G} = a^3 \sum_n \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{n}|^3} - 3 \frac{\hat{D}(\mathbf{r} - \mathbf{n})}{|\mathbf{r} - \mathbf{n}|^5} \right), \quad (13)$$

де  $G$  – геометричний фактор (дискретний розмагнічуючий фактор) псевдокристала, а  $V = a^3 N$  – його об'єм.

Згідно з принципом суперпозиції індукція магнітного поля, створеного псевдокристалом у магнітостатичному полі  $\mathbf{H}_0$ , буде визначатися формулою

$$\mathbf{V}_{\text{res}} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V}_d. \quad (14)$$

Оскільки магнітні моменти кожної ФКТ пропорційні їх моментам імпульсу, що зберігаються, то і магнітні моменти ФКТ також будуть зберігати свій напрямок у просторі при зміні орієнтації псевдокристала. Це означає, що у силу збереження моментів імпульсу ФКТ, орієнтація вектора  $\mathbf{V}_d$  у просторі буде незмінною. У той самий час при зміні орієнтації псевдокристала вектор  $\mathbf{V}_{\text{res}} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V}_d$  буде змінюватися, що відкриває можливість відслідковувати зміну орієнтації літального апарата.

При зміні орієнтації псевдокристала перехід до зв'язаної з ним нової системи координат  $OX'Y'Z'$  буде визначатися матрицею

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} c(\gamma) + e_x^2 w(\gamma) & e_x e_y w(\gamma) - e_z s(\gamma) & e_x e_z w(\gamma) + e_y s(\gamma) \\ e_y e_x w(\gamma) + e_z s(\gamma) & c(\gamma) + e_y^2 w(\gamma) & e_y e_z w(\gamma) - e_x s(\gamma) \\ e_z e_x w(\gamma) - e_y s(\gamma) & e_z e_y w(\gamma) + e_x s(\gamma) & c(\gamma) + e_z^2 w(\gamma) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$s(\gamma) = \sin(\gamma), \quad c(\gamma) = \cos(\gamma), \quad w(\gamma) = 1 - \cos(\gamma),$$

де одиничний вектор  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{z'}$  визначає напрямок осі  $Z'$  системи координат  $OX'Y'Z'$ , а  $\gamma$  – кут її повороту навколо вектора  $\mathbf{e}$ . Відзначимо, що компоненти вектора

$$\mathbf{e} = (\sin(\alpha) \cos(\beta), \sin(\alpha) \sin(\beta), \cos(\alpha))$$

визначається у системі координат  $OXYZ$ , де  $\alpha$ ,  $\beta$  – полярний та азимутальний кути.

Компоненти магнітного моменту ФКТ  $\mathbf{m}$  у системі координат  $OX'Y'Z'$  визначаються матрицею повороту  $\mathbf{m}' = \hat{R}(\mathbf{e}, \gamma)\mathbf{m}$ , а вектор магнітодипольного поля в околі точки  $\mathbf{r}$  очевидно матиме такий вигляд:

$$\mathbf{V}'_d = \sum_n \hat{R}(\mathbf{e}, \gamma) \hat{G}(\mathbf{r}) \mathbf{M}. \quad (16)$$

Застосувати формулу (16) у гіроскопії, зокрема, можна таким чином:

**1. Магнітостатичний підхід.** У загальному випадку індукція результуючого магнітного поля  $\mathbf{V}'_{\text{res}}$  в околі датчика магнітометра буде визначатися формулою

$$\mathbf{V}'_{\text{res}} = \mathbf{H}'_0 + \mathbf{V}'_d(\mathbf{r}'_{N_3}). \quad (17)$$

Оскільки у даній постановці задачі намагніченість псевдокристалів практично однорідна, то далі індекс  $N_3$  у формулі (17) будемо опускати.

Формула (17) має прикладне значення для гіроскопії, основне завдання якої є відслідкування зміни орієнтації літального апарата.

Так, якщо вектор  $\mathbf{V}'_{\text{res}}$  визначити при  $\mathbf{H}_0 = 0$  за допомогою магнітометра, то формулу (17) можна буде розглядати як систему трьох рівнянь відносно невідомих кутів  $\alpha, \beta, \gamma$ , які визначають нову орієнтацію псевдокристалів. Тобто можна вважати, що система рівнянь (17), яка описує індукцію магнітного поля феромагнітного псевдокристалів, є фізичною основою для розробки феромагнітного гіроскопа.

**2. Магнітодинамічний підхід.** Більш перспективним з прикладної точки зору виглядає магнітодинамічний підхід. Так, при  $\mathbf{H}_0 \neq 0$  магнітні

моменти ФКТ  $\mathbf{m}$  у псевдокристалі будуть перебувати у стані прецесії. Якщо між двома бічними гранями псевдокристалів створити однорідне гармонічне магнітне поле (ГМП)  $\mathbf{H}_\omega$  з циклічною частотою  $\omega_z$ , перпендикулярне до магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$ , то в околі ларморівських частот магнітних моментів ФКТ  $\mathbf{m}$  виникне інтенсивне поглинання його енергії. Це явище можна використати для визначення зміни орієнтації псевдокристалів у просторі.

За умови  $N_{1,2,3} \gg 1$  можна вважати, що основну роль у поглинанні енергії ГМП  $\mathbf{H}_\omega$  відіграють ФКТ в об'ємі псевдокристалів. Тому будемо вважати повну індукцію магнітного поля

$$\mathbf{V}'_f = \mathbf{V}_d + \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\omega \quad (18)$$

у межах псевдокристалів однорідною, а за своїм значенням близькою до такої у центрі псевдокристалів.

Якщо вибрати розміри псевдокристалів такими, що  $1 \ll N_3 \ll N_{1,2}$  то, згідно з [21, 22], геометричний фактор (дискретний розмагнічуючий фактор) та магнітодипольне поле будуть мати лише по одній відмінній від нуля компоненті

$$G_{z'z'} = 4\pi, \quad \mathbf{V}'_d = (0, 0, -4\pi M_{z'}). \quad (19)$$

У цьому наближенні нелінійне динамічне рівняння Ландау–Ліфшиця для намагніченості псевдокристалів (12) в системі координат  $OX'Y'Z'$  матиме вигляд

$$\frac{d\mathbf{M}'}{dt} = -\gamma[\mathbf{V}'_f \times \mathbf{M}'] - \frac{\beta}{M_0^2} [[\mathbf{V}'_f \times \mathbf{M}'] \times \mathbf{M}'], \quad (20)$$

$\gamma$  – гіромагнітне відношення,  $0 < \beta \ll 1$  – коефіцієнт затухання,  $M_0 = |\mathbf{M}'|$ .

Якщо рівняння (20) скалярно помножити на вектор  $\mathbf{M}'$  і врахувати властивості змішаного векторного добутку у правій частині рівняння (20), то дійдемо до висновку, що  $|\mathbf{M}'| = \text{const}$ . Це означає, що динаміка вектора  $\mathbf{M}'$  у магнітному полі з індукцією  $\mathbf{V}'_f$  зводиться до прецесії.

Конкретизуємо напруженість зовнішнього магнітного поля  $\mathbf{H}'_f$  таким чином:

$$\begin{cases} \mathbf{H}'_f = (H_{\omega x'}, H_{\omega y'}, H_{0z'} + H_{\omega z'}), \\ \mathbf{H}'_\omega = \mathbf{H}'_1 e^{i\omega z' t} \end{cases} \quad (21)$$

де  $\omega z'$  – циклічна частота гармонічного магнітного поля. У цьому випадку індукція магнітного поля в (20) матиме таке представлення:

$$\mathbf{V}'_f = \mathbf{V}'_d + \mathbf{H}'_f. \quad (22)$$

З математичної точки зору рівняння (20) подібне до таких, що аналізувалися у теорії магнітного резонансу [21, 22] зазвичай при малих кутах відхилення між векторами  $\mathbf{M}'$  і  $\mathbf{V}'_f$ . У даному випадку таке обмеження не прийнятне.

Для розбудови загального розв'язку рівняння (20) в ролі пробної функції виберемо анзац

$$\begin{cases} M'_{0x'} = M_0 \sin(\theta) \cos(\varphi), \\ M'_{0y'} = M_0 \sin(\theta) \sin(\varphi), \\ M'_{0z'} = M_0 \cos(\theta), \end{cases} \quad (23)$$

де  $M_0 = |\mathbf{M}'|$ . Тут і далі  $\theta = \theta(t)$  – полярний і  $\varphi = \varphi(t)$  – азимутальний кути, які є динамічними змінними задачі при умові, що  $|\mathbf{M}'| = M_0 = \text{const}$ .

Між компонентами вектора  $\mathbf{M}'$  і кутовими динамічними змінними  $\theta, \varphi$  має місце такий зв'язок:

$$\theta = \arccos\left(\frac{M'_{0z'}}{M_0}\right), \quad \varphi = \arctg\left(\frac{M'_{0y'}}{M'_{0x'}}\right). \quad (24)$$

Для подальших викладок зручно виразити індукцію магнітного поля  $\mathbf{V}'_f$  через потенціальну енергію  $U$  намагніченості  $\mathbf{M}'$  у цьому полі таким чином:

$$V'_{fi} = -\frac{\partial U}{\partial M'_i} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial M'_i} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial M'_i}, \quad (25)$$

де  $i = x', y', z'$ .

Зв'язок між компонентами магнітного поля у декартовій і сферичній системах координат знайдено у такому вигляді:

$$\begin{cases} B_{fx'} = -\frac{\partial U}{\partial M'_{fx'}} = -\sin(\varphi) B_{f\varphi}, \\ B_{fy'} = -\frac{\partial U}{\partial M'_{fy'}} = +\cos(\varphi) B_{f\varphi}, \\ B_{fz'} = -\frac{\partial U}{\partial M'_{fz'}} = -\frac{1}{\sin(\theta)} B_{f\theta}, \end{cases} \quad (26)$$

де

$$\begin{cases} B_{f\theta} = -\frac{1}{M_0} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ B_{f\varphi} = -\frac{1}{M_0 \sin(\theta)} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (27)$$

компоненти магнітного поля  $\mathbf{V}'_f$  у сферичній системі координат, які були знайдені за рахунок формул (24).

Підстановка (26) у (20) після алгебраїчних перетворень спрощує їх і надає такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma B_{f\varphi} = \frac{\beta}{M_0} B_{f\theta}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\gamma}{\sin(\theta)} B_{f\theta} = \frac{\beta}{M_0 \sin(\theta)} B_{f\varphi}. \end{cases} \quad (28)$$

Система рівнянь (28) еквівалентна рівнянням Ландау–Ліфшиця (20) і має широку область застосування. Її можна використовувати при довільній амплітуді коливань вектора  $\mathbf{M}'$ , у тому числі при будь-якому рівні нелінійності.

Далі будемо вважати, що ГМП  $\mathbf{V}_\omega$  є малим збуренням магнітостатичного поля  $\mathbf{H}_0$  і використаємо критерій  $|\mathbf{H}_1| \ll |\mathbf{H}_0|$ , для лінеаризації системи рівнянь (28) в околі стаціонарного стану системи. З цією метою запишемо потенціальну енергію намагніченості таким чином:

$$U = U_0 + U_1, \quad (29)$$

де перший доданок

$$U_0 = -H_0 M_0 \cos(\theta) + 2\pi M_0^2 \cos^2(\theta) \quad (30)$$

визначає потенціальну енергію намагніченості  $\mathbf{M}'$  у магнітостатичному полі, а другий

$$\begin{aligned} U_1 = & -H_\omega M_0 (\sin(\theta) \sin(\theta_1) \cos(\varphi - \varphi_1) + \\ & + \cos(\theta) \cos(\theta_1)), \end{aligned} \quad (31)$$

$$H_\omega = H_1 \exp(i\omega z' t)$$

у ГМП  $\mathbf{H}'_\omega$ , де  $\theta_1 = \text{const}$ ,  $\varphi_1 = \text{const}$  – кутові координати вектора  $\mathbf{H}_1$ .

Цілком зрозуміло, що фізичний зміст мають лише дійсні частини величини  $U_1$  та формул отриманих на її основі.

Підстановка (29)–(31) у (27) конкретизує магнітне поле (27) у такому вигляді:

$$\begin{cases} B_{f\theta} = -H_0 \left(1 - 4\pi \frac{M_0}{H_0} \cos(\theta)\right) \sin(\theta) + \\ + H_\omega (\cos(\theta) \sin(\theta_1) \cos(\varphi - \varphi_1) - \\ - \sin(\theta) \cos(\theta_1)), \\ B_{f\varphi} = -H_\omega \sin(\theta) \sin(\theta_1) \sin(\varphi - \varphi_1), \\ H_\omega = |\mathbf{H}'_1| e^{i\omega_z t}. \end{cases} \quad (32)$$

Комбінація формул (28) і (32) надає динамічним рівнянням задачі такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -(\alpha\omega_\theta - (a_\varphi + \alpha a_\theta)\omega_1 e^{i\omega_z t}) \sin(\theta), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega_\theta + (a_\theta - \alpha a_\varphi)\omega_1 e^{i\omega_z t}, \end{cases} \quad (33)$$

де

$$\begin{aligned} \omega_\theta &= \omega_0(1 - \lambda \cos(\theta)), \quad \omega_0 = \gamma H_0, \quad \lambda = 4\pi \frac{M_0}{H_0}, \\ a_\theta &= \text{ctg}(\theta) \sin(\theta_1) \cos(\varphi - \varphi_1) - \cos(\theta_1), \\ a_\varphi &= \sin(\theta_1) \sin(\varphi - \varphi_1), \\ \alpha &= \frac{\beta}{\gamma M_0} \quad \omega_1 = \gamma H_1. \end{aligned} \quad (34)$$

Рівняння (33) точні. Спочатку розглянемо стаціонарну динаміку вектора намагніченості  $\mathbf{M}'$  у магнітостатичному полі  $\mathbf{H}'_0$  у залежності від різних факторів.

У найпростішому випадку, тобто без врахування розмагнічуючого поля та процесів дисипації  $\beta = 0$ , розв'язки рівнянь (28) будуть мати такий вигляд:

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 = \text{const}, \\ \varphi = \varphi_0 = \phi_0 - \omega_0 t, \quad \phi_0 = \text{const}, \end{cases} \quad (35)$$

тобто динаміка вектора  $\mathbf{M}'$  зводиться до прецесії навколо вектора  $\mathbf{H}'_0$  з циклічною частотою  $\omega_0 = \gamma \mathbf{H}'_0$ , як і повинно бути.

Якщо врахувати розмагнічуюче поле при  $\beta = 0$ , то розв'язки рівнянь (28)

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 = \text{const}, \\ \varphi = \varphi_0 = \phi_0 - \omega_{\theta_0} t, \quad \phi_0 = \text{const}, \\ \omega_{\theta_0} = \omega_0(1 - \lambda \cos(\theta_0)) \end{cases} \quad (36)$$

набудуть нову якість, а саме частота прецесії  $\omega_0 \rightarrow \omega_{\theta_0}$  стає залежною від кута  $\theta_0$  між напрямками векторів  $\mathbf{H}'_0$  і  $\mathbf{M}'_0$ .

Процеси дисипації  $\beta \neq 0$  суттєво ускладнюють розв'язки системи рівнянь (28). Так, без впливу розмагнічуючого поля при  $\beta \neq 0$  вони будуть мати у своєму складі неявну функцію відносно динамічної змінної  $\theta$

$$\begin{cases} \text{tg} \left(\frac{\theta}{2}\right) = \text{tg} \left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{-\alpha\omega_0 t}, \quad \theta_0 = \text{const}, \\ \varphi = \varphi_0 = \phi_0 - \omega_0 t, \quad \phi_0 = \text{const}. \end{cases} \quad (37)$$

Формули (37) описують затухаючу прецесію з частотою  $\omega_0$  та параметром затухання  $\alpha\omega_0$ .

У найбільш загальному випадку магнітостатична динаміка намагніченості  $\mathbf{M}'$  буде описуватися розв'язками системи рівнянь (28)

$$\begin{cases} A(\theta) = A(\theta_0) e^{-\alpha\omega_0 t}, \\ \varphi = \varphi_0 = \phi_0 - \omega_0 \left(t - \lambda \int_0^t \cos(\theta(\tau)) d\tau\right), \end{cases} \quad (38)$$

отриманими при  $\mathbf{H}'_\omega = 0$ , де

$$A = \frac{\text{tg} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}}{\left(\text{tg} \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{\frac{\lambda}{1-\lambda^2}}}, \quad (39)$$

які виражаються через неявну функцію відносно динамічної змінної  $\theta$ . Очевидно, що при  $\lambda = 0$  формули (38) зводяться до формул (37).

Отримані розв'язки (38) системи рівнянь (28) при  $\mathbf{H}'_\omega = 0$  будуть точними. З (38) випливає, що розмагнічуюче поле та процеси дисипації суттєво впливають на характер прецесії вектора  $\mathbf{M}'$ . Так циклічна частота прецесії

$$\omega_{\theta_0} = \omega_0(1 - \lambda \cos(\theta)) \quad (40)$$

буде залежати від кута  $\theta$  між векторами  $\mathbf{M}'$  та  $\mathbf{H}'_0$ , який до того ж повільно змінюється з часом у проміжку  $0 < \theta < \theta_0$  за рахунок дисипативних процесів ( $0 < \beta \ll 1$ ).

Далі розглянемо вплив ГМП  $\mathbf{H}'_\omega$  (див. рис. 3) на динаміку вектора намагнічення псевдокристалла  $\mathbf{M}'$ . Оскільки ця задача є суттєво нелінійною, то точний розв'язок системи рівнянь (28) знайти не має можливості. Тому обмежимося їх розв'язком у лінійному наближенні.



Зазвичай у теорії феромагнітного резонансу при лінеаризації рівняння Ландау–Ліфшиця використовують метод Сміта–Сули [23, 25]. При його застосуванні в ролі опорного розв’язку для динамічних рівнянь задачі використовують умову рівноваги намагніченості, коли ефективне магнітне поле (27) дорівнює нулю. Але у даній роботі, внаслідок ефекту Енштейна–де Гази [1, 3], такий стан намагніченості неможливий. Намагніченість у даному випадку завжди буде перебувати у стані прецесії. Тому тут в ролі опорного розв’язку при лінеаризації системи рівнянь (28) буде потрібно вибрати їх стаціонарні розв’язки (36) або (38).

З огляду на характер збурень системи гармонічним магнітним полем  $\mathbf{H}'_\omega$  динамічні змінні задачі виберемо у такому вигляді:

$$\theta = \theta_0 + \delta\theta, \quad \varphi = \varphi_0 + \delta\varphi, \quad \delta\theta \ll 1, \quad \delta\varphi \ll 1, \quad (41)$$

де величини  $\theta_0 = \text{const}$ ,  $\varphi_0 = \phi_0 - \omega_{\theta_0}t$ , відповідають стаціонарному стану системи, який визначається розв’язками (36) системи рівнянь (28) без врахування процесів дисипації ( $\beta = 0$ ). Далі ми їх врахуємо [21, 22] стандартною редукцією частоти  $\omega_{\theta_0} \rightarrow \omega_{\theta_0} + i\alpha\omega_{z'}$ .

Використавши представлення (41) для динамічних змінних задачі у (32) та (28) знайдемо систему неоднорідних лінійних рівнянь для величин  $\delta\theta$ ,  $\delta\varphi$  у такому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{d\delta\theta}{dt} = \omega_1 \sin(\theta_1) \sin(\chi_1) e^{i\omega_{z'}t}, \\ \frac{d\delta\varphi}{dt} = \omega_1 (\text{ctg}(\theta_0) \sin(\theta_1) \cos(\chi_1) - \\ - \cos(\theta_1)) e^{i\omega_{z'}t}, \end{cases} \quad (42)$$

де  $\omega_1 = \gamma H_1$ ,  $\chi_1 = \varphi_0 - \varphi_1$ ,  $\varphi_0 = \phi_0 - \omega_{\theta_0}t$ .

Розв’язки системи рівнянь (42)

$$\begin{cases} \delta\theta = \frac{\omega_1 \omega_{cs}(\chi_1)}{\omega_{\theta_0}^2 - \omega_{z'}^2} \sin(\theta_1) e^{i\omega_{z'}t}, \\ \delta\varphi = - \left( \frac{\omega_1 \omega_{sn}(\chi_1)}{\omega_{\theta_0}^2 - \omega_{z'}^2} \text{ctg}(\theta_0) \sin(\theta_1) + \right. \\ \left. + \frac{\omega_1}{i\omega_{z'}} \cos(\theta_1) \right) e^{i\omega_{z'}t}, \end{cases} \quad (43)$$

де

$$\begin{aligned} \omega_{cs} &= \omega_{\theta_0} \cos(\chi_1) + i\omega_{z'} \sin(\chi_1), \\ \omega_{sn} &= \omega_{\theta_0} \sin(\chi_1) - i\omega_{z'} \cos(\chi_1), \end{aligned} \quad (44)$$

мають чітко виражений резонанс в околі частоти  $\omega_{\theta_0} = \omega_0(1 - \lambda \cos(\theta_0))$ , яка залежить від параметра  $\theta_0$ . Окрім того амплітуди коливань величин  $\delta\theta$  і  $\delta\varphi$  будуть функціями часу, оскільки величина  $\chi_1$  у (44) є періодичною функцією часу, що суттєво впливає на динаміку вектора  $\mathbf{M}'$ . Звернемо також увагу на те, що у випадку колінеарності векторів  $\mathbf{H}'_1$  і  $\mathbf{H}'_0$  ( $\theta_1 = [0, \pi]$ ) гармонічне магнітне поле  $\mathbf{H}'_\omega$  фактично не впливає на динаміку вектора  $\mathbf{M}'$ . У зв’язку з цим далі будемо розглядати випадки, коли  $\theta_1 = 90^\circ$ .

Для чисельного аналізу задачі перейдемо до безрозмірних змінних, а саме

$$\begin{aligned} \tau &= \omega_0 t, \quad \bar{\omega}_{\theta_0} = \frac{\omega_{\theta_0}}{\omega_0}, \quad \bar{\omega}_{z'} = \frac{\omega_{z'}}{\omega_0}, \quad \bar{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}, \\ \bar{\omega}_{cs} &= \frac{\omega_{cs}}{\omega_0}, \quad \bar{\omega}_{sn} = \frac{\omega_{sn}}{\omega_0}, \quad \varphi_0 = \phi_0 - \bar{\omega}_{\theta_0} \tau. \end{aligned} \quad (45)$$

Якщо у записі формул (43), (44) зробити заміни, згідно з (45), то вони збережуть свою форму і будуть представляти вирази для величин  $\delta\theta$ ,  $\delta\varphi$  у безрозмірних змінних (45).

Спочатку розглянемо вільну прецесію вектора відносної намагніченості  $\mathbf{J} = \frac{\mathbf{M}}{M_0}$  на основі формул (36) у безрозмірних змінних (45) для таких значень полярного кута:  $\theta_0 = [30^\circ, 60^\circ, 90^\circ]$  та параметра розмагнічування  $\lambda = 0,25$ . Графік прецесій за цих умов зображено на рис. 4. Відзначимо траєкторію руху вектора  $\mathbf{J}$  при  $\theta_0 = 90^\circ$  як опорну. Зокрема у цьому випадку розмагнічуюче поле на динаміку вектора  $\mathbf{J}$  не має ніякого впливу, а період прецесії і радіус орбіти дорівнюють  $\tau_{90^\circ} = 2\pi$ ,  $r_{90^\circ} = 2\pi$  відповідно. Відзначимо, що площини орбіт вектора  $\mathbf{J}$  тут паралельні площині  $O'X'Y'$ .

Що стосується періоду прецесії вектора  $\mathbf{J}$  за решти умов, то він буде визначатися формулою  $\tau_{\theta_0} = \frac{2\pi}{1 - \lambda \cos(\theta_0)}$ . Ця формула роз’яснює чому на рис. 4 зображені не завершені траєкторії руху векторів  $\mathbf{J}_{\theta_0}$  з періодом обертання  $\tau_{\theta_0} > \tau_{90^\circ}$  на проміжку часу  $0 \leq \tau \leq \tau_{90^\circ}$ .

Розглянемо вплив частоти ГМП  $\mathbf{H}'_\omega$  на прецесію вектора  $\mathbf{M}'$ . Відповідні графіки траєкторій руху вектора  $\mathbf{J}$  зображені на рис. 5, де  $\Delta\bar{\omega}$  – відхилення частоти  $\bar{\omega}$  від частоти резонансу. Кожна траєкторія розраховувалася у межах відповідного періоду обертання вектора  $\mathbf{J}$ .

Із графіків (5) впливає, що ГМП  $\mathbf{H}'_\omega$  суттєво впливає на динаміку вектора  $\mathbf{M}'$  тільки в околі частоти резонансу.

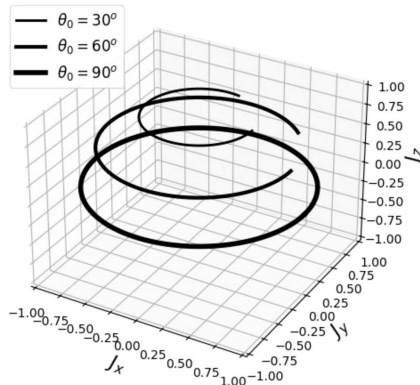


Рис. 4. Траєкторії руху вектора відносної намагніченості  $\mathbf{J}$  при певних значеннях полярного кута  $\theta_0$

Далі розглянемо залежність траєкторій руху вектора намагніченості  $\mathbf{M}'$  псевдокристалів від величини амплітуди  $\mathbf{H}'_1$  ГМП в умовах резонансу. Відповідні графіки для ряду значень величини  $\omega_1 = \gamma|\mathbf{H}'_1|$  наведено на рис. 6. При побудові графіків (рис. 6), як і раніше, кожна траєкторія розраховувалася у межах відповідного періоду обертання вектора  $\mathbf{J}$ . З графіків (рис. 6) видно, що характер траєкторій руху вектора  $\mathbf{M}'$  суттєво залежить від полярного кута  $\theta_0$  і амплітуди ГМП  $\mathbf{H}'_1$ , навіть при незначних змінах величини  $\omega_1 = \gamma H_1$ .

#### 4. Поглинання енергії гармонічного магнітного поля псевдокристалом

Для аналізу інтенсивності поглинання енергії ГМП  $\mathbf{H}'_\omega$  необхідно знайти тензор магнітної сприйнятливості  $\hat{\chi}$ , який визначається варіаційними похідними

$$\chi_{i'j'} = \frac{\delta M_{i'}}{\delta H_{\omega j'}}, \quad i', j' = x', y', z'. \quad (46)$$

Для конкретизації формули (46) спочатку перепишемо вирази (43) для  $\delta\theta$  і  $\delta\varphi$  через декартові компоненти вектора  $\mathbf{H}'_\omega$  таким чином:

$$\begin{cases} \delta\theta = \gamma \frac{\omega_{cs}(\varphi_0)H_{1x'} + \omega_{sn}(\varphi_0)H_{1y'}}{\omega_{\theta_0}^2 - \omega_{z'}^2} e^{i\omega t}, \\ \delta\varphi = -\gamma \left( \frac{\omega_{sn}(\varphi_0)H_{1x'} - \omega_{cs}(\varphi_0)H_{1y'}}{\omega_{\theta_0}^2 - \omega_{z'}^2} \times \right. \\ \left. \times \text{ctg}(\theta_0) + \frac{1}{i\omega_{z'}} H_{1z'} \right) e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (47)$$

Комбінація формул (23), (41), (46), (47) дозволяє знайти тензор магнітної сприйнятливості  $\hat{\chi}$  псевдокристалів у декартовій системі координат у такому вигляді:

$$\hat{\chi} = \begin{pmatrix} \tau_{cs}\omega_{\theta_0} & -i\tau_{cs}\omega_{z'} & \chi_{sn} \\ i\tau_{cs}\omega_{z'} & \tau_{cs}\omega_{\theta_0} & -\chi_{cs} \\ -\tau_{sn}\omega_{cs} & -\tau_{sn}\omega_{sn} & 0 \end{pmatrix}, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \tau_{cs} &= \frac{\gamma M_0 \cos(\theta_0)}{\omega_{\theta_0}^2 - \omega_{z'}^2}, & \chi_{sn} &= \frac{\gamma M_0 \sin(\varphi_0)}{i\omega_{z'}} \sin(\theta_0), \\ \tau_{sn} &= \frac{\gamma M_0 \sin(\theta_0)}{\omega_{\theta_0}^2 - \omega_{z'}^2}, & \chi_{cs} &= \frac{\gamma M_0 \cos(\varphi_0)}{i\omega_{z'}} \sin(\theta_0). \end{aligned}$$

Несподівано тензор  $\hat{\chi}$  отримав зовсім просту конструкцію.

Вираз (48) для тензора магнітної сприйнятливості псевдокристалів  $\hat{\chi}$  є остаточною формулою у даній роботі. Суттєво, що магнітна сприйнятливості  $\hat{\chi}$  має резонанс в околі частоти  $\omega_{\theta_0} = \omega_0(1 - \lambda \cos(\theta_0))$ , яка, у свою чергу, залежить від кута  $\theta_0$  між векторами  $\mathbf{H}'_0$  і  $\mathbf{M}'_0$ .

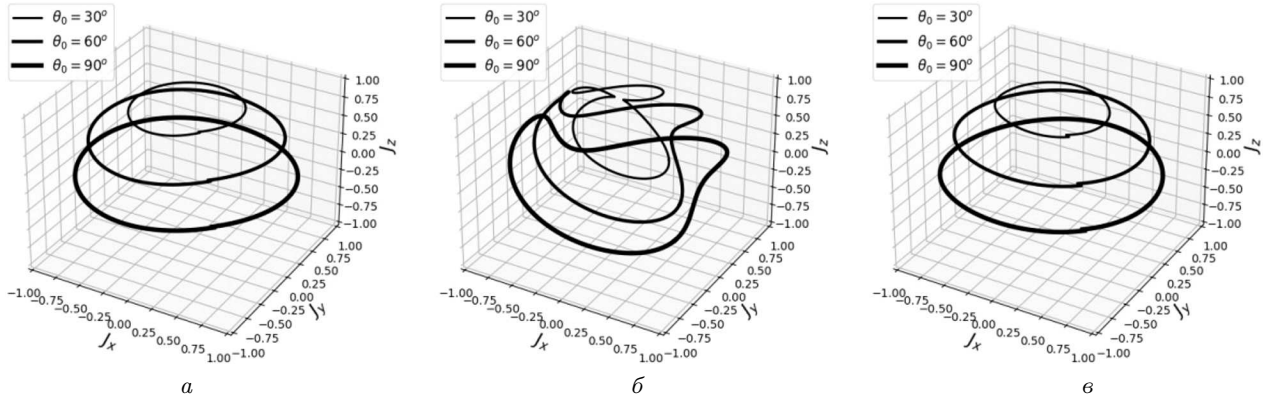
Звернемо увагу також на те, що компоненти  $\chi_{xx}$ ,  $\chi_{xy}$ ,  $\chi_{yx}$ ,  $\chi_{yy}$  тензора  $\hat{\chi}$  мають стандартну конструкцію, яка зустрічається у роботах з теорії фероманітного резонансу [21, 22]. В той самий час інші компоненти тензора мають суттєві відмінності.

Так, компоненти  $\chi_{zx}$  та  $\chi_{zy}$  тензора  $\hat{\chi}$  є періодичними функціями часу. Пояснюється це тим, що в основному стані намагніченість псевдокристалів внаслідок ефекту Ейнштейна-де Гааза знаходиться у стані прецесії. На рахунок компонент  $\chi_{zx}$  та  $\chi_{zy}$  слід віднести нетривіальну динаміку намагніченості псевдокристалів (див. рис. 5, 6), яка зумовлена ГМП  $\mathbf{H}'_\omega = (H_{1x'}, H_{1y'}, 0) \times \exp(i\omega t)$ .

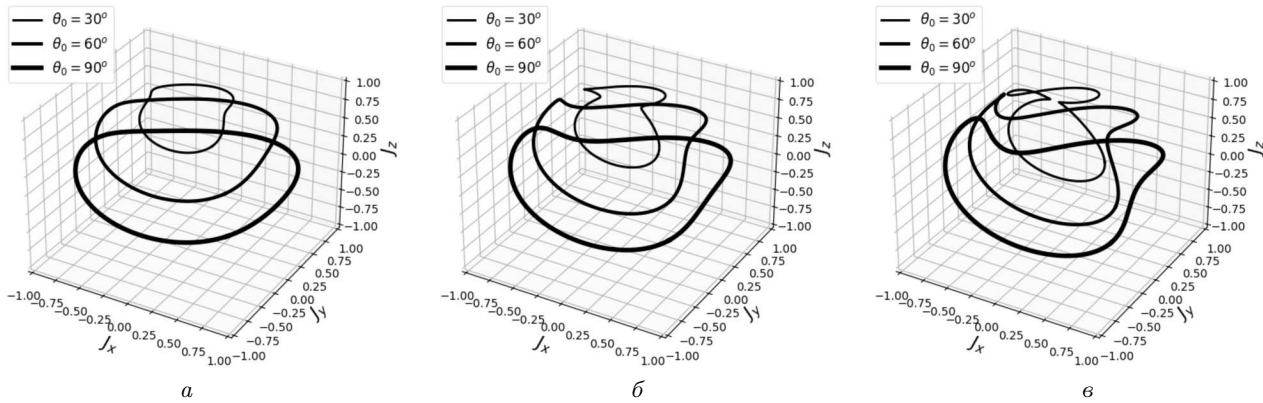
Щоб врахувати дисипативні процеси у псевдокристалі у компонентах тензора (48), згідно з [21, 22], необхідно виконати редукацію частоти  $\omega_{\theta_0} \rightarrow \omega_{\theta_0} + i\alpha\omega_{z'}$ . Інтенсивність поглинання енергії ГМП, згідно з [21, 22], визначається формулою

$$Q = \frac{\omega_{z'}}{8\pi} \text{Im} (\mathbf{H}'_{1\omega} * \hat{\chi} \mathbf{H}'_{1\omega}). \quad (49)$$

У даній роботі пріоритетною є така конфігурація ГМП  $\mathbf{H}'_\omega = (H_{1x'}, 0, 0) \exp(i\omega_{z'} t)$ . У цьому випадку



**Рис. 5.** Траєкторії руху вектора відносної намагніченості  $\mathbf{J}$  для  $\bar{\Delta}\omega = -0,1$  (а),  $0$  (б),  $0,1$  (в),  $\bar{\omega}_1 = 0,0075$ . При побудові графіків вибиралися такі значення параметрів:  $\lambda = 0,25$ ,  $\alpha = 0,01$ ,  $\phi_0 = 0$ ,  $\varphi_1 = 45^\circ$ , які задовольняють умови (41)



**Рис. 6.** Траєкторії руху вектора відносної намагніченості  $\mathbf{J}$  для  $\bar{\omega}_1 = 0,0025$  (а),  $0,005$  (б),  $0,0075$  (в) в умовах резонансу  $\bar{\Delta}\omega = 0$ . При побудові графіків вибиралися такі значення параметрів:  $\lambda = 0,25$ ,  $\alpha = 0,01$ ,  $\phi_0 = 0$ ,  $\varphi_1 = 45^\circ$ , які задовольняють умови (41)

формула (49) набуває простого вигляду

$$\begin{cases} Q = \frac{\omega_{z'}}{8\pi} \left( \gamma M_0 \frac{\alpha \omega_{z'} \Delta_+}{\Delta_-^2 + \Delta_0^2} \cos(\theta_0) \right) H_1^2, \\ \Delta_{\pm} = \omega_{\theta_0}^2 \pm (1 + \alpha^2) \omega_{z'}^2, \\ \Delta_0 = 2\alpha \omega_{z'} \omega_{\theta_0}. \end{cases} \quad (50)$$

На рис. 7 наведені графіки залежностей фактора  $F = F(\theta_0, \omega)$  інтенсивності поглинання енергії ГМП  $\mathbf{H}_{1\omega}$  від головних параметрів задачі, який визначається таким чином:

$$F = 8\pi \frac{Q(\omega, \theta_0)}{\gamma M_0 H_1^2}. \quad (51)$$

Резонансна частота, на якій відбувається інтенсивне поглинання енергії ГМП  $\mathbf{H}_{1\omega}$  визначається з

умови екстремуму функції  $F = F(\theta_0, \omega)$  і має такий вигляд:

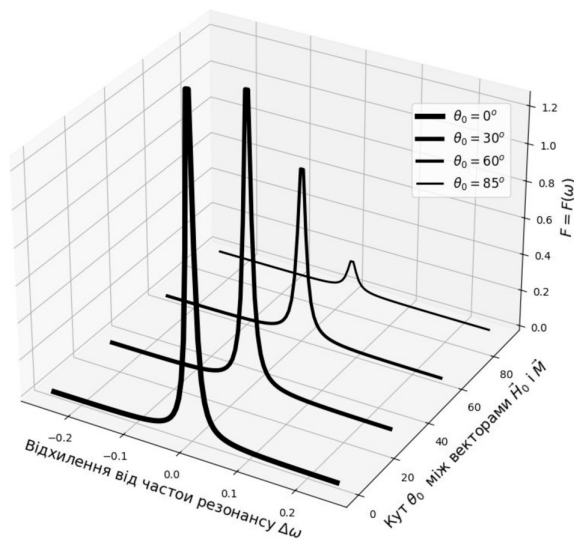
$$\omega_{\text{res}} = \omega_{\theta_0} \sqrt{\frac{2(1 + \alpha^2)^{1/2}}{3 + \alpha^2(2 - \alpha^2)} + \frac{1}{3 - \alpha^2}}. \quad (52)$$

Із виразу (52) зрозуміло, що параметр згасання  $\alpha \ll 1$  слабо впливає на величину  $\omega_{\text{res}} \simeq \omega_{\theta_0}$ .

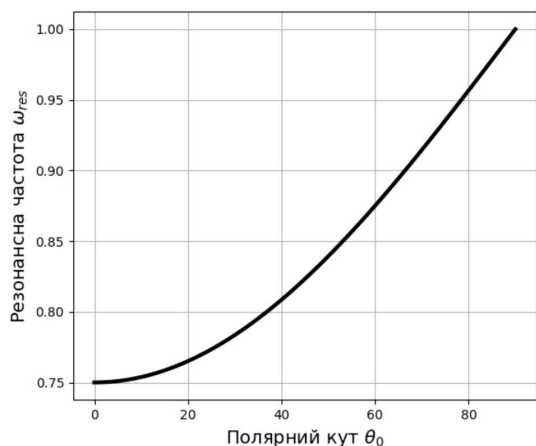
Залежність резонансної частоти  $\bar{\omega}_{\text{res}}$  від полярного кута  $\theta_0$  наведена на рис. 8

Із рис. 7, 8 видно, що з ростом полярного кута  $\theta_0$  резонансна частота  $\omega_{\text{res}}$  зростає, а інтенсивність поглинання енергії ГМП  $\mathbf{H}_{1\omega}$  спадає.

Таким чином встановлена залежність амплітудно-частотної характеристики інтенсивності поглинання енергії ГМП  $\mathbf{H}_{1\omega}$  псевдокристалом від його орієнтації у просторі (зміни орієнтації вектора  $\mathbf{H}'_0$



**Рис. 7.** Залежності форм-фактора  $F = F(\theta_0, \omega)$  інтенсивності поглинання енергії ГМП  $\mathbf{H}_{1\omega}$  від головних параметрів задачі, які були розраховані з  $\lambda = 0,25$ ,  $\alpha = 0,01$



**Рис. 8.** Залежність циклічної частоти  $\bar{\omega}_{\theta_0}$  від полярного кута  $\theta_0$  з  $\lambda = 0,25$ ,  $\alpha = 0,01$

при незмінній орієнтації вектор  $\mathbf{M}'_0$  (див. рис. 3)) може бути покладена в основу розробки феромагнітного гіроскопа.

### Висновки

Показано, що ФКТ, інкапсульована у наноконтейнері з характеристичним розміром, який у кілька десятків разів більший за характеристичний розмір ФКТ, може використовуватися як чутливий елемент феромагнітного гіроскопа.

Сам феромагнітний гіроскоп формується як тривимірний, періодичний, шаруватий структура

(штучний шаруватий кристал (псевдокристал)) з чутливих елементів (див. рис. 1, 3), жорстко закріплена на рухомій платформі, яка перебуває у зовнішньому двокомпонентному магнітному полі  $\mathbf{H} = (H_\omega, 0, H_0)$ . Статичний вектор напруженості магнітного поля  $\mathbf{H}_0$  вибирається строго перпендикулярним до основи псевдокристала, а динамічний вектор  $\mathbf{H}_\omega = \mathbf{H}_1 \cos(\omega_z t)$  до його бічної грані.

Перед використанням феромагнітного гіроскопа монодоменні магнітні моменти ФКТ  $\mathbf{m}$  необхідно зорієнтувати вздовж вектора  $\mathbf{H}_0$  зовнішнім магнітним імпульсом.

Через закон збереження моменту імпульсу  $\mathbf{L} = \text{const}$ , феромагнітний гіроскоп зберігатиме фіксовані напрямки намагніченості  $\mathbf{M}_0$ , незалежно від зміни напрямку вектора  $\mathbf{H}_0$  перпендикулярного до рухомої платформи. При цьому зміна взаємної орієнтації векторів  $\mathbf{M}_0$  і  $\mathbf{H}_0$  буде супроводжуватися зміною амплітудно-частотної характеристики інтенсивності поглинання енергії ГМП. Її спектральний аналіз дасть змогу судити про зміни в орієнтації рухомої платформи і формувати потрібні керуючі сигнали.

Відзначимо, що формально структура спектра поглинання ФКТ енергії ГМП подібна до такої, що зустрічається у дослідженнях феромагнітного резонансу. Це дозволить використати досвід радіоспектроскопії у розробці феромагнітних гіроскопів з нанорозмірними чутливими елементами.

Суттєво, що у запропонованій моделі феромагнітного гіроскопа відсутні будь-які механічні компоненти. Така особливість моделі зможе підвищити надійність конструкції і довести чутливість феромагнітних гіроскопів до рівня, досягнутого у радіоспектроскопії.

Кількість чутливих елементів феромагнітного гіроскопа визначається вимогами до інтенсивності поглинання енергії ГМП ФКТ, яка, у свою чергу, залежить від чутливості радіоспектрометра, який використовується для спектрального аналізу.

### ДОДАТОК:

#### Механізм квантової левітації феромагнітної квантової точки

ФКТ є квазикласичним об'єктом, який зберігає квантові властивості. Тому динаміку ФКТ у наноконтейнері допустимо розглядати методами квантової механіки. Оскільки об'єм ФКТ значно менший за об'єм наноконтейнера і ФКТ

не може вийти за межі наноконтейнера, тому далі розглянемо ФКТ в рамках моделі матеріальної точки, що знаходиться у глибокій потенціальній ямі з радіусом  $r_0$

$$W = \begin{cases} \infty & \text{при } r > r_0, \\ 0 & \text{при } r \leq r_0, \end{cases} \quad (53)$$

де  $r$  – радіальна координата ФКТ у наноконтейнері.

Потенціальній енергії (53) у межах наноконтейнера відповідає радіальне стаціонарне рівняння Шредінгера  $\hat{H}R(r) = ER(r)$  доповнене граничною умовою  $R(r \geq r_0) = 0$ , яке конкретизується у такому вигляді [20]:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left( k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = 0, \quad (54)$$

де  $k^2 = \frac{2m_0 E}{\hbar^2}$ ,  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  – орбітальне квантове число,  $E$  – енергія ФКТ,  $R = R(r)$  – радіальна частина її хвильової функції, яка задовольняє умову нормування

$$\int_0^\infty R(r)^2 r^2 dr = 1. \quad (55)$$

Заміною змінної  $\rho = kr$  рівняння (55) зводиться до вигляду рівняння Бесселя:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( 1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) R = 0, \quad R = R(\rho). \quad (56)$$

З двох розв'язків рівняння (56) забезпечує скінченність хвильової функції при  $\rho \leq 0$  сферична функція Бесселя [26]

$$R = C_j j_l(\rho), \quad j_l = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{l+1/2}(\rho), \quad (57)$$

де  $C_j$  – сталі інтегрування, значення яких визначаються з умов нормування,  $J_{l+1/2}$  – функція Бесселя напівцілого порядку.

Нормовані радіальні хвильові функції ФКТ матимуть такий вигляд:

$$R_l = 2kj_l(kr) = \sqrt{\frac{2\pi k}{r}} J_{l+1/2}(kr). \quad (58)$$

Згідно з властивостями функції  $j_l = j_l(kr)$  [26] у центрі наноконтейнера хвильова функція ФКТ апроксимується виразом

$$R_l \approx \frac{2k^{l+1}}{(2l+1)!!} r^l. \quad (59)$$

При  $kr \geq 0$  хвильова функція дорівнює нулю, оскільки ФКТ не може перебувати за межами наноконтейнера. З умови неперервності хвильової функції при  $kr = r_0$  знаходимо умову квантування енергії ФКТ у наноконтейнері:

$$j_l(kr_0) = 0. \quad (60)$$

Якщо позначити корені сферичної функції Бесселя через  $x_{nl}$ , де  $n = 1, 2, 3, \dots$  – головне квантове число, то з (60) отримуємо дискретні значення для енергії ФКТ:

$$k \rightarrow k_{nl} = \frac{x_{nl}}{r_0}, \quad E_{nl} = \frac{\hbar^2 x_{nl}^2}{2m_0 r_0^2}. \quad (61)$$

У даному випадку, з усієї множини квантових станів ФКТ у наноконтейнері, нас цікавить її основний стан, якому відповідають квантові числа  $n = 1, l = 0$  і корінь сферичної функції Бесселя  $x_{10} = 6,283$ . Отже, у основному стані ФКТ буде наділена кінечним значенням енергії

$$E_{10} = \frac{\hbar^2}{2m_0 r_0^2} 6,283^2 \neq 0, \quad (62)$$

а її хвильова функція (58) матиме максимум у центрі наноконтейнера, монотонно зменшуючись до нуля у напрямку до його межі. Це означає, що найімовірніше ФКТ буде перебувати у центрі наноконтейнера, тобто ФКТ перебуватиме у стані квантової левітації (у безконтактному стані з будь-якими елементами зовнішнього середовища).

ФКТ, що складається з атомів заліза і має характеристичний розмір  $R = 1$  нм, будучи розміщеною у контейнері з характеристичним розміром  $r_0 = 10$  нм, в основному стані буде мати таке значення енергії:

$$E_{10} = \hbar\omega_{10}, \quad \omega_{10} = 3 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{с}}. \quad (63)$$

Оскільки дана робота має якісно-схематичний характер, то отримані в цьому додатку результати будуть цілком задовільними.

1. O.W. Richardson. A mechanical effect accompanying magnetization. *Phys. Rev. Ser. I* **26** (3), 248 (1908).
2. A. Einstein, de Haas. Experimenteller Nachweis der Ampere'schen Molekularstrome [Experimental proof of Ampere's molecular currents]. *Deutsche Physikalische Gesellschaft, Verhandlungen (German)* **17**, 152 (1915).
3. A. Einstein, W.J. de Haas. Experimental proof of the existence of Ampere's molecular currents. *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, **18**, 696 (1915).
4. Л.А. Левин. О возможности создания криогенного ферромагнитного гироскопа. *ЖТФ* **66** (4), 192 (1996).
5. P. Fadeev, Chris Timberlake, Tao Wang, A. Vinante, Y.B. Band, D. Budker, A.O. Sushkov, Hendrik Ulbricht, D.F. Jackson Kimba. Ferromagnetic gyroscopes for tests of fundamental physics. *arXiv:2010.08731v1 [quant-ph]*.
6. S.J. Barnett. On magnetization by angular acceleration. *Science*, **30** (769), 413 (1908).
7. S.J. Barnett. Magnetization by Rotation. *Phys. Rev.* **6** (4), 239 (1915).
8. S.J. Barnett. Gyromagnetic and electron-inertia effects *Rev. Modern. Phys.* **7**, 129 (1935).
9. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред* (Наука, 2005).
10. С.В.Вонсовский. *Магнетизм. Магнитные свойства диа-, пара-, феро-, антиферо и феромагнетиков* (Наука, 1971).
11. С.П. Губин, Ю.А. Кокшаров, Г.Б. Хомутов, Г.Ю. Юрков. Магнитные наночастицы: методы получения, строения и свойства. *Успехи химии* **74**, 6 (2005).
12. С.В. Терехов, В.Н. Варюхин. *Физика нанообъектов* (ДонНУ, 2013).
13. Ю.М. Поплавко, О.В. Борисов, І.П. Голубева, Ю.В. Діденко. *Магнетика у електроніці* (КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021).

14. О.І. Товстолигін, М.О. Боровий, В.В. Курилюк, Ю.А. Куницький. *Фізичні основи спітроніки* (ТОВ “Нілан-ЛТД”, 2014).
15. С.А. Сокольский. Влияние межчастичного взаимодействия в ансамбле неподвижных суперпарамагнитных феррочастиц на статистические, магнитные и термодинамические свойства системы. *Вычислительная механика сплошных сред* **14** (3), 264 (2021).
16. C. Zhang, H. Yuan, Z. Tang, W. Quan, J.C. Fang. Inertial rotation measurement with atomic spins: From angular momentum conservation to quantum phase theory. *Appl. Phys. Rev.* **3**, 041305 (2016).
17. J. Gieseler, A. Kabcenell, E. Rosenfeld, J.D. Schaefer, A. Sara, M.J.A. Schuetz, C. Gonzalez-Ballester, C.C. Rusconi, O. Romero-Isart, M.D. Lukin. Single-spin magnetomechanics with levitated micromagnets. *Phys. Rev. Lett.* **124**, 163604 (2020).
18. A. Vinante, P. Falferi, G. Gasbarri, A. Setter, C. Timberlake, H. Ulbricht. Ultralow mechanical damping with meissner-levitated ferromagnetic microparticles. *Phys. Rev. Appl.* **13**, 064027 (2020).
19. P. Huillery, T. Delord, L. Nicolas, M. Van Den Bossche, M. Perdriat, G. Hetet. Spin mechanics with levitating ferromagnetic particles. *Phys. Rev. B* **101**, 134415 (2020).
20. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика. Квантовая механика (нерелятивистская теория)*. 4-е изд., испр. (Наука, 1989).
21. А.Г. Гуревич. *Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. Монография* (Наука, 1973).
22. В.Г. Шавров, В.И. Щеглов. *Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода, Монография* (Наука, 2018) [ISBN: 978-5-9221-1806-4].
23. J. Smit, H.P.J. Wijn. Adv. in. Electr., VI, Acad.Press, N.Y., 1954; Smit J., Belfers H.G. Ferromagnetic resonance absorption in, BaF 12019'a highly anisotropic crystal. *Philips Res. Rep.* **10**, 2, 113 (1955).
24. H. Suhl. Ferromagnetic resonance in nickel ferrite between one and two kilomegacycles. *Phys. Rev.* **97** (2), 555 (1955).
25. Г.В. Скроцкий, Т.В. Курбатов. *Феноменологическая теория ферромагнитного резонанса ферромагнитный резонанс. Явление резонансного поглощения высокочастотного магнитного поля в ферромагнитных веществах*. Под ред. С.В. Вонсовского (Наука, 1961).
26. Ж. Кампе де Ферье, Р. Кемпбелл, Г. Петью, Т. Фогель. *Функции математической физики: Справочное руководство*. Перевод с французского Н.Я. Виленкина (Физматгиз, 1963).

Одержано 10.02.24

N.M. Chepilko, S.A. Ponomarenko

#### PHYSICAL PRINCIPLES OF A FERROMAGNETIC GYROSCOPE WITH NANOSCALE SENSITIVE ELEMENTS

Physical principles of applying modern nanotechnologies to develop nano-sized and energy-efficient sensitive elements for control systems in small satellites have been considered. Of practical interest is the creation of a ferromagnetic gyroscope. As its model, a periodic structure (a pseudocrystal) of coherent monodomain ferromagnetic quantum dots (FQDs) localized in spherical nanocontainers, where they are expected to dwell in the quantum levitation state, is proposed. Owing to the Einstein–de Haas effect, those FQDs would retain their angular momentum over time. To control the pseudocrystal orientation in space, the pseudocrystal is mounted on a movable platform located in an external two-component magnetic field (MF). The static component of the MF is perpendicular to the pseudocrystal base, and the dynamic component is perpendicular to the pseudocrystal lateral side. By analyzing the absorption spectrum of the dynamic MF and its dependence on the pseudocrystal orientation in space, it is possible to calculate the angular coordinates of the new pseudocrystal position, which are determined by the relative orientations of the fixed direction of the FQD's angular momentum and the vector of the external static MF.

*Keywords:* nanophysics, nanoparticle, ferromagnetic quantum dot, levitation, gyroscope, spin, magneton, angular momentum.