С. МІНЕМІ[1, 2]

[1] Кафедра математики та інформатики, Університет Кальярі
(Вул. Оспедале 72, 09124 Кальярі, Італія; e-mail: smignemi@unica.it)
[2] INFN, Відділення Кальярі
(Університетська Цитадель,09042 Монсеррато, Італія)

УДК 539

ПЕРЕГЛЯД МОДЕЛІ ЯНГА[1]

Дуже давно С.Н. Янг запропонував узагальнення моделі Снайдера на випадок викривленого фонового простору-часу на основі алгебри, ізоморфної $o(1,5)$, яка включає в себе, як підалгебри, і алгебру Снайдера, і алгебру де Сіттера. Тому його пропозицію можна сприймати як модель некомутативного викривленого простору-часу, і вона може бути корисною для того, щоб пов'язати фізику дуже малих і дуже великих масштабів. Ми розглядаємо цю модель і деякі останні досягнення, які стосуються її узагальнень та її інтерпретації в рамках алгебр Хопфа. Ми також обговорюємо деякі можливості пов'язати її з більш феноменологічними аспектами.

Ключові слова: некомутативна геометрія, простір-час де Сіттера, модель Янга.

1. Квантова ґравітація і некомутативна геометрія

На даний момент повної теорії квантової ґравітації немає. Однак відомо, що квантова механіка і загальна теорія відносності передбачають існування мінімальної вимірюваної довжини — довжини Планка порядка $L_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-33}$ cm [1]. Тому природно вважати, що властивості простору-часу в цьому масштабі повинні бути досить відмінними від тих, які ми спостерігаємо в повсякденному житті.

Серед претендентів на моделі простору-часу в планківських масштабах відповідну роль відіграє некомутативна геометрія [3]. Некомутативна геометрія базується на припущенні, що компоненти оператора координати не комутують, що призводить до неможливості точно локалізувати частинку. Серед різних підходів у цій області актуальним є формалізм алгебри Хопфа [4], який підходить для опису симетрій геометрії.

Некомутативні геометрії зазвичай визначаються на плоскому просторі-часі, але їх розширення на викривлений простір–час нещодавно викликало певний інтерес через можливі наслідки для астрофізичних спостережень, таких як затримка фотонів із віддалених джерел [7]. Однак також варті уваги формальні аспекти цього розширення, зокрема співвідношення між кривиною простору-часу та імпульсного простору. Крім того, ці моделі пов'язують властивості простору-часу в мікроскопічному та макроскопічному масштабах.

Перша модель такого типу була запропонована С.Н. Янгом уже в 1947 році [8]. В даній роботі ми робимо огляд цього підходу і обговорюємо деякі останні досягнення та узагальнення.

2. Алгебра Снайдера

Ми починаємо з опису основних особливостей моделі Снайдера, з якої Янг черпав своє натхнення. У 1947 році Снайдер запропонував першу модель некомутативної геометрії [9]. Його метою було побудувати теорію, яка включала б фундаментальну довжину без порушення інваріантності Лоренца. Ця мета була досягнута шляхом деформації комутаційних співвідношень алгебри Гайзенберґа.

Насправді модель була визначена через алгебру, яка, крім деформованої алгебри Гайзенберґа, породженої координатами $\hat{x}_\mu$ та імпульсами $\hat{p}_\mu$, мі-

Цитування: Мінемі С. Перегляд моделі Янга. *Укр. фіз. журн.* **69**, №7, 493 (2024).
Citation: Mignemi S. Yang model revisited. *Ukr. J. Phys.* **69**, No. 7, 492 (2024). https://doi.org/10.15407/ujpe69.7.492.

[1] Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції "XII Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-2024): Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics".

стила алгебру Лоренца з генераторами $J_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}
&[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\beta J_{\mu\nu}, \quad [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0, \\
&[\hat{x}_\mu, \hat{p}_\mu] = i(\eta_{\mu\nu} + \beta\hat{p}_\mu\hat{p}_\nu), \\
&[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + \\
&+ \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}), \\
&[J_{\mu\nu}, \hat{p}_\lambda] = i\,(\eta_{\mu\lambda}\hat{p}_\nu - \eta_{\lambda\nu}\hat{p}_\mu), \\
&[J_{\mu\nu}, \hat{x}_\lambda] = i\,(\eta_{\mu\lambda}\hat{x}_\nu - \eta_{\nu\lambda}\hat{x}_\mu).
\end{aligned} \tag{1}$$

Зокрема, компоненти оператора координати $\hat{x}_\mu$ не комутують між собою. Константа зв'язку β має розмірність оберненого квадрата маси і може бути ототожнена з $1/M_P^2 = L_P^2$, де M_P є масою Планка. Зверніть увагу на те, що β може бути будь-якого знаку. Якщо воно додатне, то з обмеження $p^2 < 1/\beta$ випливає передбачення максимальної маси $1/\sqrt{\beta}$.

Снайдер також показав, що його алгебра може бути реалізована на канонічному фазовому просторі змінних x і p, з генераторами Лоренца, визначеними як $J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$.

На відміну від більшості поширених моделей некомутативної геометрії, в даному випадку комутатори не є лінійними у змінних фазового простору: це дозволяє їм бути сумісними з лінійною дією симетрії Лоренца, так що алгебра Пуанкаре не деформується. Однак трансляції (згенеровані $\hat{p}_\mu$) діють нелінійним чином на змінні положення.

Модель Снайдера можна інтерпретувати як опис в рамках плоского простору-часу з викривленим простором імпульсу. Насправді підалгебра, породжена $J_{\mu\nu}$ і $\hat{x}_\mu$, ізоморфна алгебрі де Сіттера $o(1,4)$, а отже імпульсний простір Снайдера має ту саму геометрію, що й простір-час де Сіттера.

3. Алгебра Янга

Невдовзі після публікації статті Снайдера, Янг запропонував узагальнення, де також змінні імпульсу не комутують, як у випадку простору-часу де Сіттера [8].

Алгебра ізоморфна $o(1,5)$ з 15 генераторами,

$$\begin{aligned}
&[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\beta J_{\mu\nu}, \quad [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\alpha J_{\mu\nu}, \\
&[\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\eta_{\mu\nu}K, \\
&[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + \\
&+ \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}), \\
&[J_{\mu\nu}, \hat{p}_\lambda] = i(\eta_{\mu\lambda}\hat{p}_\nu - \eta_{\lambda\nu}\hat{p}_\mu), \\
&[J_{\mu\nu}, \hat{x}_\lambda] = i(\eta_{\mu\lambda}\hat{x}_\nu - \eta_{\nu\lambda}\hat{x}_\mu), \quad [J_{\mu\nu}, K] = 0, \\
&[K, \hat{x}_\mu] = i\beta\hat{p}_\mu, \quad [K, \hat{p}_\mu] = -i\alpha\hat{x}_\mu.
\end{aligned} \tag{2}$$

Параметр деформації α має розмірність оберненого квадрата довжини і може бути ототожнений з космологічною сталою, тоді як параметр β такий самий, як і в моделі Снайдера. Зауважте, що як α, так і β можуть приймати позитивні або негативні значення, що породжує моделі з дуже різними фізичними властивостями [10]. Наприклад, додатний параметр α забезпечує обмеження $\hat{x}^2 < 1/\alpha^2$, і аналогічно, для додатного β маємо $\hat{p}^2 < 1/\beta^2$.

Алгебра Янга містить у формі підалгебр як алгебру де Сіттера, так і алгебру Снайдера, і тому описує некомутативну модель у просторі-часі постійної кривини. Щоб замкнути алгебру, Янгу довелося ввести новий генератор K, який обертає просторові координати в імпульси, але фізична інтерпретація цього генератора неочевидна.

Алгебра (2) є інваріантною відносно узагальненої дуальності Борна [11, 12],

$$\begin{aligned}
&\alpha \leftrightarrow \beta, \quad \hat{x}_\mu \to -\hat{p}_\mu, \quad \hat{p}_\mu \to \hat{x}_\mu, \\
&J_{\mu\nu} \leftrightarrow J_{\mu\nu}, \quad K \leftrightarrow K.
\end{aligned} \tag{3}$$

Ізоморфізм з алгеброю $o(1,5)$ можна встановити шляхом ототожнення

$$M_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}, \quad M_{\mu 4} = \hat{x}_\mu, \quad M_{\mu 5} = \hat{p}_\mu, \quad M_{45} = K, \tag{4}$$

де M_{AB} $(A, B = 0, ..., 5)$ є генераторами $o(1,5)$.

Існує також інше узагальнення алгебри Снайдера на викривлений простір, відоме як потрійна спеціальна теорія відносності (TSR), яке не включає K, але є нелінійним [13].

Зокрема, у цьому випадку деформована підалгебра Гайзенберґа набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\beta J_{\mu\nu}, \quad [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\alpha J_{\mu\nu}, \\
&[\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\Big(\eta_{\mu\nu} + \alpha\hat{x}_\mu\hat{x}_\nu + \beta\hat{p}_\mu\hat{p}_\nu + \\
&+\sqrt{\alpha\beta}(\hat{x}_\mu\hat{p}_\nu + \hat{p}_\mu\hat{x}_\nu - J_{\mu\nu})\Big),
\end{aligned} \tag{5}$$

і можна інтерпретувати фазовий простір як суміжний простір $SO(1,5)/SO(1,3) \times O(2)$.

Потрійну спеціальну теорію відносності було описано як деформацію групи Галілея в [14], а її гамільтонове формулювання було досліджено в [16]. Підхід, який об'єднує її з моделлю Янга, було запропоновано в [18].

Можливі дві інтерпретації алгебри Янга:

• Беремо алгебру як вона є, з її 15 генераторами [19, 20]. Це дозволяє побудувати структуру алгебри Хопфа з відповідним зірковим добутком, крученням тощо, використовуючи результати, відомі

 ISSN 0372-400X. Укр. фіз. журн. 2024. Т. 69, № 7

для загальних ортогональних алгебр [21]. Однак у цьому випадку необхідно розглядати розширений фазовий простір зі скалярними і тензорними ступенями вільності, інтерпретація яких неочевидна.

• Візьмемо нелінійну реалізацію в канонічному фазовому просторі змінних x_μ і p_μ, з $J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\nu$ і $K = K(x,p)$ [22], за аналогією з представленням, запропонованим Снайдером в його моделі [9]. У цьому випадку інтерпретація легша, і можна включити модель Янга в те саме сімейство нелінійних реалізацій $o(1,5)$, що й TSR, ототожнюючи фазовий простір із суміжним простором. Однак більше не можна визначити алгебру Хопфа, зіркові добутки тощо.

4. Реалізації моделі Янга–Пуассона

Ми починаємо йти по другому шляху і обговорювати класичну границю моделі Янга, у якій комутатори замінені дужками Пуассона. Це значно полегшує дослідження через відсутність проблем впорядкування. Ми називаємо цю границю моделлю Янга–Пуассона.

Ми маємо [24]

$$\begin{aligned}
&\{\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu\} = \beta J_{\mu\nu}, \quad \{\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu\} = \alpha J_{\mu\nu},\\
&\{\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu\} = \eta_{\mu\nu} K,\\
&\{K, \hat{x}_\mu\} = \beta \hat{p}_\mu, \quad \{K, \hat{p}_\mu\} = -\alpha \hat{x}_\mu,
\end{aligned} \tag{6}$$

і шукаємо вираз для $K(x,p)$, який задовольняє дужки Пуассона

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_\mu = f(p^2, z)\, x_\mu, \quad \hat{p}_\mu = g(x^2, z)\, p_\mu,\\
&K = K(x^2, p^2, z),
\end{aligned} \tag{7}$$

де $z = xp$, а f і g – функції, які потрібно визначити.

Єдиними нетривіальними дужками, які потрібно перевірити, є дужки деформованої алгебри Гайзенберґа, які породжують рівняння в частинних похідних. Рівняння, отримані з дужок x–x і p–p, мають розв'язки

$$f = \sqrt{1 - \beta p^2 + \phi_1(z)}, \quad g = \sqrt{1 - \alpha x^2 + \phi_2(z)}, \tag{8}$$

з довільними функціями ϕ_1 і ϕ_2, а дужки x–p дають

$$\phi_1\phi_2 + \phi_1 + \phi_2 = \alpha\beta z^2, \quad K = fg, \tag{9}$$

із розв'язком, що залежить від одного параметра c,

$$\begin{aligned}
&\phi_1(z) = \frac{\sqrt{1 + 4c(1-c)z^2} - 1}{2(1-c)},\\
&\phi_2(z) = \frac{\sqrt{1 + 4c(1-c)z^2} - 1}{2c}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_\mu = \sqrt{1 - \beta p^2 + \phi_1(z)}\; x_\mu,\\
&\hat{p}_\mu = \sqrt{1 - \alpha x^2 + \phi_2(z)}\; p_\mu,
\end{aligned} \tag{11}$$

$$K = \sqrt{[1 - \beta p^2 + \phi_1(z)][1 - \alpha x^2 + \phi_2(z)]}. \tag{12}$$

Особливо цікавий розв'язок виходить, якщо припустити симетрію при заміні x і p, що є природним з огляду на дуальність Борна для даної моделі. У цьому випадку $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, тобто $c = \frac{1}{2}$, і отримуємо

$$\phi = \sqrt{1 + \alpha\beta z^2} - 1, \tag{13}$$

і тоді

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_\mu = \sqrt{\sqrt{1 + \alpha\beta z^2} - \beta p^2}\; x_\mu,\\
&\hat{p}_\mu = \sqrt{\sqrt{1 + \alpha\beta z^2} - \alpha x^2}\; p_\mu.
\end{aligned} \tag{14}$$

Це дає точну реалізацію моделі Янга–Пуассона, симетричну відносно $x \leftrightarrow p$ і $\alpha \leftrightarrow \beta$. Можна також записати K через початкові змінні,

$$K = \sqrt{\frac{1 - \alpha\hat{x}^2 - \beta\hat{p}^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4\alpha\beta\frac{\hat{x}^2\hat{p}^2 - (\hat{x}\cdot\hat{p})^2}{(1 - \alpha\hat{x}^2 - \beta\hat{p}^2)^2}}\right)}. \tag{15}$$

Можна знайти також більш загальні реалізації [24, 25].

5. Реалізації квантової моделі Янга

У квантовому випадку знайти реалізацію складніше, і загальна форма у замкненому вигляді невідома. Тому доводиться вдаватися до обчислення параметрів зв'язку α і β за теорією збурень.

Обчислення до четвертого порядку за теорією збурень вперше було виконано в [22]. Більш розвинуті методи були використані в [20], де також досліджувалися представлення в розширеному фазовому просторі.

Реалізації можна знаходити порядок за порядком, формулюючи анзац, який включає найзагальніші лоренц-коваріантні члени. Наприклад, у першому порядку відносно α і β можна знайти ермітову реалізацію

$$\begin{aligned}&\hat{x}_\mu = x_\mu + \big(a_1\sqrt{\alpha\beta}x_\mu\, x\cdot p + a_2\beta x_\mu p^2 +\\&+ a_3\beta p_\mu\, p\cdot x + a_4\sqrt{\alpha\beta}p_\mu x^2 + \text{h.c.}\big),\\&\hat{p}_\mu = p_\mu + \big(b_1\sqrt{\alpha\beta}p_\mu\, p\cdot x + b_2\alpha p_\mu x^2 +\\&+ b_3\alpha x_\mu\, x\cdot p + b_4\sqrt{\alpha\beta}x_\mu p^2 + \text{h.c.}\big),\\&K = 1 + \big(h_1\alpha x^2 + h_2\sqrt{\alpha\beta}\, x\cdot p + h_3\beta p^2 + \text{h.c.}\big),\end{aligned}\tag{16}$$

і, підставляючи в (1), отримати зв'язки між вільними параметрами.

Примітно, що найпростіший розв'язок для цих зв'язків, симетричний відносно $\hat{x}$ і $\hat{p}$, дається у другому порядку [22]

$$\begin{aligned}&\hat{x}_\mu = x_\mu - \frac{\beta}{4}x_\mu p^2 - \frac{\beta^2}{16}x_\mu p^4 +\\&+ \frac{\alpha\beta}{8}x_\mu\, x\cdot p\; p\cdot x + \text{h.c.},\\&\hat{p}_\mu = p_\mu - \frac{\alpha}{4}p_\mu x^2 - \frac{\alpha^2}{16}p_\mu x^4 +\\&+ \frac{\alpha\beta}{8}p_\mu\, p\cdot x\; x\cdot p + \text{h.c.},\end{aligned}\tag{17}$$

із

$$K = 1-\frac{1}{2}\Big(\alpha x^2+\beta p^2\Big)-\frac{1}{8}\Big(\alpha x^2-\beta p^2\Big)^2+\frac{\alpha\beta}{2}\; x\cdot p\; p\cdot x.\tag{18}$$

Звичайно, це є не що інше як розкладання результату Янга–Пуассона (14) за степенями α і β. Однак, переходячи до вищих порядків по α і β, можна знайти поправки до класичного розв'язку [20].

6. Зірковий добуток для алгебри Янга

Одним з найбільш ефективних підходів до дослідження некомутативної геометрії є використання алгебри Хопфа [4]. Цей формалізм передбачає визначення коалгебраїчної структури, що включає кодобуток і антипод.

Такий формалізм може бути застосований також до моделі Янга, якщо взяти всі її генератори M_{AB} як первинні змінні [20, 26], і використовувати реалізацію в розширеному фазовому просторі [25]. Тоді можна скористатись ізоморфізмом (4) алгебри Янга з групою $o(1,5)$ і загальними результатами роботи [21], де була обчислена алгебра Хопфа, пов'язана із загальними ортогональними групами.

Зауважте, що для цього необхідно визначити "моменти" s^{AB}, канонічно спряжені до змінних M_{AB}, фізична інтерпретація яких неочевидна.

Ми не будемо тут наводити подробиці, відсилаючи читача до оригінальної літератури. Нагадаємо лише, що внаслідок некомутативності закон додавання імпульсів s^{AB} деформується [4]. Використовуючи формалізм алгебри Хопфа, цю деформацію можна виразити за допомогою зіркового добутку, знання якого може бути корисним, наприклад, при побудові квантової теорії поля.

У нашому випадку зірковий добуток для плоских хвиль можна визначити як

$$e^{\frac{i}{2}s^{AB}M_{AB}} \star e^{\frac{i}{2}t^{CD}M_{CD}} = e^{\frac{i}{2}\mathcal{D}^{AB}(s,t)M_{AB}},\tag{19}$$

де s_{AB} і t_{AB} – антисиметричні тензори, які описують "моменти", спряжені до первинних змінних M_{AB}, а $\mathcal{D}^{AB}$ позначає деформований закон додавання.

Використовуючи реалізацію алгебри Вейля, зірковий добуток можна обчислити за теорією збурень [26].

Може бути корисно явно записати чотиривимірний вираз $\mathcal{D}^{AB}(s,t)$ у першому порядку: покладаючи $\mathcal{D}^\mu = \mathcal{D}^{\mu 4}$, $\bar{\mathcal{D}}^\mu = \mathcal{D}^{\mu 5}$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{45}$, отримуємо

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}^{\mu\nu}(s,t) = s^{\mu\nu} + t^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Big(s^{\mu\lambda}t^\nu{}_\lambda + \beta s^\mu t^\nu +\\&+ \alpha\bar{s}^\mu\bar{t}^\nu + \sqrt{\alpha\beta}(s^\mu\bar{t}^\nu + \bar{s}^\mu t^\nu) - (\mu\leftrightarrow\nu)\Big),\\&\mathcal{D}^\mu(s,t) = s^\mu + t^\mu - \frac{1}{2}\Big(s^{\mu\lambda}t_\lambda - t^{\mu\lambda}s_\lambda +\\&+ \sqrt{\alpha\beta}(s^\mu t - st^\mu) + \alpha(\bar{s}^\mu t - s\bar{t}^\mu)\Big),\\&\bar{\mathcal{D}}^\mu(s,t) = \bar{s}^\mu + \bar{t}^\mu - \frac{1}{2}\Big(s^{\mu\lambda}\bar{t}_\lambda - \bar{s}_\lambda t^{\mu\lambda} -\\&- \sqrt{\alpha\beta}(\bar{s}^\mu t - s\bar{t}^\mu) + \beta(s^\mu t - st^\mu)\Big),\\&\mathcal{D}(s,t) = s + t - \frac{1}{2}\left(s^\lambda\bar{t}_\lambda - \bar{s}^\lambda t_\lambda\right),\end{aligned}\tag{20}$$

де $s^{\mu\nu}$, $s^\mu = s^{\mu 4}$, $\bar{s}^\mu = s^{\mu 5}$, $s = s^{45}$ – чотиривимірні компоненти s^{AB}, спряжені до $J_{\mu\nu}$, x_μ, p_μ і K, відповідно. З цих виразів ясно, що чотиривимірні компоненти імпульсів змішуються в зірковому добутку.

7. Узагальнення

Алгебра Янга може бути узагальнена кількома способами. Найпростіший – допустити від'ємні значення параметрів деформації α або β, отримуючи моделі на основі алгебр $o(2,4)$ або $o(3,3)$ [25].

Ці моделі мають фізичні властивості, відмінні від тих, що характерні для моделей із позитивними α і β [10].

Ще одне просте узагальнення наведено в [27], де введено лінійні комбінації генераторів $\hat{x}$ і $\hat{p}$ за допомогою параметра γ. У [18, 22] були запропоновані ще більш загальні визначення моделі Янга в розширеному фазовому просторі у поєднанні з TSR. Крім того, суперсиметричне розширення алгебри Янга було досліджено в [28].

Нарешті, можливість включати κ-деформації як простору координат, так і простору імпульсів, із параметрами a_μ і b_μ в модель [27] досліджувалася в [26, 29]. Узагальнена алгебра має вигляд

$$\begin{aligned}
&[x_\mu, x_\nu] = i\,(\beta J_{\mu\nu} + a_\mu x_\nu - a_\nu x_\mu),\\
&[p_\mu, p_\nu] = i\,(\alpha J_{\mu\nu} + b_\mu p_\nu - b_\mu p_\nu),\\
&[x_\mu, p_\nu] = i\,(\eta_{\mu\nu} h + b_\mu x_\nu - a_\nu p_\mu + \gamma J_{\mu\nu}),\\
&[J_{\mu\nu}, x_\lambda] = i\,(\eta_{\mu\lambda} x_\nu - \eta_{\nu\lambda} x_\mu + a_\mu J_{\lambda\nu} - a_\nu J_{\lambda\mu}),\\
&[J_{\mu\nu}, p_\lambda] = i\,(\eta_{\mu\lambda} p_\nu - \eta_{\nu\lambda} p_\mu + b_\mu J_{\lambda\nu} - b_\nu J_{\lambda\mu}),\\
&[J_{\mu\nu}, K] = i\,(b_\nu x_\mu - b_\mu x_\nu - a_\nu p_\mu + a_\mu p_\nu),\\
&[K, x_\mu] = i\,(\beta p_\mu - \gamma x_\mu - a_\mu K),\\
&[K, p_\nu] = i\,(-\alpha x_\mu + \gamma p_\mu + b_\mu K).
\end{aligned} \tag{21}$$

Ця алгебра все ще ізоморфна $o(1,5)$, але тепер дія групи Лоренца деформована. Проте все ще можливо отримати асоційовану з нею коалгебру [26].

8. Застосування

Фізичним наслідком моделі Янга є деформація співвідношення невизначеностей Гайзенберґа [10]. Фактично, у своїй нерелятивістичній тривимірній границі,

$$\Delta x_i \Delta p_j \geq \frac{1}{2}\big|\langle [x_i, p_j]\rangle\big| = \frac{1}{2}\big|\langle K\rangle\big|\delta_{ij}. \tag{22}$$

Очевидно, що в реалізації фазового простору з $K = K(x,p)$ це приводить до узагальненого принципу невизначеності, подібного до того, що діє для TSR [30].

Наприклад, розглянемо одновимірну іграшкову модель: у головному порядку по $\hbar$, α і β можна використати реалізацію (14), отримуючи [2]

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}\sqrt{1 - \alpha(\Delta\hat{x})^2 - \beta(\Delta\hat{p}^2)}. \tag{23}$$

[2] У цьому розділі ми явно вводимо $\hbar$.

З цього випливає, що

$$\begin{aligned}
&(\Delta\hat{x}) \geq \hbar\sqrt{\frac{1 - \beta(\Delta\hat{p})^2}{\hbar^2\alpha + 4(\Delta\hat{p})^2}},\\
&(\Delta\hat{p}) \geq \hbar\sqrt{\frac{1 - \alpha(\Delta\hat{x})^2}{\hbar^2\beta + 4(\Delta\hat{x})^2}}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Зрозуміло, що співвідношення невизначеностей сильно залежатимуть від знака констант зв'язку. Наприклад, для $\alpha, \beta > 0$ невизначеності задовольняють умовам $0 \leq \Delta p \leq 1/\sqrt{\beta}$ і $0 \leq \Delta x \leq 1/\sqrt{\alpha}$, що очевидно через обмежений діапазон варіації x і p у цьому випадку. Для $\alpha, \beta < 0$ натомість ми отримуємо цікаві співвідношення $\Delta p \geq \hbar\sqrt{|\alpha|}/2$ і $\Delta x \geq \hbar\sqrt{|\beta|}/2$. Більш складний випадок – якщо α і β мають різні знаки [10].

Можна також розрахувати поправки до динаміки на основі простих моделей завдяки нетривіальній симплектичній структурі, з можливими застосуваннями до астрофізичних спостережень, знову ж таки за аналогією з результатами [30] для TSR.

Нарешті, більш амбітною метою було б побудувати квантову теорію поля на основі цього підходу. Імовірно, для цього знадобиться знання про зірковий добуток і, отже, використання розширеного фазового простору. У цьому випадку необхідно прояснити фізичну інтерпретацію додаткових координат.

9. Заключні зауваження

Ми розглянули основні властивості моделі некомутативної геометрії у викривленому просторі, запропонованої С.Н. Янгом в сорокових роках минулого століття, і вказали на деякі напрямки розвитку подібних моделей і їх узагальнення, які спостерігаються в останні роки.

Актуальність цих моделей для фізики полягає в тому, що вони певним чином об'єднують опис простору-часу на надзвичайно малих відстанях і в космологічних масштабах, і що вони можуть бути пов'язані з низькоенергетичною границею квантової ґравітації [13].

Були досліджені деякі прикладні задачі, проте багато що потрібно іще зрозуміти щодо фізичної інтерпретації та передбачень фізичних явищ в рамках цих моделей.

Автор хоче подякувати S. Meljanac, T. Martinić-Bilać, J. Lukierski, A. Pachol і M. Woronowicz за їхню безцінну співпрацю в дослідженнях, про які йдеться в цій статті. Робота виконана за підтримки GNFM (Італія).

1. L.J. Garay. Quantum gravity and minimum length. *Int. J. Mod. Phys. A* **10**, 145 (1995).
2. S. Hossenfelder. Minimal length scale scenarios for quantum gravity. *Liv. Rev. Rel.* **16**, 2 (2013).
3. S. Doplicher, K. Fredenhagen, J.E. Roberts. The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields. *Commun. Math. Phys.* **172**, 187 (1995).
4. S. Majid. Algebraic approach to Quantum Gravity II: noncommutative spacetime. In: *Approaches to Quantum Gravity.* Edited by D. Oriti (Cambridge Univ. Press, 2009), p. 466.
5. J. Madore. *An Introduction to Noncommutative Geomtry and Its Physical Applications* (Cambridge Univ. Press, 1995).
6. M. Arzano M., J. Kowalski-Glikman. *Deformation of Spacetime Symmetries – Gravity, Group-Valued Momenta, and Noncommutative Fields* (Springer-Verlag, 2021).
7. G. Rosati, G. Amelino-Camelia, A. Marciano, M. Matassa. Planck-scale-modified dispersion relations in FRW spacetime. *Phys. Rev. D* **92**, 124042 (2015).
8. C.N. Yang. On Quantized space-time. *Phys. Rev.* **72**, 874 (1947).
9. H.S. Snyder. Quantized space-time. *Phys. Rev.* **71**, 38 (1947).
10. S. Meljanac, S. Mignemi. in preparation.
11. M. Born. Reciprocity theory of elementary particles. *Rev. Mod. Phys.* **21** 463 (1949).
12. H.G. Guo, C.G. Huang, H.T. Wu. Yang's model as triply special relativity and the Snyder's model-de Sitter special relativity duality. *Phys. Lett. B* **663** 270 (2008).
13. J. Kowalski-Glikman, L. Smolin. Triply special relativity. *Phys. Lett. D* **70**, 065020 (2004).
14. C. Chryssomakolos, E. Okon. Linear form of 3-scale special relativity algebra and the relevance of stability. *Int. J. Mod. Phys. D* **13**, 1817 (2004).
15. A. Das, O.C.W. Kong. Physics of quantum relativity through a linear realization. *Phys. Lett. D* **73**, 124029 (2006).
16. S. Mignemi. The Snyder model and quantum field theory. *Class. Quantum Grav.* **26**, 245020 (2009).
17. R. Banerjee, K. Kumar, D. Roychowdhury. Symmetries of Snyder–de Sitter space and relativistic particle dynamics. *J. High Energ. Phys.* **1103**, 060 (2011).
18. S. Meljanac, R. Štrajn. Deformed quantum phase spaces, realizations, star products and twists. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* **18**, 022 (2022).
19. J. Lukierski, S. Meljanac, S. Mignemi, A. Pachol. Quantum perturbative solutions of extended Snyder and Yang models with spontaneous symmetry breaking. *Phys. Lett. B* **847**, 138261 (2023).
20. T. Martinić-Bilać, S. Meljanac, S. Mignemi. Hermitian realizations of the Yang model. *J. Math. Phys.* **64**, 122302 (2023).
21. S. Meljanac, T. Martinić-Bilać, S. Krešić-Jurić. Generalized Heisenberg algebra applied to realizations of the orthogonal, Lorentz, and Poincaré algebras and their dual extensions. *J. Math. Phys.* **61**, 051705 (2020).
22. S. Meljanac, S. Mignemi. Generalizations of Snyder model to curved spaces. *Phys. Lett. B* **833**, 137289 (2022).
23. S. Meljanac, S. Mignemi. Noncommutative Yang model and its generalizations. *J. Math. Phys.* **64**, 023505 (2023).
24. S. Meljanac, S. Mignemi. Realizations of the Yang–Poisson model on canonical phase space. *Int. J. Mod. Phys. A* **38**, 2350182 (2023).
25. T. Martinić-Bilać, S. Meljanac, S. Mignemi. Generalized Yang–Poisson models on canonical phase space. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* **20**, 049 (2024).
26. T. Martinić-Bilać, S. Meljanac, S. Mignemi. Realizations and star-product of doubly κ-deformed Yang models. arXiv:2404.01792.
27. V.V. Khruschev, A.N. Leznov. The relativistic invariant Lie algebra for the kinematical observables in quantum space-time. *Grav. Cosmol.* **9**, 159 (2003).
28. J. Lukierski, M. Woronowicz. Spinorial Snyder and Yang models from superalgebras and noncommutative quantum superspaces. *Phys. Lett. B* **824**, 136783 (2021).
29. J. Lukierski, S. Meljanac, S. Mignemi, A. Pachol. From Snyder space-times to doubly κ-dependent Yang quantum phase spaces and their generalizations. *Phys. Lett. B* **854**, 138729 (2024).
30. S. Mignemi. Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model in curved space. *Class. Quantum Grav.* **29**, 215019 (2012).

Одержано 00.00.24.
Переклад на українську мову Ю.А. Куца

S. Mignemi

YANG MODEL REVISITED

A long time ago, C.N. Yang proposed a generalization of the Snyder model to the case of a curved background spacetime, based on an algebra isomorphic to $o(1,5)$ which includes, as subalgebras both the Snyder and the de Sitter algebras. His proposal can, therefore, be interpreted as a model of noncommutative curved spacetime, and could be useful for relating physics on very small and very large scales. We review this model and some recent progress concerning its generalizations and its interpretation in the framework of Hopf algebras. We also report some possibilities to relate it to more phenomenological aspects.

Keywords: noncommutative geometry, de Sitter spacetime, Yang model.