

АНТОН А. НАЗАРЕНКО,¹ А.В. НАЗАРЕНКО²¹Механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
(Просп. Академіка Глушкова, 4-е, Київ 03127
e-mail: anton.nazarenko02@gmail.com)²Інститут теоретичної фізики ім. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14-б, Київ 03143;
e-mail: nazarenko@bitp.kyiv.ua; ORCID: 0000-0002-6080-7426)**СТРУКТУРИ, ПОВ'ЯЗАНІ
З ДОПОВНЕННЯМ КІЛЕЦЬ
БОРРОМЕО В КУЛІ ПУАНКАРЕ**

УДК 539; 514.1; 519.217

Керуючись фізичними потребами, ми задіяли обертально-ізотропну кулю Пуанкаре, розглядаючи вкладене в неї доповнення кілець Борромео. Послідовно описано геометрію доповнення та реалізовано фундаментальну групу як підгрупу ізометрій у трьох вимірах. Застосовуючи цю реалізацію, ми виявили нормальну стохастизацію та мультифрактальну поведінку у досліджуваній моделі напрямлених випадкових блукань на вкоріненому дереві Кейлі, чий шестигілкові графи пов'язуються з дендритними полімерами. Згідно із Пеннером, побудовано простір Тейхмюллера декорованої ідеальної октаедричної поверхні, пов'язаної з фактор-простором дії фундаментальної групи. З використанням конформності декорації означено шість модулів і групу класів відображення, породжену циклічними перестановками. Маючи намір квантувати геометричну площу, ми сформулювали зв'язок між індукованою геометрією та моделлю синус-Гордона. Завдяки цій відповідності отримано диференціальну двоформу в кодотичному розширванні простору модулів.

Ключові слова: доповнення кілець Борромео, фундаментальна група, дерево Кейлі, випадкові блукання, декорований простір Тейхмюллера, рівняння синус-Гордон.

1. Вступ

Численні фізичні задачі вимагають формулювання в ізотропному тривимірному просторі, прикладом якого слугує модель одиничної кулі Пуанкаре з власною групою ізометрій, які включають тривимірні обертання. Її гіперболічність передбачає розгляд геометричних структур з негативною оїлеровою характеристикою, яка визначає число топологічних ступенів вільності, також застосовних у фізичних моделях. Тут ми зосередимося на доповненні кілець Борромео (ДКБ), які представляють найпростіше бруннове зачеплення [1], і деяких

структурах, пов'язаних з ним. Вивчаючи їх, ми дотримуємося вибраної просторової моделі, хоча часто використовується модель Кляйна математично зручна завдяки групі ізометрій $SL(2, \mathbb{C})$ [2–4].

Маючи справу з основними гомотопічними групами зачеплення і декорованого простору Тейхмюллера [5], ми прагнемо створити основу, придатну для подальшого використання у фізиці¹. Це робиться через зв'язок кілець Борромео із квантовою заплутаністю [6, 7], тримером Єфімова [8, 9], полімерами [10], а також для розвитку квантової геометрії, тобто знаходження спектрів квантованих геометричних характеристик [11] і/або використання квантових груп [12]. Останнє, на нашу думку, має концептуальне значення, і тому розпочаті тут дослідження мають перспективу.

Ц и т у в а н н я: Назаренко Антон А., Назаренко А.В. Структури, пов'язані з доповненням кілець Борромео в кулі Пуанкаре. *Укр. фіз. журн.* **69**, № 7, 499 (2024).

Citation: Nazarenko Anton A., Nazarenko A.V. Structures associated with the Borromean rings' complement in the Poincaré ball. *Ukr. J. Phys.* **69**, No. 7, 498 (2024). <https://doi.org/10.15407/ujpe69.7.498>.

¹ Ми змушені опустити тут детальний огляд багатьох робіт, присвячених вивченню і використанню кілець Борромео, але звертаємо увагу на деякі області їх прояву.

Після реалізації фундаментальної групи, породженої тривимірними параболічними генераторами, закономірно постає проблема симетризації функцій під дією групи [3]. У зв'язку з цим ми розглядаємо дерево Кейлі, вкладене у кулю Пуанкаре і вкорінене у початку координат, щоб сформулювати статистичну суму моделі спрямованого випадкового блукання, пов'язаного з фізикою полімерів [13]. Визначаючи цю функцію до N -го покоління, ми очікуємо швидкої стохастизації членів ряду типу Пуанкаре і виявлення мультифрактальності. Шукані мультифрактальні показники легко порівняти для різних моделей і інтерпретувати в дусі статистичної фізики [14]. Зокрема, наближення ланцюгів Маркова при їх аналітичному обчисленні подібне до наближення середнього поля.

Ми також зосереджуємося на деформаціях (класах) конформних структур, індукованих на поверхні правильного гіперболічного октаедра, ідеальні вершини якого фіксуються параболічними генераторами. Використовуючи реалізовану групу як маркування, ми залучаємо декорований простір Тейхмюллера і його групу класів відображення, яка діє через перестановки вершин. Декорування передбачає включення орисфер, центрованих у вершинах, отримання кривих їх перетину з гранями октаедра, і завжди ортогональними до ребер октаедра [5]. Разом з тим, конформність забезпечується збереженням прямих кутів незалежно від розміру орисфер [5, 15, 16].

Щоб визначити диференціальну двоформу, необхідну для подальшого квантування геометрії, ми шукаємо зв'язок із відповідною динамічною моделлю. Це можна реалізувати шляхом співвіднесення кутового розміру кожної кривої перетину і гіперболічної відстані від неї до початку координат, щоб виявити кінк з моделі синус-Гордона [17]. Це повинно дозволити нам індукувати диференціальну двоформу в рамках гамільтонового формалізму, а також побудувати алгебру геометричних величин у майбутньому. Ми припускаємо застосовність цієї стратегії для розвитку квантової геометрії [18, 19] і теорії поля [20].

Стаття складена таким чином. У розділі 2 ми описуємо геометрію доповнення кілець Борромео у кулі Пуанкаре та реалізуємо фундаментальну групу як підгрупу її ізометрій. Мультифрактальні показники моделі спрямованого випадкового блукан-

ня на дереві Кейлі досліджуються в розділі 3 за допомогою чисельних і наближених методів. У розділі 4 ми вивчаємо структуру декорованого простору Тейхмюллера та його групу класів відображення. Вводячи модулі, ми з'єднуємо індуковану геометрію з моделлю синус-Гордона. Ми закінчуємо наш розгляд обговоренням.

2. Геометрія і симетрія доповнення кілець Борромео

2.1. Простори та їх ізометрії

Означимо простори та їх симетрії, які будемо використовувати. Згідно з аргументами Терстона [1], хороші вузли і зачеплення індукують гіперболічну структуру в тривимірному просторі, де вони природно існують. Позначимо через \mathcal{H}_3 тривимірний многовид, вкладений у \mathbb{R}^3 і наділений гіперболічною метрикою сталої від'ємної кривини. Корисно розбити $\mathcal{H}_3 \ni x$ гіперплощинами і комплексифікувати їх:

$$x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + ix_2, x_3) = (z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}. \quad (1)$$

Отже, фіксуючи гіперплощину $t = 0$, ми вимагаємо, щоб результуючий двовимірний многовид $\mathcal{H}_2 \ni z \simeq (z, 0)$ успадкував гіперболічну структуру (\simeq позначає ізоморфну еквівалентність). Ця (ортогональна) проекція стає очевидною при розгляді двох моделей Пуанкаре: одиничної кулі $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_{\mathbb{B}}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\} \simeq \mathcal{H}_3$ і одиничного диску $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|_{\mathbb{D}}^2 = |z|^2 < 1\} \simeq \mathcal{H}_2$. Їхні нескінченно малі інтервали $ds_{\mathbb{B}, \mathbb{D}}^2$ і відстані $\text{dist}_{\mathbb{B}, \mathbb{D}}$ визначаються спільними формулами:

$$ds_{\mathbb{B}, \mathbb{D}}^2 = 4 \frac{\|dx\|_{\mathbb{B}, \mathbb{D}}^2}{(1 - \|x\|_{\mathbb{B}, \mathbb{D}}^2)^2}, \quad (2)$$

$$\sinh \frac{\text{dist}_{\mathbb{B}, \mathbb{D}}(x, y)}{2} = \frac{\|x - y\|_{\mathbb{B}, \mathbb{D}}}{\sqrt{(1 - \|x\|_{\mathbb{B}, \mathbb{D}}^2)(1 - \|y\|_{\mathbb{B}, \mathbb{D}}^2)}}. \quad (3)$$

Вони також узагальнюються на n вимірів і приводять до гауссової кривини $K = -1$.

Геодезичні в \mathbb{B} і \mathbb{D} є або діаметрами, які проходять через початок координат, або дугами, які ортогонально перетинають границі $\partial\mathbb{B}$ і $\partial\mathbb{D}$. Щоб отримати геодезичну $\mathbf{r}(\theta)$, яка з'єднує дві точки з радіус-векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{B}$, ми пропонуємо пара-

метризацію:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\theta) &= \mathbf{r}_0 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cos \theta + [\mathbf{n} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)] \sin \theta; \\ \mathbf{r}_0 &= \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{m}}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}, \\ \mathbf{m} &= c_2 \mathbf{r}_1 - c_1 \mathbf{r}_2, \quad c_i = \frac{\mathbf{r}_i^2 + 1}{2}, \end{aligned} \quad (4)$$

таким чином $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_1$.

Насправді (4) описує дугу кола з центром в \mathbf{r}_0 і радіусом $R = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0| = \sqrt{\mathbf{r}_0^2 - 1}$; а орт \mathbf{n} – нормаль до площини кола, яка охоплює три точки: \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 і початок координат $\mathbf{r} = 0$, які не лежать на одній прямій. Рівняння $|\mathbf{r}(\theta_2) - \mathbf{r}_2| = 0$ визначає параметр θ_2 , і ми маємо

$$\text{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 2R \int_0^{\theta_2} \frac{d\theta}{1 - \mathbf{r}^2(\theta)}. \quad (5)$$

Спочатку звернемося до $\mathcal{H}_2 \simeq (\mathbb{D}, ds_{\mathbb{D}}^2)$ у наших геометричних і групових конструкціях. Це передбачає використання підгрупи ізометрій $\text{Isom}(\mathbb{D})$, яка зберігає орієнтацію та інтервал $ds_{\mathbb{D}}^2$, тобто $PSU(1, 1) \simeq SU(1, 1)/\{\pm 1\}$, елемент g якої вільно діє на $z \in \mathbb{D}$ за допомогою дробово-лінійного перетворення:

$$g[z] = \frac{uz + v}{\bar{v}z + \bar{u}}, \quad g = \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

і $\det g = |u|^2 - |v|^2 = 1$.

Тоді, маючи матричне представлення деякої групи $\Gamma \subset PSU(1, 1)$, потрібно розширити дію її генераторів $g = (g_{i,j})$ до кулі \mathbb{B} :

$$g[(z, t)] = (z_g(z, t), t_g(z, t)), \quad g[(z, 0)] = (g[z], 0), \quad (7)$$

так щоб $\text{dist}_{\mathbb{B}}(x, y) = \text{dist}_{\mathbb{B}}(x_g, y_g)$ для $x = (z_1, t_1)$, $y = (z_2, t_2)$ та їхніх зображень $x_g = (z_g(z_1, t_1), t_g(z_1, t_1))$, $y_g = (z_g(z_2, t_2), t_g(z_2, t_2))$. Це робиться за допомогою явних формул, зокрема з [21].

Для параболічних $PSU(1, 1)$ -генераторів,

$$g = \begin{pmatrix} 1 + ia & -ia e^{i\varphi} \\ ia e^{-i\varphi} & 1 - ia \end{pmatrix}, \quad g[e^{i\varphi}] = e^{i\varphi}, \quad a, \varphi \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

коли g^n просто отримуємо шляхом заміни $a \mapsto na$, запишемо розширену дію $g[\mathbf{r}]$ для $\mathbf{r} \equiv (x \ y \ t)^T \in \mathbb{B}$ в термінах лінійних комбінацій:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x \sin \varphi - y \cos \varphi, \\ \xi_2 &= y \sin \varphi + x \cos \varphi; \\ x^2 + y^2 &= \xi_1^2 + \xi_2^2. \end{aligned} \quad (9)$$

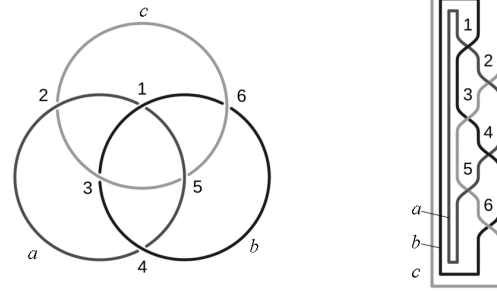


Рис. 1. Ліва панель: схема кілець Борромео. Тут – сім внутрішніх трикутників, утворених перетинами, а саме (123), (135), (156), (126), (234), (345), (456), і один зовнішній трикутник (246). Права панель: замкнена коса з напрямком згори донизу і груповим співвідношенням $(\sigma_2 \sigma_1^{-1})^3 = 1$ в термінах перестановок σ_1 (між a та b косами) і σ_2 (між b та c косами)

Отже, ми одержуємо

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2[t^2 + (\xi_2 - 1)^2] + (a\xi_1 + 1)^2} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ t \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\tilde{x} = x + (a^2 \cos \varphi + a \sin \varphi)[\xi_1^2 + (\xi_2 - 1)^2 + t^2] + 2a\xi_1 \cos \varphi,$$

$$\tilde{y} = y + (a^2 \sin \varphi - a \cos \varphi)[\xi_1^2 + (\xi_2 - 1)^2 + t^2] + 2a\xi_1 \sin \varphi.$$

Цей вираз слугує для отримання генераторів групи $\Gamma_* \subset \text{Isom}(\mathbb{B})$ з Γ . Однак, Γ_* на основі Γ не може врахувати всі симетрії тривимірних об'єктів. Тому слід ввести додаткові генератори з $\text{Isom}(\mathbb{B})$, оперуючи, наприклад, поворотами через закладену сферичну симетрію.

Формула Родрігеса [22] дозволяє подати поворот вектора \mathbf{r} на кут φ навколо напрямку орта \mathbf{n} як

$$R_{\mathbf{n},\varphi}[\mathbf{r}] = \mathbf{r} \cos \varphi + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos \varphi) + [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \sin \varphi. \quad (11)$$

Цей поворот такий, що $R_{\mathbf{n},\varphi}^{-1} = R_{\mathbf{n},-\varphi}$; а також $R_{\mathbf{m},\varphi} = R R_{\mathbf{n},\varphi} R^{-1}$ для $\mathbf{m} = R[\mathbf{n}]$ і повороту R .

Наприкінці також зазначимо групове розширення HNN [23] і перетворення Мебіуса в термінах кватерніонів [24] (див. також посилання там).

2.2. Доповнення кілець Борромео

Розглянемо зачеплення, утворене кільцями Борромео і зображене на рис. 1 (ліва панель), і опишемо симетрію його доповнення. Таке зачеплення ізотопно еквівалентне косі на рис. 1 (права панель), де кінці кожної коси замикаються.

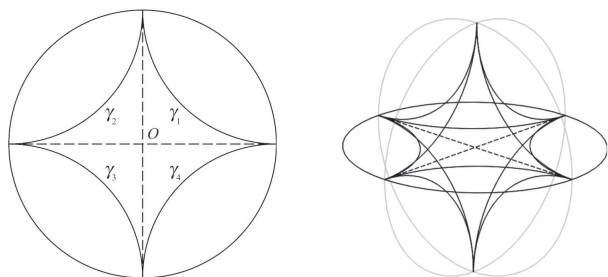


Рис. 2. Ліва панель: основа гіперболічного октаедра з ідеальними вершинами в площині \mathbb{D} . Права панель: центральний гіперболічний октаедр в \mathbb{B}

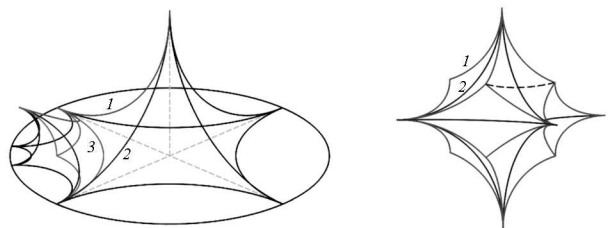


Рис. 3. Ліва панель: Верхні частини двох суміжних октаедрів. Кольорові ребра дочірнього октаедра окреслюють тетраедр, який слід приклеїти до суміжної грані центрального октаедра. Червоні та сині ребра тетраедра у третьому квадранті \mathbb{D} ототожнюються з ребрами (1) і (2) центрального октаедра дією h_2^{-1} та h_3 . Права панель: Додекаедр із червоними (1) ребрами покриває центральний октаедр із синіми (2) ребрами. Він виникає, якщо взяти вісім тетраедрів уздовж екваторіального периметра центрального октаедра і приклеїти їх до його восьми граней. Штрихована геодезична плавно з'єднує сусідні скінченні вершини приклеєних тетраедрів

За твердженням Терстона [1], доповнення кілець Борромео (ДКБ) є гіперболічним тримноговидом M , який має тесселяцію, що складається з двох ідеальних правильних октаедрів. Група G ізометрій M діє вільно і транзитивно на множині прапорів цієї тесселяції, і є порядку 48.

Розпочнемо з розгляду ідеального правильного октаедра на рис. 2 з ідеальними вершинами в $\pm \mathbf{i}$, $\pm \mathbf{j}$, $\pm \mathbf{k}$, де $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ – стандартний базис \mathbb{R}^3 . Його дванадцять ребер є геодезичними дугами, див. (4).

Базис октаедра в \mathbb{D} стабілізується параболічними генераторами групи $\Gamma = \langle h_1, h_2 \mid (h_1 h_2)^2 = -I \rangle$,

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1-i & -i \\ i & 1+i \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Увівши $h_3 = h_2 h_1 h_2^{-1}$ і $h_4 = h_1^{-1} h_2 h_1$ так, що $(h_2 h_3)^2 = (h_3 h_4)^2 = (h_1 h_4)^2 = h_4 h_3 h_2 h_1 = -I$, кожен генератор h_k фіксує точку $z_k = \exp(i\pi k/2)$

($k = \overline{1,4}$) і задає відображення $h_k: \gamma_k \rightarrow \gamma_{k+1}$ ($\gamma_5 = \gamma_1$) на рис. 2 (ліва панель). Далі видно, що розширення h_k відображають також вертикальні ребра октаедрів, основи яких лежать в \mathbb{D} . Однак, щоб заповнити всю кулю \mathbb{B} октаедрами, потрібні додаткові засоби. Фактично, групу Γ слід розширити до Γ_* , залучивши генератори (A1)–(A8).

Як стверджувалось раніше [25], склеюючи два октаедри разом для отримання ДКБ, максимально симетричним тілом, яке можна отримати, є ромбічний додекаедр, який успадковує октаедричну симетрію порядку 48. Щоб цього досягти, можна розрізати один октаедр на вісім тетраедрів з подальшим приклеюванням кожного до восьми граней іншого октаедра. Реалізуємо це за допомогою Γ_* .

Подіємо чотирма генераторами h_k на октаедр на рис. 2 (права панель), щоб отримати чотири дочірні октаедри з основами в чотирьох квадрантах \mathbb{D} . Нові октаедри є геодезичними тілами в $(\mathbb{B}, ds_{\mathbb{B}}^2)$, вертикальні ребра (і грані) яких з $t \neq 0$ отримано завдяки (10). За побудовою, дочірні октаедри мають лише одне ребро, суміжне з батьківським октаедром, див. рис. 3 (ліва панель).

Виділимо тетраедри з одного дочірнього октаедра, розрізаючи трьома гіперплощинами октаедричної симетрії. Така операція показана на рис. 3 (ліва панель). Кожен тетраедр має прямі двогранні кути при утвореній вершині в центрі октаедра.

У нашому підході ми приклеюємо по одному тетраедру до кожної грані суміжного центрального октаедра, як показано на рис. 3 (ліва панель). Це дозволено через геодезичну природу граней і ребер однакових площі і довжин. Процедура розрізання чотирьох дочірніх октаедрів із взяттям двох тетраедрів (у верхній і нижній півкулі) нам здається легшою, ніж розкладання одного октаедра (з основою в \mathbb{D}) на вісім тетраедрів з подальшими маніпуляціями. У всякому разі, це також допустимо з використанням h_k . У результаті всі процедури ведуть до ромбічного додекаедра (з вісьмома скінченними вершинами в точках $(\pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3})^T$), що визначає ДКБ і показано на рис. 3 (права панель). Таким чином, ми завершуємо геометричний опис ДКБ за участю Γ і Γ_* .

2.3. Реалізація групи ДКБ

Реалізуємо фундаментальну групу ДКБ (BRC) $\pi_1(\text{BRC})$, яка є напівпрямим добутком $\mathbb{Z}_2^3 \rtimes \mathcal{C}_3$, де

S_3 – циклічна група третього порядку [26, 27]. Вона є підгрупою групи $G \simeq \mathbb{Z}_2^3 \rtimes S_3$ тримноговида M із симетричною групою S_3 , що діє транзитивно на стандартному базисі векторного простору \mathbb{Z}_2^3 .

Якщо задати батьківський октаедр Oct , як показано на рис. 2, дія групи \mathbb{Z}_2^3 на будь-який октаедр тесселяції M відповідає відображенням у координатних гіперплощинах \mathbb{B} . Крім того, елементарна група \mathbb{Z}_2^3 діє тривіально на множині Y каспів M , а факторгрупа S_3 діє транзитивно на Y .

Тут ми слідуємо представленню Віртінгера для $\Gamma_{\text{BRC}} = \langle g_1, g_2, g_3 \mid R_1, R_2, R_3 \rangle$:

$$\begin{aligned} R_1: (g_2^{-1} g_3 g_2 g_3^{-1}) g_1 &= g_1 (g_2^{-1} g_3 g_2 g_3^{-1}), \\ R_2: (g_3^{-1} g_1 g_3 g_1^{-1}) g_2 &= g_2 (g_3^{-1} g_1 g_3 g_1^{-1}), \\ R_3: (g_1^{-1} g_2 g_1 g_2^{-1}) g_3 &= g_3 (g_1^{-1} g_2 g_1 g_2^{-1}). \end{aligned} \quad (13)$$

Зауважимо, що відомі $SL(2, \mathbb{C})$ -реалізації є в [2–4].

Ми вже стабілізували Oct в $(\mathbb{B}, ds_{\mathbb{B}}^2)$ підгрупою із $\text{Isom}(\mathbb{B})$ з композицією функцій в ролі групової операції. Тепер нас цікавить така реалізація $\varphi: \pi_1(\text{BRC}) \mapsto \text{Isom}(\mathbb{B})$ з відображенням $g_i \mapsto \varphi(g_i)$.

Розпочнемо з генераторів трьох абелевих підгруп в термінах “меридіанів” і “довгот” для трьох фіксованих точок:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1^m h_1^n &= h_1^n \tilde{h}_1^m, \\ \tilde{h}_2^m h_2^n &= h_2^n \tilde{h}_2^m, \\ \tilde{h}_+^m h_+^n &= h_+^n \tilde{h}_+^m, \end{aligned} \quad (14)$$

де $n, m \in \mathbb{Z}$.

Вони перетворюють $\mathbf{r} = (x \ y \ t)^\top \in \mathbb{B}$ так, що їх композиція виглядає як $h_i h_j[\mathbf{r}] = h_i[h_j[\mathbf{r}]]$.

Дійсно, кожна пара (h_k, \tilde{h}_k) є абелевою, якщо параболічні h_k і \tilde{h}_k мають однакову нерухому точку в $\partial\mathbb{B}$. Необхідні генератори можна легко отримати за допомогою поворотів (11). Ми зібрали допоміжні генератори в Додатку А.

В принципі, (14) означає, що у нас є шість генераторів, і нам потрібно зменшити їх кількість до трьох, наклавши додаткові співвідношення (13).

Вибираючи генератори з Додатку А, отримуємо реалізацію Γ_{BRC} , яка оперує в \mathbb{B} :

$$\begin{aligned} g_1^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} &= \frac{1}{n^2[x^2 + (y-1)^2] + (nt-1)^2} \times \\ &\times \begin{pmatrix} x \\ y-1 + n^2[x^2 + (y-1)^2] + (nt-1)^2 \\ t - n[x^2 + (y-1)^2 + t^2] \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} &= \frac{1}{n^2[t^2 + (x+1)^2] + (ny-1)^2} \times \\ &\times \begin{pmatrix} x+1 - n^2[t^2 + (x+1)^2] - (ny-1)^2 \\ y - n[(x+1)^2 + y^2 + t^2] \\ t \end{pmatrix}, \\ g_3^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} &= \frac{1}{n^2[y^2 + (t-1)^2] + (nx+1)^2} \times \\ &\times \begin{pmatrix} x + n[x^2 + y^2 + (t-1)^2] \\ y \\ t-1 + n^2[y^2 + (t-1)^2] + (nx+1)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

де n – степеневий показник.

Можна пересвідчитись, що g_1, g_2 і g_3 фіксують точки $(0 \ 1 \ 0)^\top, (-1 \ 0 \ 0)^\top$ і $(0 \ 0 \ 1)^\top$. Завдяки (11) ми маємо, що $g_1 = R_{j, \pi/2} h_1^{-1} R_{j, -\pi/2}$, $g_2 = h_2$ і $g_3 = R_{i, \pi/2} h_1^{-1} R_{i, -\pi/2}$, тоді як $g_2^{-1} g_3 g_2 g_3^{-1} = h_1^2$, $g_3^{-1} g_1 g_3 g_1^{-1} = R_{i, \pi/2} h_2^{-2} R_{i, -\pi/2}$ та $g_1^{-1} g_2 g_1 g_2^{-1} = R_{j, \pi/2} h_2^{-2} R_{j, -\pi/2}$.

Найпростіший спосіб отримати інші реалізації Γ_{BRC} – подіяти на генератори поворотом навколо головних координатних осей як $\tilde{g}_k = R_{\mathbf{n}, \pi/2} g_k R_{\mathbf{n}, -\pi/2}$, де орт \mathbf{n} є одним із $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

3. Дерево Кейлі і мультифрактальність

Одним із прямих застосувань групи Γ_{BRC} слугує модель випадкового блукання на згенерованому дереві Кейлі. Таку статистичну модель можна задіяти, зокрема, у фізиці дендритних полімерів [13]. Вона є альтернативою двовимірним моделям з використанням гіперболічних генераторів. Як перевага, розраховані тут мультифрактальні індекси легко порівнювати з іншими.

3.1. Побудова дерева Кейлі і аналіз спектра

Використовуючи реалізацію (15), пронумеруємо генеруючу множину Γ_{BRC} так:

$$\{\gamma_i \mid i = \overline{1, 6}\} = \{g_1, g_2, g_3, g_1^{-1}, g_2^{-1}, g_3^{-1}\}. \quad (16)$$

Якщо пов'язати точки \mathbb{B} з їхніми радіус-векторами і розглядати початок координат $\mathbf{0}$ як кореневу точку, шестигілкове дерево Кейлі N -го покоління вкладається у кулю \mathbb{B} і утворюється множиною $6 \times 5^{N-1}$ допустимих графів, які послідовно сполучають вершини:

$$\gamma_{i_1}[\mathbf{0}], \gamma_{i_2} \gamma_{i_1}[\mathbf{0}], \dots, \gamma_{i_N} \gamma_{i_{N-1}} \dots \gamma_{i_1}[\mathbf{0}], \quad (17)$$

де $i_t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

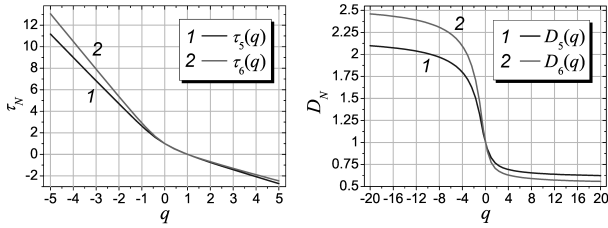


Рис. 4. Спектр мас τ_N (ліва панель) і спектр фрактальних розмірностей D_N (права панель) як функції порядку моменту q для різних поколінь N

Допустимий граф зі словом $\{i_N, i_{N-1}, \dots, i_1\}$ зумовлюється ймовірністю $p_N(i_N, i_{N-1}, \dots, i_1) = 1$, яку означено як

$$p_N(i_N, i_{N-1}, \dots, i_1) = \prod_{t=2}^N p_2(i_t, i_{t-1}), \quad (18)$$

$$p_2(i_t, i_{t-1}) = \begin{cases} 0, & |i_t - i_{t-1}| = 3, \\ 1, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (19)$$

Легко бачити, що p_N забороняє кроки назад і робить граф спрямованим. Крім того, існує зв'язок:

$$\sum_{i_1=1}^6 \dots \sum_{i_N=1}^6 p_N(i_N, i_{N-1}, \dots, i_1) = v(N), \quad (20)$$

де $v(N) = 6 \times 5^{N-1}$ – число вершин N -го покоління. Це означає, що таке дерево Кейлі є вкоріненим пучком $v(N)$ гілок (зі спільними ділянками).

Власне кажучи, композиції вихідних генераторів (16) дають нам в результаті перетворення всіх типів: параболічні, еліптичні, гіперболічні. Наївно очікується, що тільки комбінації виду γ_i^n ($n \in \mathbb{Z}$) і ті, що представлені в дужках співвідношень (13), залишаються параболічними. Ці особливості додають інтересу до вивчення (скінченного) дерева Кейлі. Разом з тим звернемося до мультифрактального аналізу.

Наше дослідження базується на статистичній сумі N -го покоління для порядку моменту q :

$$\mathcal{Z}_N(q) = \sum_{i_1=1}^6 \dots \sum_{i_N=1}^6 p_N(i_N, \dots, i_1) e^{q\mathcal{L}(i_N, \dots, i_1)}, \quad (21)$$

$$\mathcal{L}(i_N, \dots, i_1) = \sum_{t=1}^N \text{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \gamma_{i_t} \gamma_{i_{t-1}} \dots \gamma_{i_1}[\mathbf{0}]). \quad (22)$$

Математично функція $\mathcal{Z}_N(q)$ є різновидом ряду Пуанкаре за групою. Фізично (21) можна інтерпретувати як інтеграл Фейнмана від ваги Боль-

цмана за дискретними шляхами, пов'язуючи параметр q із оберненою температурою $1/T$, яка набуває додатних і від'ємних значень. При цьому вигляд функціонала \mathcal{L} повинен фактично забезпечувати фазовий перехід другого роду, геометричним аналогом якого є мультифрактальна поведінка. У цій роботі (22) можна розглядати як периметричну характеристику поверхні, яка складається із суміжних трикутників, що з'єднують кореневу точку і дві точки різних поколінь. Також зауважимо, що подібні функції раніше використовувалися в [28] для групи Фукса, яка діє в $(\mathbb{D}, \text{ds}_{\mathbb{D}}^2)$.

Простий аналіз показує, що функціонал

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^0(i_N, \dots, i_1) &= \\ &= \sum_{t=1}^N \text{dist}_{\mathbb{B}}(\gamma_{i_{t-1}} \dots \gamma_{i_1}[\mathbf{0}], \gamma_{i_t} \gamma_{i_{t-1}} \dots \gamma_{i_1}[\mathbf{0}]) \end{aligned} \quad (23)$$

не призводить до мультифрактальної поведінки через нульову дисперсію \mathcal{L}^0 -спектра. Однак, такий член можна також використати деінде.

Пронумеруємо $v(N)$ дозволених значень (22) одним індексом ζ : $\{\mathcal{L}_{\zeta} \mid \zeta = \overline{1, v(N)}\}$, щоб звести $\mathcal{Z}_N(q)$ до вигляду:

$$\mathcal{Z}_N(q) = \sum_{\zeta=1}^{v(N)} e^{q\mathcal{L}_{\zeta}}; \quad \mathcal{Z}_N(0) = v(N). \quad (24)$$

Відповідно до рецепту в [14], ми визначаємо показник $\tau_N(q)$, який часто називають спектром мас, і спектр фрактальних розмірностей $D_N(q)$, пов'язаних з розмірністю Гаусдорфа, з точністю до розмірності геометричного носія:

$$\begin{aligned} \tau_N(q) &= \frac{1}{\ln v(N)} [\ln \mathcal{Z}_N(q) - q \ln \mathcal{Z}_N(1)], \\ D_N(q) &= \frac{\tau_N(q)}{1 - q}. \end{aligned} \quad (25)$$

Аналіз цих функцій для різних N можна зробити на рис. 4. Показано, що нахил функцій ліворуч від $q = 0$ зростає при збільшенні N .

Іншою важливою характеристикою є спектр сингулярностей $f_N(\alpha_N)$, означений (у параметричній формі) за допомогою перетворення Лежандра:

$$f_N(q) = \tau_N(q) - q \frac{d\tau_N(q)}{dq}, \quad \alpha_N(q) = -\frac{d\tau_N(q)}{dq}. \quad (26)$$

За означенням встановлюється, що

$$\alpha_{N, \min} = \lim_{q \rightarrow +\infty} D_N(q), \quad \alpha_{N, \max} = \lim_{q \rightarrow -\infty} D_N(q). \quad (27)$$

Обчислені характеристики вказують на нормальну стохастизацію зі збільшенням N на рис. 5 (ліва панель), а також на досить широкий діапазон показника Ліпшиця–Гельдера α_N для $N = 6$ на рис. 5 (права панель). Тоді, за великих N застосовна центральна гранична теорема (ЦГТ) [29]. По-друге, широкий діапазон α каже про відсутність домінантної підмножини графів (фракталів) і потребу враховувати всі графи, хоч і наближено, при аналітичному обчисленні $\mathcal{Z}_N(q)$. Це мотивує нас використати ланцюг Маркова (випадкове блукання) у нашому дослідженні.

3.2. Наближення ланцюгів Маркова

Аналізуючи (24), спочатку припустимо, що спектр $\{\mathcal{L}_\zeta \mid \zeta = 1, v(N)\}$ є виродженим. Іншими словами, існує множина нерівних величин $\{\mathcal{L}_s \mid s = 1, S(N)\}$ з $S(N) \leq v(N)$. Вводячи коефіцієнт виродження w_s для кожного \mathcal{L}_s , отримуємо

$$\mathcal{Z}_N(q) = \sum_{s=1}^{S(N)} w_s e^{q\mathcal{L}_s}. \quad (28)$$

Нехай $\mathcal{L}_{\min}(N)$ і $\mathcal{L}_{\max}(N)$ такі, що $\mathcal{L}_{\min}(N) \leq \mathcal{L}_s \leq \mathcal{L}_{\max}(N)$, і в неперервній границі пишемо:

$$\mathcal{Z}_N(q) = v(N) \int_{\mathcal{L}_{\min}(N)}^{\mathcal{L}_{\max}(N)} W_N(\mathcal{L}) e^{q\mathcal{L}} d\mathcal{L}. \quad (29)$$

Беручи до уваги спостереження з рис. 5 (ліва панель), ми робимо висновок про те, що розподіл $W_N(\mathcal{L})$ для великих N апроксимується гауссовим:

$$W_N(\mathcal{L}) = A_N \exp\left[-\frac{(\mathcal{L} - \bar{\mathcal{L}}_N)^2}{2\sigma_N^2}\right], \quad (30)$$

$$\int_{\mathcal{L}_{\min}(N)}^{\mathcal{L}_{\max}(N)} W_N(\mathcal{L}) d\mathcal{L} = 1.$$

Прості обчислення дають наближений вираз:

$$\mathcal{Z}_N^*(q) = v(N) \frac{c_N(q)}{c_N(0)} \exp\left(\frac{1}{2} q^2 \sigma_N^2 + q\bar{\mathcal{L}}_N\right),$$

$$c_N(q) = \operatorname{erf}\left(\frac{\mathcal{L}_{\max}(N) - \bar{\mathcal{L}}_N - q\sigma_N^2}{\sqrt{2}\sigma_N}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\bar{\mathcal{L}}_N + q\sigma_N^2 - \mathcal{L}_{\min}(N)}{\sqrt{2}\sigma_N}\right), \quad (31)$$

де $\operatorname{erf}(x)$ є функцією помилок [30].

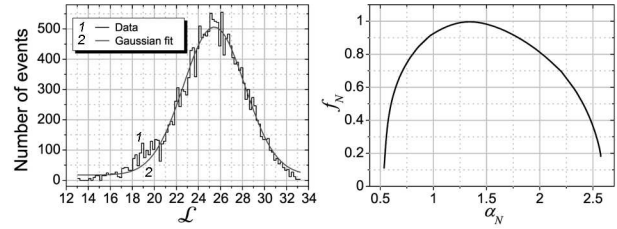


Рис. 5. Характеристики моделі з $N = 6$. Ліва панель: Кількість \mathcal{L}_ζ в інтервалі $\Delta\mathcal{L} = 0,2$ від $\mathcal{L}_{\min} \simeq 13,04$ до $\mathcal{L}_{\max} \simeq 33,1$. Права панель: Спектр сингулярностей $f_N(\alpha_N)$; $\alpha_{N,\min} \simeq 0,5353$ і $\alpha_{N,\max} \simeq 2,574$

Отже, застосування ЦГТ дозволяє звести задачу до пошуку чотирьох параметрів $\mathcal{L}_{\min}(N)$, $\mathcal{L}_{\max}(N)$, $\bar{\mathcal{L}}_N$ та σ_N , які характеризують \mathcal{L} -спектр. Хоча це наближення дозволяє відтворити показник $\tau_N(q)$ для великих N і відносно малих $|q|$, перед нами постає завдання отримати аналітичні оцінки $\mathcal{L}_{\min}^*(N)$, $\mathcal{L}_{\max}^*(N)$, $\bar{\mathcal{L}}_N^*$ і σ_N^* , оминаючи обчислення спектра $\{\mathcal{L}_\zeta \mid \zeta = 1, v(N)\}$. Для його реалізації звернемося до низки загальних властивостей.

Так \mathcal{L} -спектр $\{\mathcal{L}(i_1, \dots, i_N) \mid p_N(i_1, \dots, i_N) = 1\}$ збігається з $\{\mathcal{L}(i_N, \dots, i_1) \mid p_N(i_N, \dots, i_1) = 1\}$. Крім того, нагадаємо, що $\operatorname{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \mathbf{r}) = \operatorname{dist}_{\mathbb{B}}(\gamma[\mathbf{0}], \gamma[\mathbf{r}])$ та $\operatorname{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \gamma[\mathbf{r}]) = \operatorname{dist}_{\mathbb{B}}(\gamma^{-1}[\mathbf{0}], \mathbf{r})$ для $\gamma \in \operatorname{Isom}(\mathbb{B})$.

Також має місце правило трикутника для трьох точок $\{\mathbf{0}, \mathbf{r}_{t-1}, \mathbf{r}_t\}$:

$$\cosh \operatorname{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \mathbf{r}_t) = \cosh \operatorname{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \mathbf{r}_{t-1}) \cosh d_{t,t-1} + \sinh \operatorname{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \mathbf{r}_{t-1}) \sinh d_{t,t-1} \cos \psi_{t,t-1}, \quad (32)$$

де $d_{t,t-1} = \operatorname{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_{t-1})$; $\psi_{t,t-1}$ – кут, протилежний стороні $(\mathbf{0}, \mathbf{r}_t)$, так що

$$\cos \psi_{t,t-1} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_{t-1}}{|\mathbf{v}| |\mathbf{r}_{t-1}|}, \quad \mathbf{v} = \left. \frac{d\mathbf{r}(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0}, \quad (33)$$

використовуючи (4) для $\mathbf{r}(\theta)$ з $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{t-1}$ і $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_t$.

Оцінюючи необхідні складові, бачимо, що $d_{t,t-1} = \operatorname{dist}_{\mathbb{B}}(\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_{t-1}} \gamma_{i_t}[\mathbf{0}], \gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_{t-1}}[\mathbf{0}]) = \operatorname{dist}_{\mathbb{B}}(\gamma_{i_t}[\mathbf{0}], \mathbf{0})$. Більше того,

$$\ell = \operatorname{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \gamma_i[\mathbf{0}]) \simeq 1,762747; \quad i = \bar{1}, \bar{6}. \quad (34)$$

Для досить великих $\operatorname{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \mathbf{r}_t)$, зведемо (32) до $\operatorname{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \mathbf{r}_t) \simeq \operatorname{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \mathbf{r}_{t-1}) + \ln(\cosh \ell + \sinh \ell \cos \psi_{t,t-1})$, (35)

де останній член залежить від невідомого $\psi_{t,t-1}$.

В принципі, кут $\psi_{t,t-1}$ залежить від \mathbf{r}_{t-1} (і дії γ_{i_t}), тобто історії блукань, згенерованої

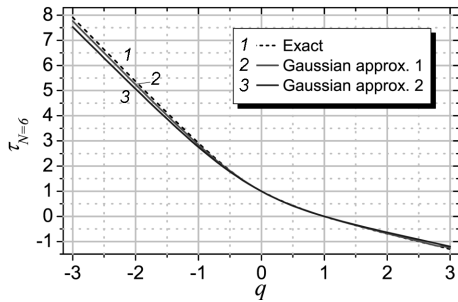


Рис. 6. Показник $\tau_N(q)$ для $N = 6$ і його апроксимації. Обидві апроксимації (кольорові лінії) мають гауссівський вигляд (31), але різні набори параметрів: червона лінія (2) використовує точні характеристики \mathcal{L}_{\min} , \mathcal{L}_{\max} , $\bar{\mathcal{L}}_N$ і σ_N , тоді як синя лінія (3) використовує параметри (38), (39) в наближенні Маркова

$\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_{t-1}}$. Звернення до наближення Маркова [29] означає нехтування цією залежністю кута від точки. Якщо замінити логарифмічний член у (35) деяким $\xi_{i_t, i_{t-1}}$, отримуємо адитивний ланцюг:

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \gamma_{i_1}[\mathbf{0}]) &= \ell, \\ \text{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \gamma_{i_1} \gamma_{i_2}[\mathbf{0}]) &\simeq \ell + \xi_{i_2, i_1}, \\ \text{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \gamma_{i_3}[\mathbf{0}]) &\simeq \ell + \xi_{i_3, i_2} + \xi_{i_2, i_1}, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (36)$$

Поєднуючи, ми отримуємо наближений вираз за умови $p_N(i_1, \dots, i_N) = 1$:

$$\mathcal{L}^*(i_1, \dots, i_{N-1}, i_N) = N\ell + \sum_{t=1}^{N-1} (N-t) \xi_{i_{t+1}, i_t}, \quad (37)$$

який залежить від сталої 6×6 -матриці $\|\xi_{i,j}\|$.

Таким чином, характеристики \mathcal{L} -спектра можна оцінити так:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_{\min}^*(N) \\ \mathcal{L}_{\max}^*(N) \\ \bar{\mathcal{L}}_N^* \end{aligned} \right\} = N\ell + \frac{N(N-1)}{2} \left\{ \begin{aligned} \min_{p_2(i,j)=1} (\xi_{i,j}) \\ \max_{p_2(i,j)=1} (\xi_{i,j}) \\ \bar{\xi} \end{aligned} \right\}, \quad (38)$$

$$(\sigma_N^*)^2 = a_0(N) \Delta(\bar{\xi}^2)_0 + 2 \sum_{t=1}^{N-2} a_t(N) \Delta(\bar{\xi}^2)_t; \quad (39)$$

$$\bar{\xi} = \sum_{i,j=1}^6 \frac{p_2(i,j)}{v(2)} \xi_{i,j}, \quad \Delta(\bar{\xi}^2)_t \equiv (\bar{\xi}^2)_t - \bar{\xi}^2, \quad (40)$$

$$(\bar{\xi}^2)_t = \sum_{i_1=1}^6 \dots \sum_{i_{2+t}=1}^6 \frac{p_{2+t}(i_1, \dots, i_{2+t})}{v(2+t)} \xi_{i_2, i_1} \xi_{i_{2+t}, i_{1+t}}, \quad (41)$$

$$a_0(N) + 2 \sum_{t=1}^{N-2} a_t(N) = \frac{N^2(N-1)^2}{4}, \quad (42)$$

$$a_t(N) = \sum_{s=1}^{N-1-t} s(s+t). \quad (43)$$

Видно, що (41) враховує далекосяжні кореляції. Насправді $(\bar{\xi}^2)_t \rightarrow \bar{\xi}^2$, і $a_t(N)$ спадає при $t \geq 3$. Це також дозволяє нам редукувати (39) згідно з ідеологією випадкового блукання.

Вважаємо природним ввести $\|\xi_{i,j}\|$ як

$$\begin{aligned} \xi_{i,j} = \sum_{g \in G} \rho_g(i,j) [\text{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, g\gamma_j\gamma_i[\mathbf{0}]) - \\ - \text{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, g\gamma_j[\mathbf{0}])], \end{aligned} \quad (44)$$

де $G \subset \Gamma_{\text{BRC}}$ — деякий (скінченний) набір генераторів g ; ρ_g — вага кожного g .

Зверніть увагу на те, що (44) узагальнює вираз із [28], де $g = \text{id}$ використовується в двовимірній моделі. У цьому разі причиною залучення додаткових g є отримання достатньо великих значень гіперболічної відстані, коли $\cosh, \sinh \rightarrow \frac{1}{2} \exp$ в (32).

Тут ми перевіряємо реалізацію, коли G є просто генеруючим набором (16):

$$\begin{aligned} \xi_{i,j} = \sum_{k=1}^6 \frac{p_2(j,k)}{5} [\text{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \gamma_k\gamma_j\gamma_i[\mathbf{0}]) - \\ - \text{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{0}, \gamma_k\gamma_j[\mathbf{0}])]. \end{aligned} \quad (45)$$

Застосування цього визначення для $N = 6$ дає нам $\mathcal{L}_{\min}^*(N) \simeq 12,8784$, $\mathcal{L}_{\max}^*(N) \simeq 33,1276$, $\bar{\mathcal{L}}_N^* \simeq 24,6803$ і $\sigma_N^* \simeq 2,85126$, а точні параметри $\mathcal{L}_{\min}(N) \simeq 13,0367$, $\mathcal{L}_{\max}(N) \simeq 33,0990$, $\bar{\mathcal{L}}_N \simeq 25,0977$, і $\sigma_N \simeq 3,13207$. Підставивши ці два набори в (31) і обчисливши $\tau_N(q)$ за допомогою (25), ми порівнюємо ці наближення за відносно малих $|q|$ на рис. 6. Фізично ситуація відповідає високотемпературному наближенню середнього поля, оскільки $q \sim 1/T$. Хоча подвійне наближення погіршує опис, воно усуває необхідність обчислювати спектр \mathcal{L} . Ми залишаємо можливі вдосконалення для подальших досліджень. Деякі аспекти щодо ергодичності моделі також можуть бути уточнені.

4. Деформації і простір Тейхмюллера

Визначимо простір деформацій $\text{Def}(M)$ для орбіфолду $M \simeq \mathbb{B}/\Gamma_{\text{BRC}}$ за допомогою узагальненої

теореми жорсткості Мосту [1]. Тоді простір деформацій гіперболічного тривимірного многовиду M можна означити як

$$\text{Def}(M) \simeq \text{Teich}(\partial M), \quad (46)$$

де $\text{Teich}(\partial M)$ – простір Тейхмюллера маркованих структур на замкненій і орієнтованій поверхні ∂M .

Ключовим кроком до нашої мети є опис простору Тейхмюллера $\text{Teich}(\Sigma)$, асоційованого з октаедричною поверхнею Σ , що має шість каспів і $S_4 \times \mathbb{Z}_2$ симетрію, як показано на рис. 2 (праворуч). Маркуючи Σ і стабілізуючи кожну ідеальну вершину у Σ за допомогою абелевої підгрупи $A_i = \langle \gamma_i, \tilde{\gamma}_i \in \Gamma_{\text{BRC}} | \gamma_i^n \tilde{\gamma}_i^m = \tilde{\gamma}_i^m \gamma_i^n \rangle$, утворену з меридіану і довготи для $i = \overline{1, 6}$, спочатку побудуємо декорований простір Тейхмюллера $\mathcal{T}(\Sigma)$ [5]. Це простір гіперболічних метрик на Σ з додаванням орисфер з центрами у каспах. Видалення декорації означає проєкцію $\mathcal{T}(\Sigma) \mapsto \text{Teich}(\Sigma)$.

Використовуючи радіус-вектори $\mathbf{e}_{\pm x} = (\pm 1 \ 0 \ 0)^\top$, $\mathbf{e}_{\pm y} = (0 \ \pm 1 \ 0)^\top$, і $\mathbf{e}_{\pm t} = (0 \ 0 \ \pm 1)^\top$ для каспів, означимо набір вершин $V = \{\mathbf{e}_{\pm x}, \mathbf{e}_{\pm y}, \mathbf{e}_{\pm t}\}$ з кардинальністю $|V| = 6$, і набір геодезичних ребер $E = \{E_{ji}\}$ з $|E| = 12$, які належним чином з'єднують вершини \mathbf{e}_j , $\mathbf{e}_i \in V$ октаедра. Далі ми позначаємо трикутні грані як F_i (або Δ_i) з очевидним числом $|F| = 8$.

Якщо декорувати октаедр за допомогою набору орисфер $H = \{H_{\pm x}, H_{\pm y}, H_{\pm t}\}$, які центруються у каспах V , всі дискретні метрики (скінченні довжини сегментів ребер, обмежених H) формують многовид дійсної розмірності $|E|$. Цей многовид розширюється дискретними конформними класами, що представляють підмноговиди розмірності $|V|$. Окрім того, конформна еквівалентність наборів метрик також допускає конформність триангуляцій граней октаедра. Таким чином, дискретний конформний клас відповідає точці простору Тейхмюллера $\mathcal{T}_{|V|}$, наділеному групою класів відображення $\pi_0(\text{Aut}(\Sigma))$, яка ізоморфна групі кіс перестановок вершин.

4.1. Декорування октаедричної поверхні

Опишемо декоровану геометрію в термінах набору евклідових висот $h = \{h_{\pm x}, h_{\pm y}, h_{\pm t}\}$, $h_i \in [0; 1]$,

² Сподіваємось, що те саме позначення h_i для генераторів у розділі 2 і для висот тут не спричинить плутанину завдяки контексту.

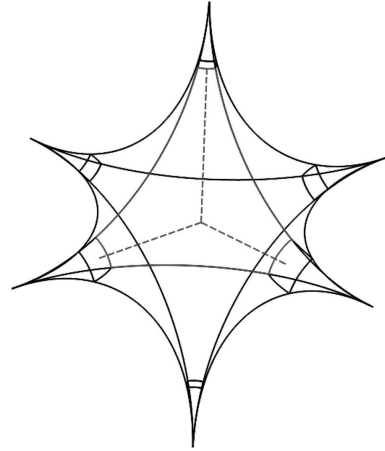


Рис. 7. Декорована поверхня октаедра. Перетинаючи поверхню октаедра, кожна орисфера h_i , центрована в ідеальній вершині октаедра \mathbf{e}_i , продукує квадрат з прямими кутами. Довільно вибираючи висоти h_i , тобто евклідові відстані від орисфер до початку координат (пунктирні прямі), на кожній грані октаедра одержується шестикутник, схожий на утворений червоними лініями. Довжини червоних сегментів ребер октаедра дорівнюють $\lambda_{i,j}$, у той час як довжина кожного ребра квадратного контура навколо каспідального хвоста визначається w_i

задаючи положення орисфер H так, що $h_i \mathbf{e}_i$ – точка H_i , найближча до початку координат (див. рис. 7). Тоді кінцева точка сегмента ребра E_{ji} , який закінчується на H_i , задається радіусом-вектором:

$$\mathbf{e}_{j,i} = 2 \frac{(1 - h_i)^2}{(1 - h_i)^2 + 4} \mathbf{e}_j + \frac{(1 + h_i)^2}{(1 - h_i)^2 + 4} \mathbf{e}_i, \quad (47)$$

який прямує до $\mathbf{e}_i \in \partial \mathbb{B}$, коли $h_i \rightarrow 1$. Інший кінець того ж сегмента ребра задається $\mathbf{e}_{i,j}$. Тоді для двох сусідніх вершин i, j і відповідних висот h_i, h_j ми знаходимо гіперболічну довжину між $\mathbf{e}_{j,i}$ і $\mathbf{e}_{i,j}$:

$$\rho(h_i, h_j) = 2 \operatorname{arcsinh} \frac{3(h_i + h_j) - h_i h_j - 1}{2\sqrt{2(1 - h_i^2)(1 - h_j^2)}}. \quad (48)$$

При перекриванні орисфер: $\rho(h_i, h_j) < 0$.

Функції $\lambda_{i,j} = \rho(h_i, h_j)$ породжують набір $\Lambda = \{\lambda_{\pm x, \pm y}, \lambda_{\pm x, \pm t}, \lambda_{\pm y, \pm t}\} \in \mathbb{R}^{|E|}$ не обов'язково відмінних λ -довжин декорованих ребер октаедра. Ці λ задають координати простору Тейхмюллера. Однак число незалежних параметрів залишається рівним $|V|$, і вони можуть розглядатися як модулі.

У ідеального трикутника Δ_i (грань октаедра F_i) з вершинами $\{\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}\}$, декорованого орисферами $\{H_{i_1}, H_{i_2}, H_{i_3}\}$, вибираємо конфігурації, що відповідають нерівностям трикутника:

$$\begin{aligned} \lambda_{i_2, i_1} + \lambda_{i_3, i_1} &> \lambda_{i_2, i_3}, \\ \lambda_{i_2, i_1} + \lambda_{i_2, i_3} &> \lambda_{i_3, i_1}, \\ \lambda_{i_3, i_1} + \lambda_{i_2, i_3} &> \lambda_{i_2, i_1}. \end{aligned} \quad (49)$$

Також зауважимо, що вектор, дотичний до ребра E_{j_i} у кінцевій точці $\mathbf{e}_{j,i}$ є таким:

$$\mathbf{v}_{j,i} = (3 - h_i)(1 + h_i) \mathbf{e}_i - 4(1 - h_i) \mathbf{e}_j. \quad (50)$$

Окрім того, нам знадобляться довжини w_i непорожніх шляхів $F_j \cap H_i$, що з'єднують сусідні кінці $\mathbf{e}_{j\alpha,i}$ усічених ребер $E_{j\alpha i}$. Очікується, що $w_i \geq \text{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{e}_{j_1,i}, \mathbf{e}_{j_2,i})$, де кінці $\mathbf{e}_{j_1,i}, \mathbf{e}_{j_2,i} \in F_j \cap H_i$, і $w_i \rightarrow 0$ при $h_i \rightarrow 1$.

Довжину $w_i = w(h_i)$ можна знайти прямим інтегруванням $ds_{\mathbb{B}}$ уздовж шляху між сусідніми кінцями, які належать H_i , і вона визначається як

$$w(h) = \sqrt{2} \frac{1 - h}{1 + h}, \quad (51)$$

подробіці дивіться у Додатку Б.

Таким чином, декорування приводить до нанесення прямокутного шестикутника на кожную грань F_i октаедра (див. рис. 7) із використанням двох наборів довжин: $\{\lambda_{i_2, i_1}, \lambda_{i_3, i_1}, \lambda_{i_2, i_3}\}$ і $\{w_{i_1}, w_{i_2}, w_{i_3}\}$. Оскільки прями кути шестикутників зберігаються за довільного набору висот h , декорація має конформну властивість. Як зазначається в [15, 16, 31], можна ускладнити структуру шляхом додаткової триангуляції шестикутників.

Функція $w(h)$ задовольняє рівність:

$$w(h) = w(\tilde{h}) e^{\epsilon \tau_e}, \quad (52)$$

$$\tau_e = \text{dist}_{\mathbb{B}}(h\mathbf{e}, \tilde{h}\mathbf{e}), \quad \epsilon = \text{sign}(\tilde{h} - h), \quad (53)$$

для вершини $\mathbf{e} \in V$.

Це співвідношення зумовлює буст (приріст) h :

$$\tilde{h} = \frac{h + \tanh(u_e/2)}{1 + h \tanh(u_e/2)}, \quad (54)$$

де $u_e \in \mathbb{R}$, і (52) відтворюється для $u_e = \epsilon \tau_e$.

Корисні співвідношення виникають при введенні середньої точки ребра E_{j_i} , тобто $\mathbf{m}_{j,i} = (1 - 2^{-1/2})(\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i)$, і таких відстаней:

$$p_{j,i} = \text{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{m}_{j,i}, \mathbf{e}_{j,i}), \quad p_{i,j} = \text{dist}_{\mathbb{B}}(\mathbf{m}_{j,i}, \mathbf{e}_{i,j}), \quad (55)$$

так що $\lambda_{j,i} = p_{j,i} + p_{i,j}$. Геометрично одержуємо, що $w_i = \exp(-p_{j,i})$ і $w_j = \exp(-p_{i,j})$ [5].

Позначаючи $p_{i_2, i_1} = p_{i_3, i_1} \equiv a_i$, $p_{i_1, i_2} = p_{i_3, i_2} \equiv b_i$, і $p_{i_2, i_3} = p_{i_1, i_3} \equiv c_i$, маємо $\lambda_{i_2, i_1} = a_i + b_i$, $\lambda_{i_3, i_1} = a_i + c_i$, і $\lambda_{i_2, i_3} = b_i + c_i$. Знаходимо [15], що

$$\begin{aligned} w_{i_1} &= e^{-a_i}, & a_i &= \frac{1}{2}(\lambda_{i_2, i_1} + \lambda_{i_3, i_1} - \lambda_{i_2, i_3}), \\ w_{i_2} &= e^{-b_i}, & b_i &= \frac{1}{2}(\lambda_{i_2, i_1} + \lambda_{i_2, i_3} - \lambda_{i_3, i_1}), \\ w_{i_3} &= e^{-c_i}, & c_i &= \frac{1}{2}(\lambda_{i_3, i_1} + \lambda_{i_2, i_3} - \lambda_{i_2, i_1}). \end{aligned} \quad (56)$$

Також стверджується, що $\lambda_{i,j} = -\ln(w_i w_j)$.

Вводячи $h_i = \tanh(u_i/2)$ і $\bar{u}_i = u_i - \frac{1}{2} \ln 2$, дискретні конформні метрики визначаємо як

$$w_i = e^{-\bar{u}_i}, \quad \ell_{i,j} = e^{\lambda_{i,j}/2}, \quad \lambda_{i,j} = \bar{u}_i + \bar{u}_j, \quad (57)$$

де $\ell_{i,j}$ і w_i – довжини і висоти Пеннера [5].

Два розширені набори $\{\lambda_{i,j}^{(1)}, w_i^{(1)}\}$ і $\{\lambda_{i,j}^{(2)}, w_i^{(2)}\}$ належать до одного дискретного конформного класу і є ізометричними, якщо існує однопараметричне перетворення Мебіуса для всіх $i = 1, |V|$:

$$h_i^{(2)} = \frac{h_i^{(1)} + \tanh(\tau/2)}{1 + h_i^{(1)} \tanh(\tau/2)}, \quad \bar{u}_i^{(2)} = \bar{u}_i^{(1)} + \tau. \quad (58)$$

Тоді впорядкований набір $U_0 = \{\bar{u}_{\pm x}, \bar{u}_{\pm y}, \bar{u}_{\pm t}\}$ із шести фіксованих додатних чисел породжує клас еквівалентності $\{U_\tau\}$, де кожен набір $U_\tau = \{\bar{u}_{\pm x} + \tau, \bar{u}_{\pm y} + \tau, \bar{u}_{\pm t} + \tau\}$ має невід'ємні складові за певних $\tau \in \mathbb{R}$.

Конформне розтягування поверхневої структури можна зумовити опуклою функцією “енергії” $\mathcal{E}(\{\bar{u}_i\})$ так, що

$$\frac{d\bar{u}_i}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{E}(\{\bar{u}_i\})}{\partial \bar{u}_i}. \quad (59)$$

Дане рівняння подібне до дискретного потоку Річчі/Ямабе [15, 16]; а об'єм каспідальних хвостів, обрізаних орисферами, може слугувати як $\mathcal{E}(\{\bar{u}_i\})$. Інші функції пропонуються також в [15, 16].

4.2. Група класів відображення

Деякі перестановки \bar{u}_i в U_0 , які приводять до нееквівалентного \tilde{U} , можуть зберігати шестикутники на гранях, побудовані на основі U_0 . Вони генеруються двома оберганнями четвертого порядку навколо ортогональних осей, які задають групу класів відображення $\mathcal{G}^* = \langle \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2 \mid \hat{\tau}_1^4 = \hat{\tau}_2^4 = 1 \rangle$ [32].

Представники \mathcal{G}^* переставляють вершини циклічних границь, визначених таким чином.

Нехай $\{\Delta_\alpha \mid \alpha = \overline{1,4}\}$ – цикл суміжних трикутників (граней октаедра), так що $\Delta_\alpha \cap \Delta_{\alpha+1} = E_\alpha$, де α – циклічний індекс: $\Delta_5 = \Delta_1$. Позначаючи ідеальні ребра трикутника Δ_α як $\{E_{\alpha-1}, E_\alpha, \tilde{E}_\alpha\}$, набір $\{\tilde{E}_\alpha \mid \alpha = \overline{1,4}\}$ формує границю циклу $\{\Delta_\alpha \mid \alpha = \overline{1,4}\}$. Зрозуміло, що в площинах $\mathbb{D}_{t=0}$, $\mathbb{D}_{y=0}$, $\mathbb{D}_{x=0}$ є чотиристоронні границі, які розділяють три пари циклів трикутників.

Оперуючи $\hat{\tau}_k$, чотири висоти \bar{u}_i циклічно переставляються в одній із таких площин, а решта дві висоти, що лежать на осі, ортогональній до площини, фіксуються. Тим самим визначаємо *твісти Дена* у трьох ортогональних площинах:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_1^\epsilon[U_0] &= \{\bar{u}_{\mp\epsilon y}, \bar{u}_{\pm\epsilon x}, \bar{u}_{\pm t}\}, \\ \hat{\tau}_2^\epsilon[U_0] &= \{\bar{u}_{\mp\epsilon t}, \bar{u}_{\pm y}, \bar{u}_{\pm\epsilon x}\}, \\ \hat{\tau}_3^\epsilon[U_0] &= \{\bar{u}_{\pm x}, \bar{u}_{\mp\epsilon t}, \bar{u}_{\pm\epsilon y}\}, \end{aligned} \quad (60)$$

де $\epsilon = \pm 1$ відповідає дії генератора і оберненого до нього; $\hat{\tau}_3 = \hat{\tau}_1^{-1}\hat{\tau}_2^{-1}\hat{\tau}_1$. Зауважимо, що має місце співвідношення $\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2\hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_2\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2$ з групи кіс B_3 .

Це означає, що два різних маркування октаедричної поверхні пов'язані дією групи \mathcal{G}^* . Негайно маємо, що $\mathcal{M}^*(\Sigma) \simeq \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|} / \mathcal{G}^*$ є простором модулів.

Зауважимо, що група класів відображення, діючи комбінаторно на шість (немаркованих) проколів сфери $\partial\mathbb{B}$, асоціюється з групою кіс B_6 [33]. І цей факт можна взяти за відправну точку [32].

Описуючи \mathcal{G}^* , введемо шестивимірний вектор:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{u}_+ + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{u}_-, \quad \mathbf{u}_\pm = \begin{pmatrix} \bar{u}_{\pm x} \\ \bar{u}_{\pm y} \\ \bar{u}_{\pm t} \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Таким чином, реалізація $\rho : \mathcal{G}^* \mapsto \text{Mat}(6, \{0, 1\})$ задається матрицями перестановок $T_i = \rho(\hat{\tau}_i)$, розкладеними завдяки множенню Кронекера:

$$T_i = I_2 \otimes M_i + J_2 \otimes N_i, \quad (62)$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & N_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & N_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & N_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (64)$$

так що $T_i^4 = I_6$ і $\det T_i = -1$; I_n – одинична матриця в n вимірах.

Має місце $\rho(g_1g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ для $g_{1,2} \in \mathcal{G}^*$, і

$$T_i^{-1} = I_2 \otimes M_i^\top + J_2 \otimes N_i^\top, \quad (65)$$

$$T_i T_j = I_2 \otimes M_i M_j + J_2 \otimes (M_i N_j + N_i M_j), \quad (66)$$

$$\begin{aligned} T_i \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (M_i \mathbf{u}_+ + N_i \mathbf{u}_-) + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes (M_i \mathbf{u}_- + N_i \mathbf{u}_+), \end{aligned} \quad (67)$$

де $J_2^2 = I_2$ і $N_i N_j = 0$ за побудовою.

Нова конфігурація визначається як $\tilde{\mathbf{u}} = \rho(g)[\mathbf{u}]$, $g \in \mathcal{G}^*$. Очевидно, що перестановки зберігають форму:

$$\xi_n = \sum_{s=x,y,t} (\bar{u}_{+s}^n + \bar{u}_{-s}^n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (68)$$

Присвоєння $J = T_1 T_2$ і $S = T_1 J$ приводить до співвідношення $S^2 = J^3 = I_6$, притаманного $PSL(2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$; і B_3 виглядає як центральне розширення $PSL(2, \mathbb{Z})$ [34]. Також відзначимо q -деформований аналог B_3 , представлений в [35].

Щоб описати структуру групи, представимо T_i для $i = \overline{1,3}$ у вигляді:

$$T_i = I_2 \otimes R_i + (I_2 + J_2) \otimes N_i, \quad R_i = M_i - N_i. \quad (69)$$

Знаходимо, що кожна матриця $R_i = \exp(\frac{\pi}{2} X_i)$ генерується X_i з алгебри $so(3)$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (70)$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k, \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}, \quad (71)$$

де ε_{ijk} – тензор Леві-Чівіті, а оператор Казимира дорівнює

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = -2I_3. \quad (72)$$

Нехай $\mathcal{R}_i = I_2 \otimes R_i = \exp(\frac{\pi}{2} I_2 \otimes X_i)$. Подамо T_i як

$$T_i = \mathcal{R}_i \mathcal{A}_i, \quad (73)$$

$$\mathcal{A}_i = I_2 \otimes (I_3 + R_i^{-1} N_i) + J_2 \otimes (R_i^{-1} N_i), \quad (74)$$

де $\mathcal{A}_i^2 = I_6$ вказує на циклічність другого порядку.

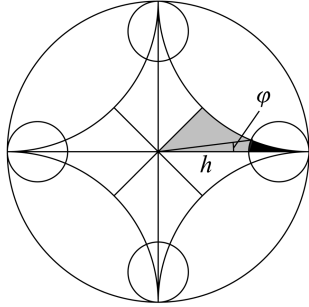


Рис. 8. Ідеальний квадрат, розділений на вісім частин. Площа сірого сегмента A_{Δ} задається (77). Дефект $\pi/4 - A_{\Delta}$ визначає площу чорного каспідального хвоста

Виключивши $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \rangle$ з \mathcal{G}^* , ми залишаємося з підгрупою $\langle R_1, R_2 | R_1^4 = R_2^4 = I_3 \rangle$ в $SO(3)$, яка переставляє α_s у початковому векторі $\alpha = (\alpha_x \ \alpha_y \ \alpha_t)^T \in \mathbb{R}^3$, при ототожненні

$$\alpha_s \leftrightarrow \bar{u}_{\pm s}, \quad -\alpha_s \leftrightarrow \bar{u}_{\mp s}, \quad s \in \{x, y, t\}. \quad (75)$$

На цьому завершимо аналіз структури групи \mathcal{G}^* , яка діє в евклідовому просторі (модуль) [33] і залишає інваріантним такий інтервал:

$$ds_{\mathcal{M}}^2 = \sum_{s=x,y,t} (d\bar{u}_{+s}^2 + d\bar{u}_{-s}^2). \quad (76)$$

З іншого боку, приписуючи додатні дійсні числа ідеальним ребрам октаедра ($E_{ij} \mapsto \lambda_{i,j}$) і тим самим визначаючи точки $P \in \mathcal{T}(\Sigma)$ у просторі Тейхмюллера, λ -довжини є природними для дії групи класів відображення $\mathcal{G}(\Sigma)$. Таким чином, $\mathcal{G}(\Sigma)$ діє на $\mathcal{T}(\Sigma)$. Якщо $\varphi \in \mathcal{G}(\Sigma)$, існує відображення $\varphi_*: \mathcal{T}(\Sigma) \mapsto \mathcal{T}(\Sigma)$ таке, що для дуги E виконується $\lambda(E; P) = \lambda(\varphi E; \varphi_* P)$. Оскільки точка \mathcal{T} визначається Λ -множиною, легко показати, що $\varphi_* = \varphi^{-1}$. Описавши дію групи \mathcal{G}^* , ми опускаємо тут явні перетворення λ -довжин, які стають тотожностями в термінах U і $g[U]$, де $g \in \mathcal{G}^*$.

Таким чином, при формулюванні фізичних моделей слід врахувати конформність поверхневих структур та їх перетворення під дією групи класів відображення. Одним із привабливих аспектів подальшого дослідження є квантування геометрії.

4.3. До квантування площі

Розглянемо фігуру у формі зірки, обмежену ребрами октаедра і утворену трьома ідеальними квадратами, що лежать в ортогональних площинах

$\mathbb{D}_{t=0}, \mathbb{D}_{y=0}, \mathbb{D}_{x=0}$. Проаналізуємо, як наблизитись до квантового спектра площі таких квадратів.

Розклавши один декорований квадрат на вісім частин (див. рис. 8), отримаємо, що площа кожної частини залежить від висоти h як

$$A_{\Delta}(h) = \frac{\pi}{4} - \frac{1-h}{1+h}. \quad (77)$$

Для простоти ми встановлюємо $h_i = h \in [2^{-1/2}; 1]$ для $i \in \{\pm x, \pm y, \pm t\}$ і записуємо повну площу прямокутного восьмикутника як $A = 8A_{\Delta}$.

Визначаючи $h = \tanh(u/2)$ як вище, ми отримуємо геометричні співвідношення:

$$\frac{1-h}{1+h} = e^{-u} = \sqrt{\frac{1}{2} \tan \varphi}, \quad (78)$$

де кут φ вказано на рис. 8. Зверніть увагу на те, що (78) точно дорівнює гіперболічній довжині сегмента орикола, який є темним ребром сірої області.

Це негайно веде до (стаціонарного) антикінку:

$$\varphi(\bar{u}) = \arctan e^{-2\bar{u}}, \quad \bar{u} \in [0; +\infty), \quad (79)$$

де модуль $\bar{u} = u - \frac{1}{2} \ln 2$ є таким, як уведено раніше.

Таким чином, (79) є розв'язком одновимірної моделі синус-Гордона з таким інтегралом дії і рівнянням руху [17]:

$$S = \int \left\{ \frac{1}{2} (\partial_{\bar{u}} \varphi)^2 + \frac{1}{4} [1 - \cos(4\varphi)] \right\} d\bar{u}, \quad (80)$$

$$\partial_{\bar{u}}^2 \varphi - \sin(4\varphi) = 0, \quad (81)$$

які інваріантні відносно глобального перетворення $\varphi \rightarrow \varphi + \pi n/2$, $n \in \mathbb{N}$. У загальному випадку різних висот h_i дія S легко записується для секстету полів $\{\varphi_i | i = \overline{1, |V|}, |V| = 6\}$, зберігаючи інваріантність щодо перестановок, зумовлених групою класів відображення. За відсутності взаємодії між компонентами секстету, рівняння руху набувають вигляду (81), але різняться початковими умовами.

Енергія антикінка (79) визначається інтегралом:

$$\int_0^{\infty} \left\{ (\partial_{\bar{u}} \varphi)^2 + \frac{1}{2} [1 - \cos(4\varphi)] \right\} d\bar{u} = 1. \quad (82)$$

Ми припускаємо, що наша задача торкається квантування відношення:

$$2 \left(\frac{\pi}{4} - A_{\Delta} \right)^2 = \tan \varphi, \quad (83)$$

де права частина виражається через самодію W :

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{W(\varphi)}}{1 + \sqrt{1 - W(\varphi)}}, \quad (84)$$

$$W(\varphi) = \frac{1}{2} [1 - \cos(4\varphi)]. \quad (85)$$

Ми залишаємо пошук розв'язку і його дослідження для майбутньої роботи, яка має показати можливий зв'язок із низьковимірною петльовою квантовою гравітацією і спіною піною [11, 36]. Подібне завдання виникне і під час квантування довжин (див. також [18]).

Тут ми хотіли б проаналізувати площу фазового простору. Якщо ввести імпульс $p = \partial_{\dot{\varphi}}\varphi$, дужку Пуассона $\{\varphi, p\} = 1$ і врахувати, що $W(\varphi) = \sin^2(2\varphi)$, динаміка генеруватиметься гамільтоніаном:

$$H = \frac{p^2 - \sin^2(2\varphi)}{2}. \quad (86)$$

Режими такої моделі зображено на рис. 9.

Розв'язок (79) відповідає $H = 0$ і слугує межею для режиму $H < 0$ з циклічними траєкторіями. Позначаючи $\varepsilon = -2H \geq 0$ у цих випадках, визначимо змінну дії, пов'язану з "квантом" площі фазового простору:

$$\begin{aligned} J &\equiv \oint p(\varphi) d\varphi = -4 \int_{\varphi_0(\varepsilon)}^{\pi/4} \sqrt{W(\varphi) - \varepsilon} d\varphi = \\ &= 2E(\sqrt{1 - \varepsilon}) - 2\varepsilon K(\sqrt{1 - \varepsilon}), \end{aligned} \quad (87)$$

де $\varphi_0(\varepsilon) = (1/2) \arcsin \sqrt{\varepsilon}$; $K(k)$ і $E(k)$ – повні еліптичні інтеграли першого і другого роду [30]. Отже, площа n (червоних або чорних) циклів для $\varepsilon \in [0; 1)$ дорівнює $nJ(\varepsilon)$, де $J(0) = 2$ і $J(1) = 0$.

Звісно, отримані результати легко узагальнити на випадок різних висот h_i , коли індукована симплектична двоформа стає $\omega = \sum_{i=1,6} dp_i \wedge d\varphi_i$. Ми розглядаємо її як основу для побудови алгебри, спектри генераторів якої вирішують проблему квантування [19, 20].

5. Обговорення

Вкладаючи всі структури, пов'язані з доповненням кілець Борромео (ДКБ/BRC), в одиничну кулю Пуанкаре \mathbb{B} з її групою ізометрій $\text{Isom}(\mathbb{B})$, ми розпочинаємо з опису геометрії ДКБ і знаходження реалізації $\Gamma_{\text{BRC}} \subset \text{Isom}(\mathbb{B})$ фундаментальної

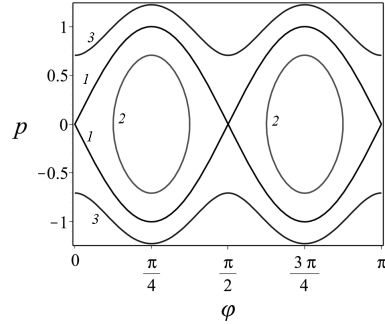


Рис. 9. Фазовий портрет траєкторій при фіксованій енергії H в (86). Чорна крива (1) відповідає $H = 0$. Синя крива (3) характерна для $H > 0$ (розсіювання), тоді як червона крива (2) – для $H < 0$. При $H = -1/2$ еліпси стягуються в точки з координатами $((2n + 1)\pi/4; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$

групи $\pi_1(\text{BRC}) \simeq \mathbb{Z}_2^3 \times \mathcal{C}_3$. Використовуючи пропозицію Терстона щодо покриття ДКБ двома октаедрами [1], ми робимо це за кілька кроків.

Нам зручно спочатку зафіксувати чотиривершинну основу одного октаедра в площині одиничного диска \mathbb{D} за допомогою параболічних $SU(1, 1)$ -ізометрій (див. рис. 2). Розширивши дію параболічних генераторів до трьох вимірів за рахунок перетворення з [3] і далі, оперуючи оберненнями навколо головних осей, отримуємо надповний набір із дванадцяти генераторів. А саме, ми приходимо до шести пар параболічних генераторів $\langle h_i, \tilde{h}_i \rangle$ довгот і меридіанів, які фіксують кожну з шести вершин октаедра і утворюють абелеві підгрупи (див. Додаток А).

Далі ми вибираємо три пари генераторів (14), прив'язаних до різних осей. Вони відповідають тору T^3 і ізоморфні фундаментальній групі ДКБ [4]. Щоб отримати Γ_{BRC} у представленні Віртингера (13), ми виражаємо три з шести генераторів через інші (15), вибрані як незалежні.

Таким чином, спочатку ми отримуємо дванадцять генераторів, що діють у трьох вимірах, а потім зменшуємо їх число до шести і, нарешті, до трьох. Це дозволяє проаналізувати структуру Γ_{BRC} , застосовувати її в геометрії і побудові простору Тейхмюллера. Дійсно, дванадцять незалежних генераторів є зручними для облицювання \mathbb{B} октаедрами, а також для отримання максимально симетричного доповнення [25], представленого ромбічним додекаедром на рис. 3 (праворуч). Можливо, застосована схема також буде корисною для реалізації групи в термінах кватерніонів [24].

Реалізувавши групу Γ_{BRC} , природно звернутися до задачі отримання функцій, інваріантних щодо дії групи. Фактично, в [3] побудовано базис, що складається з θ -функцій Якобі, симетризованих щодо групи ДКБ як підгрупи $SL(2, \mathbb{C})$.

Тут ми розглядаємо дерево Кейлі, вкладене в кулю \mathbb{B} і вкорінене у початку координат, для групи Γ_{BRC} , і зосереджуємося на мультифрактальних властивостях статистичної суми $\mathcal{Z}_N(q)$ з (21), означеної для усіченого дерева N -го покоління. Вона розглядається як різновид ряду Пуанкаре з ваг Больцмана для дискретних шляхів, де порядок моменту q відповідає оберненій температурі $1/T$ у фізиці та набуває додатних і від'ємних значень. Оскільки звичайний ряд Пуанкаре з ваг Больцмана, визначених єдиною гіперболічною відстанню порядку N між вершинами дерева, не виявляє мультифрактальності, ми використовуємо функціонал \mathcal{L} із "взаємодією" виду (22) і порядку N^2 . Він нагадує периметричну характеристику поверхні, утворену суміжними трикутниками, що з'єднують кореневу точку і дві найближчі вершини [28]. Крім того, шестигілкові графи, які виникають там, можуть імітувати дендритні полімери [13].

Числовий аналіз показує швидку стохастизацію \mathcal{L} зі збільшенням N і мультифрактальну поведінку $\mathcal{Z}_N(q)$ (див. рис. 4), а показники її характеристик легко порівнюються для різних моделей і допускають фізичну інтерпретацію [14].

Таким чином, отримані мультифрактальні показники, такі як фрактальні розмірності, вказують на відсутність домінантної підмножини шляхів і необхідність урахування всіх графів, принаймні приблизно, у бажаному аналітичному описі. З іншого боку, для великих N поведінка стає зумовленою центральною граничною теоремою. Це дозволило застосувати ланцюг Маркова (випадкове блукання) і обчислити статистичну суму в наближенні Гауса (наближення середнього поля у фізиці), застосовне для відносно малих $|q|$ (див. рис. 6). Значимо, що для кращого аналітичного опису слід було вдосконалити формулу для матриці переходів (45), введення якої усуває необхідність числового розрахунку \mathcal{L} -спектра для всіх графів.

Торкаючись поняття простору деформацій в останній частині роботи, ми звертаємося до узагальненої теореми Мосгоу [1]. Таким чином, ключовим моментом для опису деформацій простору $\mathbb{B}/\Gamma_{\text{BRC}}$ слугує декорований простір Тейхмюллера

конформних структур на правильній октаедричній поверхні з ідеальними вершинами (каспами). Тут ми дотримуємося рецепта Пеннера [5], хоча в [37] є його узагальнення.

Декорування поверхні октаедра передбачає включення орисфер з центрами у вершинах, які завжди ортогональні ребрам октаедра, і отримання кривих їх перетину з гранями октаедра. Конформність забезпечується збереженням ортогональності незалежно від розміру кожної орисфери, який регулюється бустом [5, 15, 16].

Згідно з Пеннером [5], декорований простір Тейхмюллера, при маркуванні поверхні конкретною реалізацією фундаментальної групи, складається з наборів скінчених гіперболічних довжин сегментів ребер, обмежених орисферами. Це пов'язано з тим, що грані октаедра є ідеальними трикутниками, тобто поверхня октаедра є від початку триангульованою. І ми можемо ввести многовид $\mathbb{R}_+^{|E|}$ з числом ребер $|E| = 12$.

Але, завдяки розшаруванню, інформація кодується в $\mathcal{T}_{|V|} \simeq \mathbb{R}_+^{|V|}$ з числом вершин $|V| = 6$. Геометрично це означає, що набір із шести додатних дійсних чисел (висот), які є відстанями від початку координат до орисфер у напрямку вершин, визначає всі елементи глобальної структури (див. рис. 7). Дві такі множини є ізометрично еквівалентними і належать до одного класу еквівалентності, якщо вони пов'язані однопараметричним перетворенням Мебіуса (бустом). Крім того, впорядкована множина з шести гіперболічних довжин є об'єктом дії групи класів відображення \mathcal{G}^* .

Щоб зберегти конформну структуру, індуковану декорацією на октаедричній поверхні, група \mathcal{G}^* діє на впорядковану множину за допомогою циклічних перестановок, які породжуються двома обертаннями четвертого порядку [32]. Ми реалізуємо \mathcal{G}^* у розділі 4.2, описуючи її структуру і зводячи до підгрупи $SO(3)$. З іншого боку, \mathcal{G}^* можна пов'язати з групою перестановок проколів на $\partial\mathbb{B}$ і асоціювати з групою кіс [33]. У будь-якому випадку ми приходимо до простору модулів $\mathbb{R}_+^{|V|}/\mathcal{G}^*$ з евклідовою метрикою, опускаючи дію групи в $\mathbb{R}_+^{|E|}$.

Намагаючись проквантувати геометрію ДКБ, ми стикнулися з потребою індукувати диференціальну двоформу і ввести алгебру спостережуваних [18, 19]. В принципі, це можна зробити за допомогою динамічної моделі та її симплектичної форми

[20]. Аналізуючи площу декорованого квадрата на рис. 8, ми геометрично пов'язали кутівий розмір φ кривої, яка одночасно належить орисфері і грані, і гіперболічну відстань \bar{u} від початку координат до орисфери. Таким чином ми отримали кінк (79) з одновимірної моделі синус-Гордона [17]. Згодом, коли переходимо до гамільтонового формалізму, поставлена задача розв'язується в кодотичному розшаруванні. Крім того, використовуючи фазовий портрет моделі і змінну дії, ми також зробили крок до квантування площі фазового простору. Хоча докладне вивчення бажаної алгебри все ж залишається перспективою на майбутнє.

А.В. Назаренко дякує О.М. Гаврилику (ІТФ) за обговорення і висловлює свою вдячність за підтримку Національній академії наук України (за її проектом № 0122U000888) і фонду Саймонса.

ДОДАТОК А. Тривимірні перетворення

Якщо використовувати розширення (10), що зберігає $ds_{\mathbb{B}}^2$, генератори Γ індукують групу Γ_* перетворень координат (параболічних ізометрій) у тривимірній кулі \mathbb{B} :

$$h_1^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{n^2[t^2 + (y-1)^2] + (nx-1)^2} \times \begin{pmatrix} x - n[x^2 + (y-1)^2 + t^2] \\ y + n^2[x^2 + (y-1)^2 + t^2] - 2nx \\ t \end{pmatrix}, \quad (A1)$$

$$h_2^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{n^2[t^2 + (x+1)^2] + (ny-1)^2} \times \begin{pmatrix} x - n^2[(x+1)^2 + y^2 + t^2] + 2ny \\ y - n[(x+1)^2 + y^2 + t^2] \\ t \end{pmatrix}, \quad (A2)$$

$$h_3^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{n^2[t^2 + (y+1)^2] + (nx+1)^2} \times \begin{pmatrix} x + n[x^2 + (y+1)^2 + t^2] \\ y - n^2[x^2 + (y+1)^2 + t^2] - 2nx \\ t \end{pmatrix}, \quad (A3)$$

$$h_4^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{n^2[t^2 + (x-1)^2] + (ny+1)^2} \times \begin{pmatrix} x + n^2[(x-1)^2 + y^2 + t^2] + 2ny \\ y + n[(x-1)^2 + y^2 + t^2] \\ t \end{pmatrix}. \quad (A5)$$

У площині \mathbb{D} при $t = 0$ вони зводяться до дробово-лінійних перетворень $h_k^n[z]$.

Щоб заповнити \mathbb{B} октаедрами, потрібно розширити групу Γ_* новими (параболічними) генераторами, які діють у

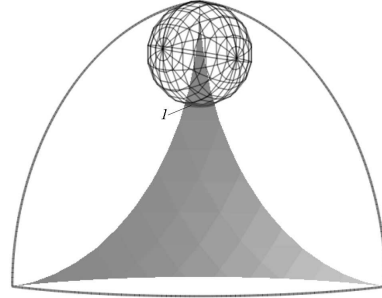


Рис. 10. Перетин (червоним (1)) грані октаедра і орисфери

площинах, ортогональних до заданого диска \mathbb{D} :

$$h_+^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{n^2[y^2 + (t-1)^2] + (nx+1)^2} \times \begin{pmatrix} x + n[x^2 + y^2 + (t-1)^2] \\ y \\ t + n^2[x^2 + y^2 + (t-1)^2] + 2nx \end{pmatrix}, \quad (A5)$$

$$\tilde{h}_+^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{n^2[x^2 + (t-1)^2] + (ny+1)^2} \times \begin{pmatrix} x \\ y + n[x^2 + y^2 + (t-1)^2] \\ t + n^2[x^2 + y^2 + (t-1)^2] + 2ny \end{pmatrix}, \quad (A6)$$

$$h_-^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{n^2[y^2 + (t+1)^2] + (nx+1)^2} \times \begin{pmatrix} x + n[x^2 + y^2 + (t+1)^2] \\ y \\ t - n^2[x^2 + y^2 + (t+1)^2] - 2nx \end{pmatrix}, \quad (A7)$$

$$\tilde{h}_-^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{n^2[x^2 + (t+1)^2] + (ny+1)^2} \times \begin{pmatrix} x \\ y + n[x^2 + y^2 + (t+1)^2] \\ t - n^2[x^2 + y^2 + (t+1)^2] - 2ny \end{pmatrix}. \quad (A8)$$

Зауважимо, що h_+ і \tilde{h}_+ (а також h_- і \tilde{h}_-) мають спільну фіксовану точку. Це означає, що їх композиція також є параболічним генератором, і $\tilde{h}_\pm^n h_\pm^m = h_\pm^m \tilde{h}_\pm^n$. Для знаходження \tilde{h}_k , $k = \overline{1,4}$ і утворення аналогічних абелевих підгруп потрібно повернути $h_{1,3}$ на кут $\pm\pi/2$ навколо вектора \mathbf{j} і повернути $h_{2,4}$ навколо вектора \mathbf{i} за допомогою (11). Це дасть нові пари генераторів, які відповідають меридіану і довготі у кожній вершині.

ДОДАТОК Б. Обчислення $w(h)$

Обчислимо гіперболічну довжину $w(h)$ червоної кривої C на рис. 10, отриманої в результаті перетину октаедричної грані $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (t-1)^2 = 2$ для $0 \leq x, y, t < 1$ і орисфери $x^2 + y^2 + [t - (1+h)/2]^2 = (1-h)^2/4$ для вершини

$(0 \ 0 \ 1)^\top$. Кінцеві точки C є такими:

$$\left(0, \frac{2(1-h)^2}{(1-h)^2+4}, \frac{(1+h)^2}{(1-h)^2+4}\right)^\top, \quad (B1)$$

$$\left(\frac{2(1-h)^2}{(1-h)^2+4}, 0, \frac{(1+h)^2}{(1-h)^2+4}\right)^\top.$$

Параметризуючи C за допомогою $x \in D = \left[0; \frac{2(1-h)^2}{(1-h)^2+4}\right]$:

$$t(x) = \frac{3-2x(1-h)+h^2}{(1-h)^2+4} - 2\frac{\sqrt{(1-h)^2(1+2x-x^2)-8x^2}}{(1-h)^2+4}, \quad (B2)$$

$$y(x) = \frac{1-h}{2}[1-t(x)] - x, \quad (B3)$$

маємо

$$w(h) \equiv 2 \int_D \frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2+[t'(x)]^2}}{1-x^2-y^2(x)-t^2(x)} dx = \sqrt{2} \frac{1-h}{1+h}. \quad (B4)$$

1. W.P. Thurston. *The Geometry and Topology of 3-Manifolds* (Princeton University Lecture Notes, 1978) [ISBN: 978-1-4704-7474-4].
2. N. Wielenberg. The structure of certain subgroups of the Picard group. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **84**, 427 (1978).
3. K. Matsumoto. Automorphic functions with respect to the fundamental group of the complement of the Borromean rings. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **13**, 1 (2006).
4. R. Abe, I.R. Aitchison. Geometry and Markoff's spectrum for $\mathbb{Q}(i)$, I. *Transact. AMS* **365** (11), 6065 (2013).
5. R.C. Penner. The decorated Teichmüller space of punctured surfaces. *Comm. Math. Phys.* **113**, 299 (1987).
6. L.H. Kauffman, S.J. Lomonaco. Quantum entanglement and topological entanglement. *New J. Phys.* **4**, 73 (2002).
7. M. Iqbal, N. Tantivasadakarn, R. Verresen *et al.* Non-Abelian topological order and anyons on a trapped-ion processor. *Nature* **626**, 505 (2024).
8. T. Kraemer, M. Mark, P. Waldburger *et al.* Evidence for Efimov quantum states in an ultracold gas of caesium atoms. *Nature* **440**, 315 (2006).
9. E. Braaten, H.-W. Hammer. Universality in few-body systems with large scattering length. *Phys. Rep.* **428**, 259 (2006).
10. K.S. Chichak *et al.* Molecular Borromean Rings. *Science* **304**, 1308 (2004).
11. C. Rovelli, F. Vidotto. In: *Covariant Loop Quantum Gravity: An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory* (Cambridge University Press, 2014) [ISBN: 9781107706910].
12. C. Kassel. *Quantum Groups* (Springer-Verlag, 1995) [ISBN: 9780387943701].
13. D.A. Tomalia, J.B. Christensen, U. Boas. *Dendrimers, Dendrons and Dendritic Polymers: Discovery, Applications and the Future* (Cambridge University Press, 2012) [ISBN: 978-0-521-51580-1].

14. J. Feder. *Fractals* (Plenum Press, 1988) [ISBN: 978-0306428517].
15. A.I. Bobenko, U. Pinkall, B.A. Springborn. Discrete conformal maps and ideal hyperbolic polyhedra. *Geom. Topol.* **19**, 2155 (2015).
16. X.D. Gu, F. Luo, J. Sun, T. Wu. A discrete uniformization theorem for polyhedral surfaces. *J. Differential Geom.* **109**, 223 (2018).
17. N. Manton, P. Sutcliffe. *Topological Solitons* (Cambridge University Press, 2004) [ISBN: 9780511617034].
18. A. Nazarenko. Time level splitting in quantum Chern-Simons gravity. *Class. Quantum Grav.* **22**, 2107 (2005).
19. A.V. Nazarenko. Area quantization of the parameter space of Riemann surface in genus two. *Ukr. J. Phys.* **58**, 1055 (2013).
20. N.E. Hurt. *Geometric Quantization in Action: Applications of Harmonic Analysis in Quantum Statistical Mechanics and Quantum Field Theory* (D. Reidel Publishing Company, 1983) [ISBN: 978-9027714268].
21. K. Matsumoto, H. Nishi, M. Yoshida. Automorphic functions for the Whitehead-link-complement group. Kyushu University Preprint Series in Mathematics (2005).
22. O. Rodrigues. Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. *J. de Mathématiques Pures et Appliquées de Liouville* **5**, 380 (1840).
23. G. Higman, B.H. Neumann, H. Neumann. Embedding theorems for groups. *J. London Math. Soc.* **24**, 247 (1949).
24. J.B. Wilker. The quaternion formalism for Möbius groups in four or fewer dimensions. *Lin. Alg. Appl.* **190**, 99 (1993).
25. C. Adams, A. Calderon, N. Mayer. Generalized bipyramids and hyperbolic volumes of alternating k -uniform tiling links. *Topol. Appl.* **271**, 107045 (2020).
26. J.G. Ratcliffe, S.T. Tschantz. Cusp transitivity in hyperbolic 3-manifolds. *Geom. Dedicata* **212**, 141 (2021).
27. N.R. Hoffman. Cusp types of quotients of hyperbolic knot complements. *Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B* **9**, 336 (2022).
28. A.V. Nazarenko. Directed random walk on the lattices of genus two. *Int. J. Mod. Phys. B* **25**, 3415 (2011).
29. O. Knill. *Probability and Stochastic Processes with Applications* (Overseas Press, 2009) [ISBN: 978-8189938406].
30. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Edited by M. Abramowitz, I.A. Stegun (Dover Publications, 1972) [ISBN: 97803181173].
31. A. Papadopoulos, S. Yamada. Deforming hyperbolic hexagons with applications to the arc and the Thurston metrics on Teichmüller spaces. *Monatsh. Math.* **182**, 913 (2017).
32. C.T. McMullen. Braid groups and Hodge theory. *Math. Ann.* **355**, 893 (2013).
33. B. Farb, D. Margalit. *A Primer on Mapping Class Groups* (Princeton University Press, 2012) [ISBN: 9780691147949].

34. S. Alberverio, S. Rabanovich. On a class of unitary representations of the braid groups B_3 and B_4 . *Bul. Sci. Math.* **153**, 35 (2019).
35. S. Alberverio, A. Kosyak. q -Pascal's triangle and irreducible representations of the braid group B_3 in arbitrary dimension. ArXiv: 0803.2778 [math.QA].
36. C. Rovelli, L. Smolin. Discreteness of area and volume in quantum gravity. *Nucl. Phys. B* **442**, 593 (1995).
37. F. Luo. Rigidity of polyhedral surfaces, I. *J. Differential Geom.* **96**, 241 (2014).

Одержано 16.07.24.

Переклад на українську мову Ю.А. Куца

Anton A. Nazarenko, A. V. Nazarenko

STRUCTURES ASSOCIATED
WITH THE BORROMEAN RINGS'
COMPLEMENT IN THE POINCARÉ BALL

Guided by physical needs, we deal with the rotationally isotropic Poincaré ball, when considering the complement of Bor-

romean rings embedded in it. We consistently describe the geometry of the complement and realize the fundamental group as isometry subgroup in three dimensions. Applying this realization, we reveal normal stochastization and multifractal behavior within the examined model of directed random walks on the rooted Cayley tree, whose six-branch graphs are associated with dendritic polymers. According to Penner, we construct the Teichmüller space of the decorated ideal octahedral surface related to the quotient space of the fundamental group action. Using the conformality of decoration, we define six moduli and the mapping class group generated by cyclic permutations of the ideal vertices. Intending to quantize the geometric area, we state the connection between the induced geometry and the sine-Gordon model. Due to such a correspondence we obtain the differential two-form in the cotangent bundle of the moduli space.

Keywords: Borromean rings' complement, fundamental group, Cayley tree, random walk, decorated Teichmüller space, sine-Gordon equation.