

Р. КАСАДІО^{1,2}¹ Кафедра фізики і астрономії Болонського університету
(Вул. Ірнеріо, 46, 40126 Болонья, Італія; e-mail: casadio@bo.infn.it)² I.N.F.N., Болонський відділ, I.S. FLAG
(Просп. Б. Пікат, 6/2, 40127 Болонья, Італія)**КВАНТОВІ ОБЕРТОВІ ЧОРНІ
ДІРИ (ВІДНОВЛЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ
В КВАНТОВОМУ СВІТІ)¹**

УДК 539

Класичні геометрії для сферично-симетричних систем можуть бути ефективно отримані з квантових когерентних станів для відповідних ступенів вільності. Даний опис замінює класичну сингулярність чорних дір інтегровними структурами, в яких припливні сили замінюються скінченними і немає внутрішнього горизонту Коші. Потім показано, як узагальнення на обертові системи може уникнути класичного внутрішнього горизонту за умови, що обертання не є надзорстким.

Ключові слова: класична геометрія, квантові обертові чорні діри, квантова гравітація, шкала Планка, гравітаційний колапс, геометрія Шварцшильда.

1. Квантова гравітація і шкала Планка

Для частинки із масою m довжина Комптона-де Бройля $\lambda_m = \hbar/mc$ порівняна з гравітаційним радіусом (Шварцшильда) $R_H = 2G_N m$, якщо маса близька до маси Планка

$$m_p = \sqrt{c\hbar/G_N} \simeq 10^{-8} \text{ кг}, \quad (1.1)$$

яка відповідає довжині Планка

$$\ell_p = \sqrt{\hbar G_N/c^3} \simeq 10^{-35} \text{ м}. \quad (1.2)$$

Отже, квантова гравітація зазвичай асоціюється з процесами, що відбуваються при планківській масі m_p і довжині ℓ_p . Однак комптонівська довжина має значення лише для розсіяння (в асимптотично вільній стандартній моделі) збуджень частинок [1], тоді як процеси, що включають зв'язані стани, зазвичай характеризуються значно більшими масштабами довжини. Наприклад, атом водню на кілька порядків більший за комптонівську довжину електрона, надпровідники і конденсатив Бозе-Ейнштейна можуть мати макроскопічні розміри, а нейтронні зірки є квантовими об'єктами радіусом у кілька кілометрів.

Цитування: Касадіо Р. Квантові обертові чорні діри (відновлення геометрії в квантовому світі). *Укр. фіз. журн.* **69**, № 7, 467 (2024).

Citation: Casadio R. Quantum rotating black holes (recovering geometry in a quantum world). *Ukr. J. Phys.* **69**, No. 7, 466 (2024). <https://doi.org/10.15407/ujpe69.7.466>.

ISSN 0372-400X. *Укр. фіз. журн.* 2024. Т. 69, № 7

Ситуація складніша в загальній теорії відносності, оскільки нелінійність рівнянь Ейнштейна ускладнює розділення масштабів (маси або довжини), як це можна зробити в електродинаміці або в наближенні слабкого поля для гравітації. Для маси M і радіуса R_s компактних об'єктів ADM [2] ми не можемо відкинути нелінійні ефекти, коли компактність $X = G_N M/R_s \sim 1$. Справді, $X \simeq 1$ для частинки маси $m = m_p$ і комптонівської довжини $\lambda_m = \ell_p$, а отже, можна очікувати утворення квантової чорної діри [3, 4]. Тому можна було б поставити питання, чи буде квантова фізика взагалі придатною для опису самогравітуючих систем компактності $X \sim 1$, що приводить до відхилення від класичних очікувань, подібних до випадку атома водню.

2. Квантова гравітація і гравітаційний колапс

Об'єкти з компактністю $X \sim 1$ повинні з'являтися в природі під час гравітаційного колапсу, який, згідно з класичною теорією, повинен завершитися геометрією чорної діри, яка характеризується існуванням (зовнішнього) горизонту подій. Однак

¹ Ця робота базується на результатах, які доповідалися на міжнародній конференції "XII Bolyai-Gauss-Lobachevsky (BGL-2024): Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics".

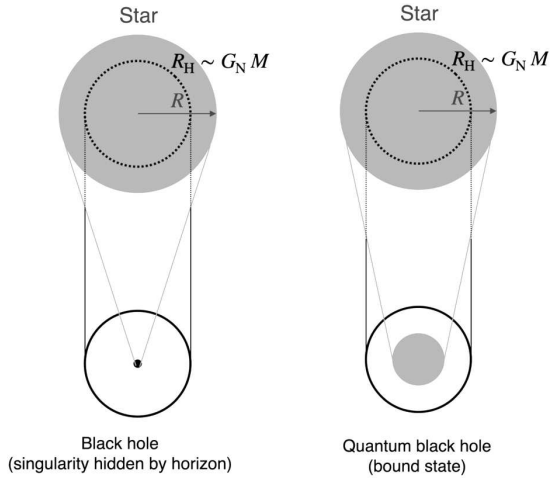


Рис. 1. Утворення чорної діри в класичній загальній теорії відносності (ліва панель) у порівнянні з тим самим для квантової гравітації (права панель)

такі геометрії страждають від серйозних фізичних проблем: як тільки горизонт формується, внутрішня частина стає геодезично неповною, з областями, де припливні сили стають розбіжними [5]; більше того, еволюція квантових полів на такому класичному фоні призводить до можливих порушень унітарності [6]. Ми очікуємо, що квантова теорія виправить цю непослідовну (напів)класичну картину, приблизно так само, як квантова механіка пояснює стабільність атомів, не допускаючи квантових станів, які відповідають класичній ультрафіолетовій катастрофі.

Дана проблема набагато складніша, оскільки для досягнення $X \sim 1$ потрібно мати декілька сонячних мас речовини. З точки зору стандартної моделі елементарних частинок, це означає $M \simeq M_\odot \simeq 10^{57}$ нейтронів і, згідно з підрахунком Бекенштейна гравітаційних збуджень, задіяних у відповідній геометрії, $M_\odot^2/m_p^2 \simeq 10^{76}$ гравітонів [7]. Ці цифри явно виводять гравітаційний колапс за межі будь-якої теперішньої і майбутньої можливості детального моделювання, і ми повинні робити те, що ми завжди робимо: знайти спрощений опис, який дозволяє математичне трактування, подібно до моделі Оппенгеймера–Снайдера [8]. У статтях [9, 10] було вивчено квантову теорію пилової кулі, щоб показати, що ядро основного стану розміром $R_s \simeq G_N M$ дійсно може замінити класичну сингулярність (див. рис. 1). Цей висновок також вимагає послідовного квантового опису геометрії.

3. Когерентні стани для класичної геометрії

Спочатку ми розглянемо питання, як описати сферично симетричну метрику

$$ds^2 = -(1 + 2V) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + 2V} + r^2 d\Omega^2, \quad (3.1)$$

де $V = V(r)$ знаходиться як середнє поле когерентного стану скалярного поля (докладніше дивись, наприклад, [11–15]). Ми визначаємо канонічно нормоване дійсне скалярне поле $\Phi = \sqrt{m_p/\ell_p} V$, а потім квантуємо Φ як безмасове поле, що задовольняє хвильовому рівнянню²

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \Phi(t, r) = 0. \quad (3.2)$$

Нормальні моди рівняння (3.2) можна записати у вигляді

$$u_k(t, r) = e^{-ikt} j_0(kr), \quad (3.3)$$

де $j_0 = \sin(kr)/kr$ – сферичні функції Бесселя з $k > 0$. Оператор квантового поля і його спряжений імпульс мають вигляд

$$\hat{\Phi}(t, r) = \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \times \sqrt{\frac{\hbar}{2k}} \left[\hat{a}_k u_k(t, r) + \hat{a}_k^\dagger u_k^*(t, r) \right], \quad (3.4)$$

$$\hat{\Pi}(t, r) = i \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \times \sqrt{\frac{\hbar k}{2}} \left[\hat{a}_k u_k(t, r) - \hat{a}_k^\dagger u_k^*(t, r) \right] \quad (3.5)$$

і задовольняють одночасовим комутаційним співвідношенням

$$\left[\hat{\Phi}(t, r), \hat{\Pi}(t, s) \right] = \frac{i\hbar}{4\pi r^2} \delta(r - s), \quad (3.6)$$

за умови, що оператори народження і знищення підкоряються правилам комутації

$$\left[\hat{a}_k, \hat{a}_p^\dagger \right] = \frac{2\pi^2}{k^2} \delta(k - p). \quad (3.7)$$

Простір Фока квантових станів тепер можна побудувати, починаючи з вакууму $\hat{a}_k |0\rangle = 0$ для всіх $k > 0$. Дуже важливо зауважити, що плоска

² Надалі будемо використовувати одиниці з $c = 1$, так що $G_N = \ell_p/m_p$ і $\hbar = \ell_p m_p$ [16].

метрика Мінковського у рівнянні (3.2) відповідає цьому вакуумному стану, який представляє абсолютно порожній простір-час, позбавлений будь-якого джерела матерії і збуджень гравітаційного поля. У цьому відношенні кількість просторових і часових вимірів у рівнянні (3.2) є формальною і довільною, важливо те, що лише ті моди і відповідні виміри, які мають відношення до геометрії (3.1), будуть вважатися збудженими над вакуумом. З іншого боку, вибір (3.2) також узгоджується з розкладанням в ряд відносно слабкого поля, в якому ньютонівський потенціал у трьох просторових вимірах отримується з поздовжньо поляризованих гравітонів [17].

Далі припустимо, що класичні конфігурації (3.1) метрики можуть бути реалізовані в квантовій теорії когерентними станами $\hat{a}_k |g\rangle = g_k e^{i\gamma_k(t)} |g\rangle$ такими, що

$$\sqrt{\frac{\ell_p}{m_p}} \langle g | \hat{\Phi}(t, r) | g \rangle = V(r). \quad (3.8)$$

Із розкладу (3.4) ми отримуємо:

$$\begin{aligned} \langle g | \hat{\Phi}(t, r) | g \rangle &= \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \times \\ &\times \sqrt{\frac{2\ell_p m_p}{k}} g_k \cos[\gamma_k(t) - kt] j_0(kr). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ми можемо усунути часову залежність нормальних мод (3.3), покладаючи $\gamma_k = kt$, і остаточно когерентний стан приймає вигляд [15]:

$$|g\rangle = e^{-N_G/2} \exp \left\{ \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} g_k \hat{a}_k^\dagger \right\} |0\rangle, \quad (3.10)$$

де коефіцієнти

$$g_k = \sqrt{\frac{k}{2}} \frac{\tilde{V}(k)}{\ell_p} \quad (3.11)$$

визначаються через

$$V = \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \tilde{V}(k) j_0(kr). \quad (3.12)$$

Нормування

$$N_G = \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{2\pi^2} g_k^2 \quad (3.13)$$

можна інтерпретувати як загальне число заповнення стану $|g\rangle$, і воно є мірою відстані цього стану від вакууму простору Фока $|0\rangle$ [15].

4. Когерентні стани для геометрії Шварцшильда

Геометрія Шварцшильда задана співвідношенням (3.1) із

$$V = V_M = -\frac{G_N M}{r}, \quad (4.1)$$

з якого знаходимо

$$\tilde{V}_M = -4\pi G_N \frac{M}{k^2} \quad (4.2)$$

і коефіцієнти

$$g_k = -\frac{4\pi M}{\sqrt{2k^3} m_p}. \quad (4.3)$$

Загальне число заселення тепер становить

$$N_G = 4 \frac{M^2}{m_p^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k}, \quad (4.4)$$

де інтеграл логарифмічно розбігається в інфрачервоній (IR) і ультрафіолетовій (UV) областях [13, 15]. Остання розбіжність зумовлена нульовим розміром джерела в класичній геометрії Шварцшильда, і саме існування належного квантового стану $|g\rangle$ вимагає, щоб коефіцієнти g_k відхилялися від їх чисто класичного виразу (4.3) для $k \rightarrow 0$ і $k \rightarrow \infty$. Тому ми усуваємо ультрафіолетову розбіжність, вводячи обрізання на граничному імпульсі $k_{UV} \sim 1/R_s$, де R_s міг би бути скінченним радіусом ядра матерії в кінці колапсу, як показано на рис. 1. Так само ми вводимо інфрачервоне обрізання $k_{IR} = 1/R_\infty$ для врахування скінченного розміру R_∞ Всесвіту, і тоді

$$N_G = 4 \frac{M^2}{m_p^2} \int_{k_{IR}}^{k_{UV}} \frac{dk}{k} = 4 \frac{M^2}{m_p^2} \ln \left(\frac{R_\infty}{R_s} \right). \quad (4.5)$$

Це дає ефективну (квантову) метрику (3.1) із

$$\begin{aligned} V &= V_{QM} \simeq \int_{k_{IR}}^{k_{UV}} \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \tilde{V}_M(k) j_0(kr) \simeq \\ &\simeq V_M \left\{ 1 - \left[1 - \frac{2}{\pi} \text{Si} \left(\frac{r}{R_s} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

де Si позначає функцію інтегрального синуса (див. рис. 2 для прикладу).

5. Квантові інтегровні чорні діри

У класичному просторі-часі Шварцшильда скаляр Кречмана $R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} \sim R^2 \sim r^{-6}$ для $r \rightarrow 0$, тоді як для наведеної вище квантово скоригованої метрики маємо

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} \simeq R^2 \simeq \frac{64 G_N^2 M^2}{\pi R_s^2 r^4}. \quad (5.1)$$

Це гарантує, що припливні сили залишаються скінченними всюди до $r = 0$, і просторовий інтеграл від густини лагранжіана Ейнштейна–Гільберта також є скінченним, оскільки скаляр Річчі $R \sim r^{-2}$. Тому в точці $r = 0$ сингулярність можна розглядати як інтегровну [18], де деякі геометричні інваріанти розходяться без шкідливими впливу на матерію.

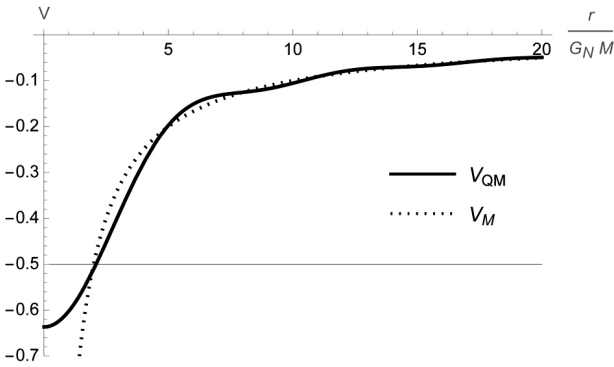


Рис. 2. Квантова метрична функція V_{QM} в рівнянні (4.6) (суцільна лінія) порівняно з V_M (пунктирна лінія) для $R_s = G_N M$. Горизонтальна тонка лінія позначає розташування горизонту, де $V = -1/2$

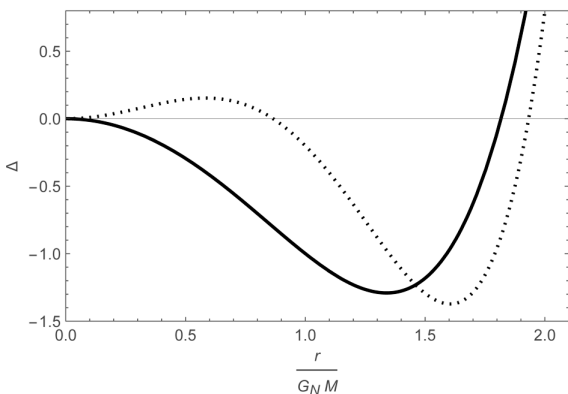


Рис. 3. Поведінка Δ у рівнянні (5.6) для інтегрованих чорних дір (суцільна лінія) і регулярних чорних дір (пунктирна лінія)

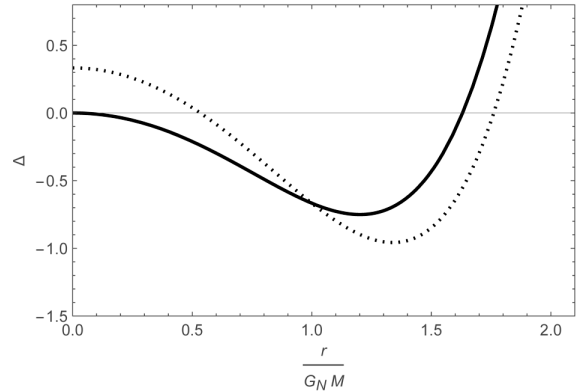


Рис. 4. Поведінка Δ у рівнянні (6.2) для інтегрованих чорних дір з диференціальним обертанням (суцільна лінія) і жорстким обертанням (пунктирна лінія)

З ейнштейнівського тензора можна знайти ефективну густину енергії і тиск

$$\varepsilon = \frac{M}{2\pi^2 r^3} \sin\left(\frac{r}{R_s}\right) = -p_r \quad (5.2)$$

і ефективне напруження

$$p_t = \frac{M}{4\pi^2 r^3} \left[\sin\left(\frac{r}{R_s}\right) - \frac{r}{R_s} \cos\left(\frac{r}{R_s}\right) \right]. \quad (5.3)$$

Зауважимо, зокрема, що ефективну густину енергії можна інтерпретувати у вигляді нормованої хвильової функції $\psi = \psi(r)$ для речовини в ядрі,

$$\varepsilon \sim |\psi(r)|^2 \sim r^{-2}, \quad \text{для } r \rightarrow 0, \quad (5.4)$$

а масова функція Мізнера–Шарпа–Ернандеса [19, 20] виглядає як

$$m(r) = 4\pi \int_0^r x^2 \varepsilon(x) dx \simeq \frac{2Mr}{\pi R_s}, \quad \text{для } r \rightarrow 0, \quad (5.5)$$

де $m(r \rightarrow \infty) = M$.

Ще одна гарна особливість цієї квантово вправленої геометрії, яка впливає з рівняння (5.5), полягає в тому, що немає внутрішнього горизонту Коші (якщо існує зовнішній горизонт подій). Розташування горизонтів фактично задається розв'язками рівняння:

$$\Delta \equiv r^2 (1 + 2V) = r^2 - 2r G_N m(r) = 0. \quad (5.6)$$

Якщо існує зовнішній горизонт подій $\Delta(r_+) = 0$ при $r = r_+ > 0$, функція Δ стає від'ємною для

$r < r_+$ і залишається від'ємною до $r = 0$ за умови, що $R_s \lesssim 4 G_N M / \pi$ (див. суцільну лінію на рис. 3). Зауважте, що у випадку регулярного розв'язку для чорної діри з $m(r) \sim r^3$ функція Δ обов'язково стане додатною в околі центра (див. пунктирну лінію на рис. 3). Відсутність внутрішніх горизонтів може бути узагальненою на електрично заряджені чорні діри [21] і виключає потенційно серйозні випадкові проблеми, які часто присутні у звичайних кандидатів на чорні діри (див., наприклад, [22] і посилання у ній).

6. Обертові інтегровні чорні діри

Наджорстка обертова геометрія з постійним заданим кутовим моментом $a = J/M$ може бути записана як

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2 r m}{\rho^2} \right] dt^2 + \frac{4 a r m \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\Sigma \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2, \quad (6.1)$$

де $\rho^2 = r^2 + a^2 \sin^2 \theta$ і $\Sigma = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta$. Горизонти розташовані так, що

$$\Delta = a^2 + r^2 - 2 r G_N m(r) = 0, \quad (6.2)$$

де ми припустили, що масова функція залежить лише від радіальної координати, як у сферично симетричному випадку [23].

Масова функція, яка має таку ж поведінку поблизу $r = 0$, як і функція (5.5), знову усуне (кільцеву) сингулярність геометрії Керра, яка виникає при $m = M$ [24]. Однак $\Delta(0) = a^2 > 0$, і обов'язково зустрічається внутрішній горизонт при $0 < r = r_- < r_+$ (див. пунктирну лінію на рис. 4). Щоб усунути нуль Δ при $r = r_- > 0$, ми повинні розглянути диференціальне обернення $a = a(r)$ таке, що $a \sim r^\alpha$ із $\alpha \geq 1$ для $r \rightarrow 0$ [25] (див. суцільну лінію на рис. 4).

Побудова когерентних станів для диференціально обертових геометрій (6.1) з $m = m(r)$ і $a = a(r)$ становить величезну складність для сферично симетричних випадків. На даний час були досліджені [26] тільки геометрії, що повільно обертаються, із $a \ll M$.

Мене частково підтримав ґрант INFN FLAG, і моя робота також виконувалася в рамках діяльності Національної групи математичної фізики (GNFM, INdAM).

1. R. Casadio, W. Feng, I. Kuntz, F. Scardigli. Minimum length (scale) in quantum field theory, generalized uncertainty principle and the non-renormalisability of gravity. *Phys. Lett. B* **838**, 137722 (2023) [arXiv:2210.12801 [hep-th]].
2. R.L. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner. Dynamical structure and definition of energy in general relativity. *Phys. Rev.* **116**, 1322 (1959).
3. R. Casadio, F. Scardigli. Horizon wave-function for single localized particles: GUP and quantum black hole decay. *Eur. Phys. J. C* **74**, 2685 (2014) [arXiv:1306.5298 [gr-qc]].
4. X. Calmet, R. Casadio. The horizon of the lightest black hole. *Eur. Phys. J. C* **75**, 445 (2015) [arXiv:1509.02055 [hep-th]].
5. S.W. Hawking, G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
6. X. Calmet, S.D.H. Hsu. A brief history of Hawking's information paradox. *Europhys. Lett.* **139**, 49001 (2022) [arXiv:2207.08671 [hep-th]].
7. J.D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).
8. J.R. Oppenheimer, H. Snyder. On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.* **56**, 455 (1939).
9. R. Casadio. A quantum bound on the compactness. *Eur. Phys. J. C* **82**, 10 (2022) [arXiv:2103.14582 [gr-qc]].
10. R. Casadio. Quantum dust cores of black holes. *Phys. Lett. B* **843**, 138055 (2023) [arXiv:2304.06816 [gr-qc]].
11. W. Mück. On the number of soft quanta in classical field configurations. *Can. J. Phys.* **92**, 973 (2014) [arXiv:1306.6245 [hep-th]].
12. S. Bose, A. Mazumdar, Toroš. Infrared scaling for a graviton condensate. *Nucl. Phys. B* **977**, 115730 (2022) [arXiv:2110.04536 [gr-qc]].
13. R. Casadio, A. Giugno, A. Giusti, M. Lenzi. Quantum corpuscular corrections to the Newtonian potential. *Phys. Rev. D* **96**, 044010 (2017) [arXiv:1702.05918 [gr-qc]].
14. L. Berezhiani, G. Dvali, O. Sakhelashvili. De Sitter space as a BRST invariant coherent state of gravitons. *Phys. Rev. D* **105**, 025022 (2022) [arXiv:2111.12022 [hep-th]].
15. R. Casadio. Geometry and thermodynamics of coherent quantum black holes. *Int. J. Mod. Phys. D* **31**, 2250128 (2022) [arXiv:2103.00183 [gr-qc]].
16. M. Visser. *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking* (American Institute of Physics, 1996).
17. R.P. Feynman, F.B. Morinigo, W.G. Wagner, B. Hatfield. *Feynman Lectures on Gravitation* (Addison-Wesley Pub. Co., 1995).
18. V.N. Lukash, V.N. Stokov. Space-times with integrable singularity. *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1350007 (2013) [arXiv:1301.5544 [gr-qc]].
19. C.W. Misner, D.H. Sharp. Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse. *Phys. Rev.* **136**, B571 (1964).

20. W.C. Hernandez, C.W. Misner. Observer time as a coordinate in relativistic spherical hydrodynamics. *Astrophys. J.* **143**, 452 (1966).
21. R. Casadio, A. Giusti, J. Ovalle. Quantum Reissner–Nordström geometry: Singularity and cauchy horizon. *Phys. Rev. D* **105**, 124026 (2022) [arXiv:2203.03252 [gr-qc]].
22. R. Carballo-Rubio, F. Di Filippo, S. Liberati, C. Pacilio, M. Visser. Inner horizon instability and the unstable cores of regular black holes. *J. High Energy Phys.* **05**, 132 (2021) [arXiv:2101.05006 [gr-qc]].
23. M. Gurses, F. Gurse. Lorentz covariant treatment of the Kerr–Schild geometry. *J. Math. Phys.* **16**, 2385 (1975).
24. R.P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237 (1963).
25. R. Casadio, A. Giusti, J. Ovalle. Quantum rotating black holes. *J. High Energy Phys.* **05**, 118 (2023) [arXiv:2303.02713 [gr-qc]].
26. W. Feng, R. da Rocha, R. Casadio. Quantum hair and entropy for slowly rotating quantum black holes. To appear in *Eur. Phys. J. C* [arXiv:2401.14540 [gr-qc]].

Одержано 24.06.24.

Переклад на українську мову Ю.А. Куца

R. Casadio

QUANTUM ROTATING BLACK HOLES (RECOVERING GEOMETRY IN A QUANTUM WORLD)

Classical geometries for spherically symmetric systems can be effectively obtained from quantum coherent states for the relevant degrees of freedom. This description replaces the classical singularity of black holes with integrable structures in which tidal forces remain finite, and there is no inner Cauchy horizon. It is then shown how the extension to rotating systems can avoid the classical inner horizon provided the rotation is not ultra-rigid.

Keywords: classical geometry, quantum rotating black holes, quantum gravity, Planck scale, gravitational collapse, Schwarzschild geometry.