

В.І. ЖДАНОВ<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Київський національний університет імені Тараса Шевченка,  
Астрономічна обсерваторія  
(Вул. Обсерваторна, 3, Київ 04053)<sup>2</sup> Національний технічний університет України  
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”,  
Кафедра прикладної фізики  
(Берестейський просп., 37, Київ 03056)**СФЕРИЧНО-СИМЕТРИЧНІ  
КОНФІГУРАЦІЇ В МОДЕЛІ ТЕМНОЇ  
МАТЕРІЇ З ЛЕГКИМ СКАЛЯРОНОМ**

УДК 539

*Досліджено статичні сферично-симетричні (ССС) розв'язки квадратичної  $f(R)$ -гравітації в системі Айнштайна за умов асимптотичної площинності. Згідно з нещодавно запропонованою моделлю темної матерії, ми розглядаємо величину маси скалярона порядку кількох меВ. Знайдено представлення основних рівнянь, яке дозволило провести чисельне дослідження ССС конфігурацій з достатньо великими (астрофізично прийнятними) масами. Показано, що навколо центра симетрії завжди є область зі значними ефектами завдяки ненульовому полю скалярона. Розмір цієї області може бути значно більшим, ніж радіус Шварцшильда ССС конфігурації. Отримано асимптотичні режими поблизу голої сингулярності в центрі і на просторовій нескінченності та оцінено параметри цих режимів.*

*Ключові слова:* компактні астрофізичні об'єкти, модифікована гравітація, скалярні поля.

**1. Вступ**

Нещодавно було запропоновано новий погляд на темну матерію (ТМ) як на легкий скалярон [1], який продовжує лінію моделей ТМ з використанням  $f(R)$ -гравітації [2–8], що є найпростішою модифікацією загальної теорії відносності (див. огляди [9–11]). У цій теорії гравітаційна густина лагранжіана Айнштайна–Гільберта замінюється більш загальною функцією  $f(R)$  скалярної кривини  $R$ . Це приводить до рівнянь четвертого

порядку відносно просторово-часової метрики  $g_{\mu\nu}$  (у жорданівській системі відліку). Однак, у ряді версій  $f(R)$  задачу можна звести до звичайних рівнянь Айнштайна [9–11] відносно нової метрики  $\hat{g}_{\mu\nu}$  (система відліку Айнштайна) за допомогою конформного перетворення

$$\hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\xi} g_{\mu\nu}, \quad (1)$$

де скалярне поле  $\xi$ , відоме як скалярон<sup>1</sup>, задовольняє додаткове нелінійне хвильове рівняння, яке містить масу скалярона  $\mu$ .

Цитування: Жданов В.І. Сферично-симетричні конфігурації в моделі темної матерії з легким скаляроном. *Укр. фіз. журн.* **70**, № 11, 765 (2025).

© Видавець ВД “Академперіодика” НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

ISSN 0372-400X. *Укр. фіз. журн.* 2025. Т. 70, № 11

<sup>1</sup> Насправді, канонічний скалярон отримується шляхом деякого перемасштабування  $\xi$ . Однак, дотримуючись роботи [12], ми віддаємо перевагу використанню безрозмірного  $\xi$ . Це пояснює наявність множників у потенціалі скалярона у виразах нижче.

Виникають природні питання щодо можливої ролі  $f(R)$ -гравітації у компактних астрофізичних об'єктах. Більшість публікацій на цю тему стосуються конфігурацій чорних дір [13–17]. Статичні сферично-симетричні (ССС) системи без горизонту були досліджені чисельно в роботах [12, 18].

У випадку астрофізичних об'єктів загальної маси  $M$  деякої астрофізичної конфігурації можна скомбінувати з масою скаляра  $\mu$  та отримати безрозмірний (у геометризаних одиницях<sup>2</sup>) параметр  $M\mu$ . Модель DM [1] має справу з порівняно малою масою скаляра приблизно 4 мев (див. також роботи [2, 5–8]), що узгоджується з експериментальною нижньою межею [3, 19–21]. Тим не менш, в астрофізичних застосуваннях значення параметра  $M\mu$  є досить великим: наприклад, для сонячних масових систем  $\mu M \approx 3 \cdot 10^9$ , тоді як для типових мас центральних об'єктів в активних ядрах галактик  $\mu M \sim 10^{18}–10^{19}$ . Такі експоненційно великі числа створюють деякі проблеми під час числових моделювань. Зауважимо, що числові результати, отримані в роботах [12, 18] для квадратичної моделі  $f(R)$ , мають справу лише з помірними значеннями  $M\mu$ .

У цій статті розглядаються властивості ССС розв'язків для достатньо великих значень  $M\mu$ . Розглядається скаляронний потенціал, що виникає в системі відліку Айнштейна квадратичної  $f(R)$ -гравітації, як це зроблено в роботі Старобінського [22]; див. також роботи [1, 12, 18].

Стаття має таку структуру. У розділі 2 розглядаються співвідношення для  $f(R)$ -гравітації в системі відліку Айнштейна для ССС конфігурацій, відомих із попередніх публікацій. Основні рівняння у формі, придатній для числового моделювання у випадку великих  $M\mu$ , представлені в розділі 3. У розділі 4 розв'язки ілюструються числовими розрахунками. У розділі 5 ми обговорюємо отримані результати.

## 2. Основні рівняння в системі відліку Айнштейна

У [28] були отримані строгі результати щодо якісних властивостей розв'язків у випадку монотонних скаляронних потенціалів.

У моделі DM [1] квадратична залежність  $f(R)$

уможливило перехід до системи відліку Айнштейна за допомогою перетворення (1). Відповідний потенціал самої скаляра  $W(\xi)$  дорівнює [3, 22]:

$$W(\xi) = \mu^2 w(\xi), \quad w(\xi) = \frac{3}{4}(1 - e^{-2\xi})^2. \quad (2)$$

Для ССС простору-часу ми використовуємо систему координат Шварцшильда (координати кривини) з

$$ds^2 \equiv \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = e^\alpha dt^2 - e^\beta dr^2 - r^2 dO^2, \quad (3)$$

де  $r > 0$ ,  $\alpha \equiv \alpha(r)$ ,  $\beta \equiv \beta(r)$ , а  $dO^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$  позначає метричний елемент на одиничній сфері.

За відсутності негравітаційних полів, нетривіальні рівняння для статичної метрики (3) в системі відліку Айнштейна мають такий вигляд [12]:

$$\frac{d}{dr}(\alpha + \beta) = 6r \left( \frac{d\xi}{dr} \right)^2, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dr}(\alpha - \beta) = -\frac{2}{r} + \frac{2e^\beta}{r} [1 - r^2 W(\xi)], \quad (5)$$

де  $\xi \equiv \xi(r)$ . Рівняння (4) і (5) для  $\alpha$  та  $\beta$  необхідно доповнити рівнянням для скаляра [12]:

$$\frac{d}{dr} \left[ r^2 e^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \frac{d\xi}{dr} \right] = \frac{r^2}{6} e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} W'(\xi). \quad (6)$$

В асимптотично пласкому статичному просторі-часі передбачається, що коли  $r \rightarrow \infty$  ми маємо  $\xi(r) \rightarrow 0$ , тож рівняння (6) можна добре апроксимувати рівнянням для лінійного масивного скалярного поля на фоні Шварцшильда:

$$\exp[\alpha(r)] = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad \exp[\beta(r)] = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}, \quad (7)$$

де  $r_g = 2M$ , а  $M > 0$  – це маса конфігурації. Асимптотика (7) залишається правильною, доки  $\xi \rightarrow 0$  достатньо швидко коли  $r \rightarrow \infty$ . Однак цього недостатньо для визначення єдиного розв'язку системи (4)–(6), і потрібна додаткова інформація про  $\xi(r)$ . Для великих  $r$ , малі  $\xi(r)$  повинні експоненційно спадати [23–25] з асимптотичною поведінкою

$$\xi(r) = Q \left( \frac{r_g}{r} \right)^{1+M\mu} e^{-\mu r}. \quad (8)$$

Константа  $Q$ , яка характеризує напруженість скалярного поля на нескінченності, називатиметься

<sup>2</sup>  $c = \hbar = 8\pi G = 1$ ; сигнатура метрики (+ - - -)

“скалярним зарядом”. Для заданих  $M$  та  $Q$  асимптотичні формули (7) та (8) однозначно визначають розв’язок [12].

Нижче ми обмежимося додатними  $\xi$ , де потенціал має платоподібну форму. Такий вибір має переваги з фізичних причин і узгоджується з даними сучасних спостережень [26] (див., наприклад, [27]).

### 3. Редукція рівнянь

Після введення змінної  $x = \mu r$  рівняння (4), (5) та (6) можна переписати у вигляді

$$\frac{d\chi}{dx} = 3x \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2, \quad \chi = \frac{1}{2}(\alpha + \beta); \quad (9)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\alpha - \beta}{2} = -\frac{1}{x} + \frac{e^\beta}{x} [1 - x^2 w(\xi)]; \quad (10)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ x^2 e^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \frac{d\xi}{dx} \right] = \frac{x^2}{6} e^{\chi} w'(\xi), \quad (11)$$

де  $\chi = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ . Ця система не містить параметр  $\mu$ , проте він все ще міститься в граничних умовах при  $x \rightarrow \infty$ .

Зі строгих аналітичних міркувань у випадку монотонної функції  $w(\xi)$ , де  $\xi > 0$  [12] (пор. також з випадком мінімально зв’язаного скалярного поля [28]), випливає, що в будь-якому нетривіальному випадку має існувати деяка “область скаляризації”, де розв’язок суттєво відрізняється від розв’язку Шварцшильда, і можна побачити очевидний прояв модифікованої гравітації. У випадку нетривіального скалярона в центрі знаходиться гола сингулярність [12].

Зосередимося на астрофізично цікавому випадку, коли розмір цієї області достатньо великий, скажімо,  $\sim 100r_g$ . З іншого боку, повинен існувати інтервал малих експоненційно спадних  $\xi(r)$  для  $r \geq r_0$  [див. рівняння (8)]; метрика в цій області швидко набуває значень Шварцшильда (7) зі зростанням  $r$ . Він буде позначений як інтервал А.

Для великих  $M\mu$  важко виконати пряме числове інтегрування системи (9)–(11) для всіх  $r > 0$  через експоненційно великі числа та швидкі зміни під час переходу від області скаляризації до інтервалу А. У зв’язку з цим ми розглянемо окремо випадки  $r > r_0$  та  $r < r_0$ , де  $r_0$  позначає нижню межу А. Ми використовуємо аналітичне наближення для  $r > r_0$  та робимо чисельне продовження до інших областей зі зменшенням  $r \in (0, r_0)$ . Зворотне інтегрування тут є кращим, оскільки воно

дає змогу уникнути експоненційно зростаючих похибок в обчисленнях.

Нехай  $\xi_0 \equiv \xi(r_0)$  достатньо мале, щоб використовувати формули (7) та (Д.6) для  $r \geq r_0$ . Для заданого  $\xi(r_0)$  значення  $r_0$  можна пов’язати зі скалярним зарядом згідно з виразом (25). Для того щоб розглянути задачу для великих  $M\mu$ , ми вводимо нову незалежну змінну  $p$  за допомогою співвідношень

$$x = r\mu = X_0 + \frac{p}{X_0} \equiv X_0 U(p), \quad U(p) = 1 + \frac{p}{X_0^2}, \quad (12)$$

де  $X_0 = \mu r_0 \gg 1$  та інтервал  $r \in (0, r_0]$  відповідає від’ємному  $p \in (-X_0^2, 0]$ . Рухатимемося від  $p = 0$  до від’ємних значень.

Рівняння (9) дає

$$\frac{d\chi}{dp} = 3U \left( \frac{d\xi}{dp} \right)^2 X_0^2. \quad (13)$$

Позначимо

$$Y = U \exp\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right), \quad Z = -X_0 U Y \frac{d\xi}{dp}. \quad (14)$$

Після переходу до нової змінної, рівняння (5), помножене на  $\exp[(\alpha - \beta)/2]$ , можна перетворити на

$$\frac{dY}{dp} = e^{\chi} \left[ \frac{1}{X_0^2} - U^2 w(\xi) \right]. \quad (15)$$

Використовуючи рівняння (12) та (14), з рівняння (6) отримуємо

$$\frac{d}{dp} \left[ U Y \frac{d\xi}{dp} \right] = \frac{U^2}{6X_0^2} e^{\chi} w'(\xi), \quad (16)$$

і рівняння (16) зводиться до двох рівнянь першого порядку

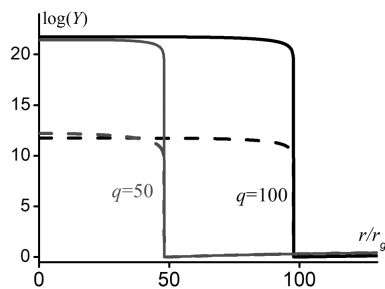
$$\frac{d\xi}{dp} = -\frac{Z}{X_0 U Y}, \quad (17)$$

$$\frac{dZ}{dp} = -\frac{U^2}{6X_0} e^{\chi} w'(\xi). \quad (18)$$

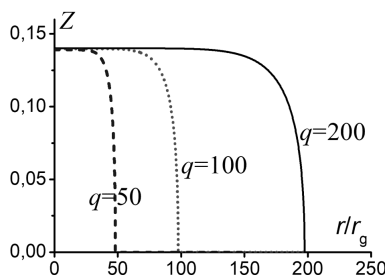
Підстановка рівняння (17) у рівняння (13) дає

$$\frac{d\chi}{dp} = \frac{3Z^2}{UY^2}. \quad (19)$$

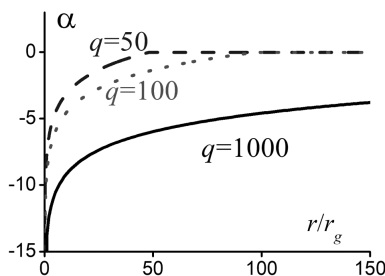
Тепер ми маємо замкнену систему з чотирьох рівнянь (15) та (17)–(19) у нормалізованій формі,



**Рис. 1.** Залежності  $\log Y$  від  $r/r_g$  для  $q = 50$  та  $100$  (відповідно,  $r_0 = 48,0$  та  $97,7$ ).  $\log(M\mu) = 20$  (суцільні лінії) та  $10$  (пунктирні лінії). Поза областю скаляризації спостерігається незначне збільшення  $Y(r) \approx (r - r_g)/r_0$ , але це не видно на цьому рисунку



**Рис. 2.** Залежності  $Z$  від  $r/r_g$  для  $q = 50, 100$  та  $200$  (відповідно,  $r_0 = 48,0; 97,7$  та  $197,4$ ). Поза областю скаляризації  $Z(r) > 0$  прямує до нуля. Для фіксованого  $q$ , в області скаляризації, криві  $Z(r)$  виглядають практично однаково для різних  $\log(M\mu) = 3-20$



**Рис. 3.** Залежності  $\alpha$  від  $r/r_g$  для  $q = 50, 100$  та  $1000$  (відповідно,  $r_0 = 48,0; 97,7$  та  $996,5$ ). Криві виглядають практично однаково для  $\log(\mu M) = 3-20$ . Поза областю скаляризації  $\alpha(r) \approx -r_g/r$

яка готова до зворотного числового інтегрування, починаючи з  $p = 0$ . Відповідно, ми встановлюємо початкові умови коли  $p = 0$ , що відповідає  $r = r_0 > r_g$ :

$$\xi(0) = \xi_0, \quad Y(0) \equiv Y_0 = \exp\left[\frac{\alpha_0 - \beta_0}{2}\right],$$

$$\chi(0) = \chi_0, \quad Z_0 = -X_0 Y_0 \left(\frac{d\xi}{dp}\right). \quad (20)$$

З виразу (Д.5) отримуємо

$$Z_0 = -X_0 Y_0 \left(\frac{d\xi}{dp}\right)_0 = \xi_0 \exp\left(\frac{\alpha_0}{2}\right). \quad (21)$$

Згідно з роботами [12, 28], з рівнянь (9)–(11) ми робимо висновок про те, що існують граничні значення

$$Y_C = \lim_{r \rightarrow 0} Y(r), \quad Z_C = \lim_{r \rightarrow 0} Z(r), \quad (22)$$

які визначають асимптотичну поведінку  $\alpha(r), \beta(r)$  та  $\xi(r)$  при  $r \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha(r) &\sim (3\eta^2 - 1) \ln(r/r_g), \\ \beta(r) &\sim (3\eta^2 + 1) \ln(r/r_g), \\ \xi(r) &\sim -\eta \ln(r/r_g), \end{aligned} \quad (23)$$

де  $\eta = X_0 Z_C / Y_C$ .

#### 4. Числові розрахунки

У випадку скалярного потенціалу квадратичної моделі (2) ми розглянемо додатну гілку  $\xi > 0$ .

Початкові умови в точці  $r_0$  повинні бути узгоджені з умовами асимптотичної площинності. Значення  $\xi_0$  повинно задовольняти нерівність (Д.8), щоб можна було використовувати наближення слабого поля (8). Тому при числовому моделюванні ми накладаємо такі початкові умови:

$$\xi(r_0) = \frac{\tilde{\xi}_0}{\sqrt{X_0}}, \quad (24)$$

де  $\tilde{\xi}_0 \ll 1$  фіксовано.

Використовуючи рівняння (8), можна пов'язати  $r_0$  з  $Q$ . Для  $r_0 \gg r_g$ , враховуючи (24), після нехтування членом  $\sim O(\ln(\mu r_0))/(M\mu)$ , отримуємо просте співвідношення у граничному випадку великих  $M\mu$ :

$$q = \frac{\ln Q}{\mu r_g} = \frac{r_0}{r_g} + \frac{1}{2} \ln \frac{r_0}{r_g}. \quad (25)$$

Ми розглянули систему рівнянь (15) і (17)–(19) чисельно для різних  $M\mu$  та різних розмірів області скаляризації. Типові приклади показані на рис. 1–5 для двох значень  $q$  [див. рівняння (25)]:  $q = 50$ , що відповідає  $r_0/r_g = 113$ , та  $q = 100$ , що відповідає  $r_0/r_g = 228$ . Зазвичай використовувалося значення  $\xi_0 = 0,001$  в рівнянні (24).

Важливу роль в описі якісних властивостей розв'язків відіграють функції  $Y(r)$  та  $Z(r)$ . В області С криві  $Y(r)$  та  $Z(r)$  коли  $r \lesssim r_0/2$  стають пологішими:  $Y(r) \approx Y_C$  і  $Z(r) \approx Z_C$ . Це чітко видно на рис. 1 і 2, які визначають основні (логарифмічні) члени в асимптотиці. Це забезпечується швидким зменшенням  $e^x \approx e^\beta$  зі зменшенням  $r$  (див. рис. 3 та 4). Важливо відзначити дуже слабкі зміни у поведінці залежностей  $\alpha(r)$  та  $Z(r)$  коли  $\log(M\mu) \in [3, 20]$ . Поведінка функції  $\xi(r)$  показана на рис. 5.

### 5. Обговорення

Ми знайшли представлення основних рівнянь, що описують ССС конфігурації в системі відліку Айнштайна квадратичної  $f(R)$ -гравітації, що дало змогу виконати числові розрахунки для досить високих значень  $M\mu$  аж до  $10^{20}$ . Це можна використати у випадку моделі DM (див., наприклад, роботи [1, 3]) зі скалярною масою з МеВ-діапазону, що задовольняє наявні експериментальні нижні межі [19, 20]. Отримано такі результати.

Для довільних нетривіальних<sup>3</sup>  $\xi(r)$  існують три основні області радіальної змінної з різними типами поведінки розв'язків. Існує деяке значення  $r_0$  радіальної змінної, яке розділяє області слабого та сильного скалярного поля  $\xi$ . Для  $r \geq r_0$  (область А) маємо малу  $\xi(r)$ , яка експоненціально спадає відповідно до виразу (8) зі зростанням  $r$ . Метрика набуває значень Шварцшильда. Така поведінка є типовою для низки моделей, що описують масивне лінійне скалярне рівняння поля в режимі слабого поля на фоні Шварцшильда.

З іншого боку, для менших  $r$  (приблизно  $r \lesssim r_0/2$ , область С), залежності  $Y(r)$  та  $Z(r)$ , визначені рівняннями (14), стають пологішими і мають ненульові межі коли  $r \rightarrow 0$  (див. рис. 1 та 2). У цій області ми маємо практично сталі значення цих функцій та  $rd\xi/dr$ . Відомо [12], що для будь-якого  $\xi(r) \neq 0$  існує гола сингулярність у центрі. Зауважимо, що існування граничних значень (22) і поведінка поблизу центру є типовими для широкого класу ССС розв'язків зі скалярним полем [28].

У проміжній області (область В) відбувається різка зміна метрики поблизу  $r_0$ . Потім, зі зменшенням  $r$ , розв'язок плавно переходить у режим С.

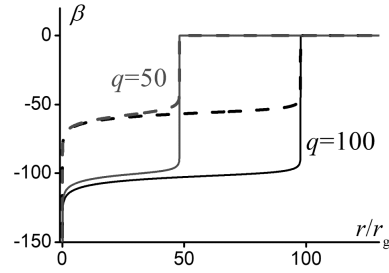


Рис. 4. Залежності  $\beta$  від  $r/r_g$ . Параметри та стилі ліній такі самі, як на рис. 1. Поза областю скаляризації  $\beta(r) \approx r_g/r$

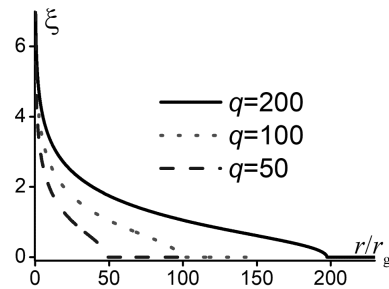


Рис. 5. Залежності  $\xi$  від  $r/r_g$  для  $q = 50, 100$  та  $200$ . Криві мають однаковий вигляд для  $\log(\mu M) = 3-20$ . Поза областю скаляризації  $\xi(r)$  наближено описується виразом (8)

Важливо, що функції  $Y(r)/X_0$  та  $Z(r)$  практично не залежать від  $M\mu$  для фіксованих  $q$ . Це було підтверджено чисельно для  $\log(M\mu) = 5-20$ .

В області скаляризації, визначеній параметром  $r_0$ , існують значні ефекти, зумовлені полем скалярона, які можуть впливати на структуру акреційного диска навколо сингулярності, розташованої в центрі. Розмір цієї області може бути значним залежно від параметра  $q$  (та/або  $Q$ ). Це можна використовувати для спростування або підтвердження існування таких конфігурацій на основі спостережень.

Наші результати стосуються розв'язків  $f(R)$ -гравітації в системі відліку Айнштайна. Перехід до жорданової системи відліку виконується згідно з виразом (1), що приводить до вакуумних розв'язків. У системі відліку Айнштайна це відповідає "скалярному вакууму", коли ми маємо рівняння Айнштайна для конформно перетвореної метрики з тензором енергії-імпульсу скалярного поля [9-11]. Однак наші результати можна застосувати до випадку, коли є ненульовий сферично симетричний неперервний розподіл маси-енергії в цен-

<sup>3</sup> Випадок  $\xi = 0$  відповідає розв'язку Шварцшильда в системах відліку Айнштайна та Жордана.

тральній області. У цьому випадку гравітаційне поле у внутрішній області визначається тензором енергії-імпульсу всередині тіла. Поза цим тілом ми маємо згаданий вище вакуумний розв'язок, що визначається повною масою  $M$  та "скалярним зарядом"  $Q$ , які, однак, залежать від відповідного узгодження з внутрішньою областю.

Автор вдячний Ю. Штанову та О. Сташку за корисні обговорення. Ця робота була частково підтримана Національним фондом досліджень України (проект № 2023.03/0149).

## ДОДАТОК

### Наближені розв'язки в області А

Для  $|\xi| \ll 1$  потенціал скалярона приблизно дорівнює  $W(\xi) = 3\mu^2\xi^2$ , і рівняння (6) описує лінійне скалярне поле,

$$\frac{d}{dr} \left[ r^2 e^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \frac{d\xi}{dr} \right] = \mu^2 r^2 e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \xi. \quad (\text{Д.1})$$

При великих  $M\mu \gg 1$  можна застосувати метод ВКБ. Підставляючи  $\xi(r) = \exp(\mu u)$  у рівняння (Д.1), маємо

$$\left( \frac{du}{dr} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{\mu} \left[ \frac{d}{dr} \left( 2 \ln r + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right] = e^\beta. \quad (\text{Д.2})$$

Тепер підставляючи  $u(r) = u_0(r) + \mu^{-1}u_1(r) + \dots$ , у нульовому порядку по  $\mu^{-1}$ , отримуємо

$$\frac{du_0}{dr} = -e^{\beta/2}, \quad (\text{Д.3})$$

де врахована асимптотична поведінка на нескінченності. У наступному порядку,

$$u_1(r) = -\ln r - \frac{\alpha}{4} + \text{const} \quad (\text{Д.4})$$

до членів порядку  $O((M\mu)^{-1})$ .

Використовуючи рівняння (Д.3), отримуємо

$$\frac{d\xi}{dr} = -\mu\xi e^{\beta/2} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{M\mu}\right) \right]. \quad (\text{Д.5})$$

Для  $M\mu \gg 1$ ,  $r > 2r_g$  і  $\xi \ll 1$ , у випадку метрики Шварцшильда (7), рівняння (Д.3) та (Д.4) дають

$$\xi(r) = \frac{Q(4/e)^{M\mu} \exp\left(-\mu r \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}\right)}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/4} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}\right)^{\mu r_g}} \left(\frac{r_g}{r}\right)^{1+M\mu}, \quad (\text{Д.6})$$

що вірно до членів порядку  $O((M\mu)^{-1})$ . Ця формула приводить до виразу (8) коли  $r \gg r_g$ .

Зроблені наближення ефективні за умови, що  $\xi$  достатньо мале, щоб не впливати на метрику через (4), (5). Отже, ми повинні оцінити, як  $\xi(r)$  впливає на  $\alpha(r)$  та  $\beta(r)$  за умов асимптотичної площинності. Ми припускаємо тут, що

$r \gg r_g$ . Використовуючи рівняння (7) як нульове наближення, поправка першого порядку до  $\chi(x)$  отримується з рівняння (4) з урахуванням або рівняння (8), або рівняння (Д.6):

$$\chi(r) = -3 \int_r^\infty dr' r' \left( \frac{d\xi}{dr} \right)^2 \approx -\frac{3}{2} \mu r \xi^2(r). \quad (\text{Д.7})$$

Отже, для того, щоб було  $|\chi_0| \ll 1$ , необхідно мати

$$X_0 \xi_0^2 \ll 1. \quad (\text{Д.8})$$

Також, за умови (Д.8) можна зробити висновок з рівняння (5), що  $|e^{-\alpha_0}(1-r_g/r_0)-1| \ll 1$  та  $|e^{\beta_0}(1-r_g/r_0)-1| \ll 1$ . У цьому випадку можна бути впевненим, що при  $r \geq r_0$  можна використовувати формули (7) та (Д.6).

1. Y. Shtanov. Light scalaron as dark matter. *Phys. Lett. B* **820**, 136469 (2021).
2. S. Capozziello, V.F. Cardone, A. Troisi. Dark energy and dark matter as curvature effects. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **08**, 001 (2006).
3. J.A.R. Cembranos. Dark matter from  $R^2$  gravity. *Phys. Rev. Lett.* **102**, 141301 (2009).
4. C. Corda, H.J. Mosquera Cuesta, R. Lorduy Gomez. High-energy scalarons in  $R^2$  gravity as a model for Dark Matter in galaxies. *Astropart. Phys.* **35**, 362 (2012).
5. T. Katsuragawa, S. Matsuzaki. Dark matter in modified gravity. *Phys. Rev. D* **95**, 044040 (2017).
6. T. Katsuragawa, S. Matsuzaki. Cosmic history of chameleonic dark matter in  $F(R)$  gravity. *Phys. Rev. D* **97**, 064037 (2018); Erratum: *Phys. Rev. D* **97**, 129902 (2018).
7. B.K. Yadav, M.M. Verma. Dark matter as scalaron in  $f(R)$  gravity models. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **10**, 052 (2019).
8. N. Parbin, U.D. Goswami. Scalarons mimicking dark matter in the Hu-Sawicki model of  $f(R)$  gravity. *Mod. Phys. Lett. A* **36**, 2150265 (2021).
9. T.P. Sotiriou, V. Faraoni.  $f(R)$  theories of gravity. *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010).
10. A. De Felice, S. Tsujikawa.  $f(r)$  theories. *Liv. Rev. Relativ.* **13**, 3 (2010).
11. S. Nojiri, S.D. Odintsov, V.K. Oikonomou. Modified gravity theories on a nutshell: Inflation, bounce and late-time evolution. *Phys. Rep.* **692**, 1 (2017).
12. V.I. Zhdanov, O.S. Stashko, Y.V. Shtanov. Spherically symmetric configurations in the quadratic  $f(R)$  gravity. *Phys. Rev. D* **110**, 024056 (2024).
13. A. de La Cruz-Dombriz, A. Dobado, A.L. Maroto. Black holes in  $f(R)$  theories. *Phys. Rev. D* **80**, 124011 (2009).
14. S. Bhattacharya. Rotating Killing horizons in generic  $F(R)$  gravity theories. *Gen. Relativ. Gravit.* **48**, 128 (2016).
15. P. Canate. A no-hair theorem for black holes in  $f(R)$  gravity. *Class. Quant. Gravity* **35**, 025018 (2017).
16. G.G.L. Nashed, S. Nojiri. Nontrivial black hole solutions in  $f(R)$  gravitational theory. *Phys. Rev. D* **102**, 124022 (2020).

17. G.G.L. Nashed, S. Nojiri. Specific neutral and charged black holes in  $f(R)$  gravitational theory. *Phys. Rev. D* **104**, 124054 (2021).
18. E. Hernández-Lorenzo, C.F. Steinwachs. Naked singularities in quadratic  $f(R)$  gravity. *Phys. Rev. D* **101**, 124046 (2020).
19. D.J. Kapner, T.S. Cook, E.G. Adelberger, J.H. Gundlach, B.R. Heckel, C.D. Hoyle, H.E. Swanson, Tests of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 021101 (2007).
20. E.G. Adelberger, B.R. Heckel, S.A. Hoedl, C.D. Hoyle, D.J. Kapner, A. Upadhye. Particle-physics implications of a recent test of the gravitational inverse-square law. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 131104 (2007).
21. J.A.R. Cembranos, Modified gravity and dark matter. *J. Phys. Conf. Ser.* **718**, 032004 (2016).
22. A.A. Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Phys. Lett. B* **91**, 99 (1980).
23. R.A. Asanov. Static scalar and electric fields in Einstein's theory of relativity. *Zh. Èksp. Teor. Fiz.* **26**, 424 (1968).
24. R.A. Asanov. Point source of massive scalar field in gravitational theory. *Theor. Mat. Phys.* **20**, 667 (1974).
25. D.J. Rowan, G. Stephenson. The massive scalar meson field in a Schwarzschild background space. *J. Phys. A* **9**, 1261 (1976).
26. Y. Akrami *et al.* (Planck Collaboration). Planck 2018 results. X. Constraints on inflation. *Astron. Astrophys.* **641**, A10 (2020).
27. Y. Shtanov, V. Sahni, S.S. Mishra. Tabletop potentials for inflation from  $f(R)$  gravity. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **03**, 023 (2023).
28. V.I. Zhdanov, O.S. Stashko. Static spherically symmetric configurations with N nonlinear scalar fields: Global and asymptotic properties. *Phys. Rev. D* **101**, 064064 (2020).

Одержано 12.03.25.

Переклад на українську мову О. Войтенка

V.I. Zhdanov

SPHERICALLY SYMMETRIC  
CONFIGURATIONS IN THE DARK  
MATTER MODEL WITH LIGHT SCALARON

Static spherically symmetric (SSS) solutions of the quadratic  $f(R)$  gravity are studied in the Einstein's frame under conditions of asymptotic flatness. Following recent dark matter model [1], we consider the scalaron mass of the order of several meV. We found a representation of the basic equations that enabled us to perform a numerical investigation of the SSS configurations with sufficiently large (astrophysically relevant) masses. There is always a region around the center with significant effects due to a (nontrivial) scalaron field. The size of this region can be essentially larger than the Schwarzschild radius of the configuration. We describe asymptotic regimes near the naked singularity at the center and at spatial infinity and relate the parameters of these regimes.

*Keywords:* compact astrophysical objects, modified gravity, scalar fields.