
О.С. ТАРНАВСЬКИЙ, М.Ф. ЛЕДНЕЙ, С.П. БЕЛИХ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, фізичний факультет
(Просп. Академіка Глушкова, 4, Київ 03680; e-mail: oleksandr.tarnavskyy@gmail.com,
ledney@univ.kiev.ua, sveta_pavl@ukr.net)

КОЕФІЦІЄНТИ ВІДБИВАННЯ ТА ПРОХОДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ, НОРМАЛЬНО ПАДАЮЧОЇ НА ШАРУВАТУ СТРУКТУРУ

УДК 539

Отримано прості аналітичні вирази для коефіцієнтів відбивання та проходження плоскої лінійно поляризованої електромагнітної хвилі у випадку нормального падіння на шарувату структуру з плоскопаралельних діелектричних шарів. Показники заломлення прошарків можуть бути комплексними. На відміну від стандартного методу трансфер-матриці, в якому коефіцієнти відбивання та проходження електромагнітної хвилі отримуються неявно, запропонований метод дає явний вигляд для коефіцієнтів відбивання та проходження через товщини прошарків, а також коефіцієнтів формул Френеля для меж поділу між прошарками. Як приклад застосування отриманих результатів, знайдено коефіцієнт відбивання електромагнітної хвилі нормально падаючої на напівнескінченну періодичну структуру, утворену чергуванням двох діелектричних шарів.

Ключові слова: коефіцієнт відбивання, коефіцієнт проходження, оптика шаруватих структур, формули Френеля.

1. Вступ

Оптичні властивості шаруватих структур, в яких чергуються прошарки різних матеріалів, викликають значне зацікавлення у зв'язку з їх численними застосуваннями в радіоелектронних пристроях типу антен, плазмоніці, фотоелектроніці, а саме, в ролі дзеркал Брегга, оптичних перемикачів та фільтрів тощо. Використання рідких кристалів, які є чутливими до зовнішніх електричного/магнітного чи світлового полів, в ролі принаймні одного або частини прошарків [1] відкриває ши-

рокі можливості динамічного керування оптичними властивостями шаруватих структур за допомогою слабких зовнішніх квазістатичних електричних полів. Шаруваті структури з прошарками рідких кристалів знайшли практичне застосування в широкому діапазоні частот, від оптичного до терагерцового [2].

Очевидно розрахунок коефіцієнтів проходження та відбивання електромагнітних хвиль є актуальною і першочерговою задачею в усіх застосуваннях оптичних шаруватих структур. Так, автори [3] був запропонований поліноміальний підхід для пошуку коефіцієнтів відбивання та проходження електромагнітної хвилі через шарувату структуру. Рекурсивні співвідношення для розрахунку узагальнених коефіцієнтів Френеля для шаруватої структури використовувалися в [4]. Вплив металевого прошарку на коефіцієнти Френеля, зокрема в шаруватих структурах, досліджувався в [5]. Ге-

Цитування: Тарнавський О.С., Ледней М.Ф., Бєлих С.П. Коефіцієнти відбивання та проходження електромагнітної хвилі, нормально падаючої на шарувату структуру. *Укр. фіз. журн.* **70**, № 12, 860 (2025).

© Видавець ВД "Академперіодика" НАН України, 2025. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

нерація другої гармоніки на межах поділу шаруватого середовища теоретично розглядалася в [6]. Спроба отримати вигляд коефіцієнта проходження електромагнітної хвилі через анізотропне періодичне середовище здійснена в [7]. Вивід формул Френеля для випадку неплоских меж поділу середовищ міститься в [8].

Важливим з точки зору практичного застосування є випадок нормального падіння електромагнітної хвилі на шарувату структуру. У цьому випадку розроблений стандартний метод трансформатриці для знаходження коефіцієнтів відбивання і проходження електромагнітної хвилі, викладений, зокрема, в [9]. Хоча цей метод відносно простий, проте, за умови великої кількості прошарків, він передбачає перемножування великого числа матриць. У випадку нескінченної шаруватої структури число перемножуваних матриць прямує до нескінченності. Така ситуація може бути суттєво незручною для числового рахунку та може призводити до накопичення похибки. Крім того, результуючі формули методу містять добутки матриць, що робить сам результат розрахунку неявним. За умови нормального падіння електромагнітної хвилі на шарувату структуру робилися спроби спростити процедуру отримання коефіцієнтів відбивання та проходження. Зокрема, в [10] автори неявно пов'язували коефіцієнти відбивання та проходження електромагнітної хвилі для двох сусідніх прошарків середовища. Для цього використовувалися рекурентні співвідношення, які пов'язують амплітуди електричного і магнітного полів всередині трьох послідовних прошарків. Запропонований підхід також не дозволяє врахувати втрати енергії в середовищі, оскільки спирається на закон збереження енергії.

У представлений роботі отримані явні вирази для коефіцієнтів відбивання та проходження плоскої лінійно поляризованої електромагнітної хвилі у випадку нормального падіння на шарувату структуру, що складається з плоскопаралельних діелектричних шарів з заданими товщинами та показниками заломлення. Останні при цьому можуть бути комплексними. Особливо простого вигляду в формі звичайного неперервного дробу набуває коефіцієнт відбивання. Як відомо умови чисельної стійкості розрахунку неперервних дробів добре вивчені [11], тому такі результати є зручними для числових розрахунків, оскільки допускають про-

сту програмну реалізацію. Це, зокрема, дозволяє отримати надійні результати у випадку напівнескінченної шаруватої структури. Зазначимо, що запропонований підхід мінімізує накопичення похибки в числових розрахунках величин коефіцієнтів відбивання та проходження електромагнітних хвиль через шаруваті середовища. Робота організована таким чином.

У розділі 2 описана фізична модель, отримані рекурентні співвідношення для амплітуд електричного поля електромагнітних хвиль, які поширюються у прямому та зворотньому напрямках, в трьох послідовних прошарках розглядуваної структури. Приведено загальний вигляд коефіцієнтів відбивання і проходження електромагнітної хвилі через шарувату структуру.

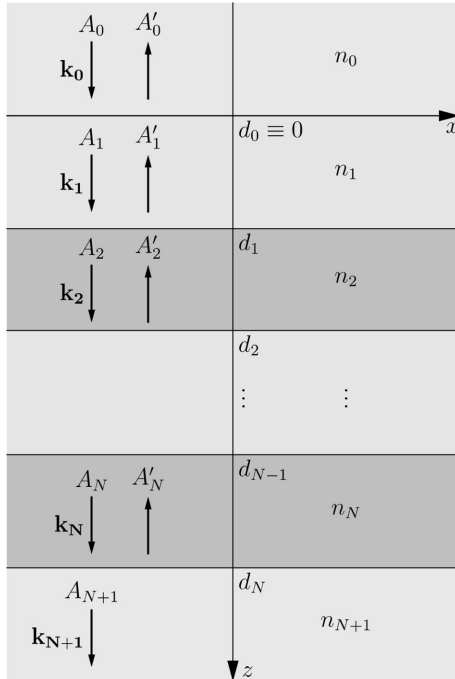
У розділі 3 коефіцієнти відбивання та проходження електромагнітної хвилі виражені через товщини прошарків та коефіцієнти формул Френеля для меж поділу прошарків. В ролі перевірки, отримані результати застосовано до добре вивчених випадків, а саме, двох напівнескінченних середовищ та одного прошарку, обмеженого двома напівнескінченними середовищами.

У розділі 4 за допомогою запропонованого підходу отримано аналітичний вираз для коефіцієнта відбивання електромагнітної хвилі від напівнескінченної періодичної структури, утвореної чергуванням двох діелектричних шарів.

Обговорення результатів та короткі висновки роботи наведені в розділі 5.

2. Основні рівняння та їх розв'язок

Розглянемо шарувату структуру, утворену чергуванням N однорідних плоскопаралельних діелектричних шарів, обмежену площинами $z = 0$ та $z = L$. Розглядувана структура поміщена на однорідну діелектричну підкладку з дійсним показником заломлення. З іншого боку зі сторони повітря на шарувату структуру в додатному напрямку осі Oz нормально падає плоска монохроматична світлова хвиля частоти ω . Остання вважається поляризованою в напрямку осі Ox , орієнтованої вздовж межі поділу повітря та шаруватого середовища. Світлова хвиля по мірі проникнення в середовища діелектричних шарів зазнає ряд послідовних відбивань на межах поділу останніх. Схема розглядуваної структури разом з напрямками



Структура N однорідних плоскопаралельних діелектричних шарів. Падаюча хвиля поширюється вздовж напрямку Oz . У кожному шарі амплітуди хвиль, що поширюються вздовж Oz і назад, позначаються як A і A' відповідно

поширення падаючих A_i і відбитих A'_i електромагнітних хвиль наведена на рисунку.

У межах кожного шару розглядуваної структури вектор напруженості $\mathbf{E}$ електричного поля світлової хвилі є розв'язком хвильового рівняння $\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \mathbf{E} = 0$, де n – показник заломлення середовища відповідного шару. Вектор напруженості $\mathbf{H}$ магнітного поля світлової хвилі знаходиться із рівняння Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$. У напрямку координатних осей Ox та Oy розглядувану систему вважаємо однорідною. Тоді у відповідності з наведеним, у повітрі при $z < 0$ та середовищі i -го діелектричного шару при $d_{i-1} < z < d_i$ (тут $d_0 \equiv 0$, $d_N \equiv L$) величини векторів напруженості електричного E_i і магнітного H_i полів відповідно матимуть вигляд

$$\begin{aligned} E_i(z) &= A_i e^{ikn_i z} + A'_i e^{-ikn_i z}, \\ H_i(z) &= \frac{n_i}{c\mu_0} (A_i e^{ikn_i z} - A'_i e^{-ikn_i z}), \end{aligned} \quad (1)$$

де $k = \omega/c$ – хвильове число електромагнітної хвилі у вакуумі, $i = 0, 1, 2, \dots, N$ – нумерує середовища

повітря та плоскопаралельних діелектричних прошарків, з показниками заломлення n_i відповідно (див. рисунок).

Нижче шаруватого середовища, $z \geq L$, в області діелектричної підкладки з дійсним показником заломлення n_{N+1} , має місце тільки хвиля, що пройшла через систему, з векторами напруженості електричного і магнітного полів відповідно

$$\begin{aligned} E_{N+1}(z) &= A_{N+1} e^{ikn_{N+1} z}, \\ H_{N+1}(z) &= \frac{n_{N+1} A_{N+1}}{c\mu_0} e^{ikn_{N+1} z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Формально введемо “відбиту” хвилю в середовищі діелектричної підкладки за шаруватою системою, позначивши $A'_{N+1} \equiv 0$.

Очевидно на межах поділу $z = d_i$ (тут $i = 0, 1, 2, \dots, N$) діелектричних шарів вектори напруженості електричного E_i і магнітного H_i полів світлової хвилі повинні задовольняти межові умови електродинаміки. Із умови рівності тангенціальних компонент електричного та магнітного полів на межах поділу середовищ, отримаємо систему рівнянь, яка зв'яже амплітуди падаючих A_i і відбитих A'_i хвиль у сусідніх прошарках:

$$\begin{cases} A_i e^{ikn_i d_i} + A'_i e^{-ikn_i d_i} = \\ = A_{i+1} e^{ikn_{i+1} d_i} + A'_{i+1} e^{-ikn_{i+1} d_i}, \\ n_i (A_i e^{ikn_i d_i} - A'_i e^{-ikn_i d_i}) = \\ = n_{i+1} (A_{i+1} e^{ikn_{i+1} d_i} - A'_{i+1} e^{-ikn_{i+1} d_i}). \end{cases} \quad (3)$$

Виразивши звідси амплітуди A_{i+1} та A'_{i+1} через A_i та A'_i , матимемо

$$A_{i+1} = a_i e^{i\delta_i} A_i + b_i e^{-i\sigma_i} A'_i, \quad (4)$$

$$A'_{i+1} = b_i e^{i\sigma_i} A_i + a_i e^{-i\delta_i} A'_i, \quad (5)$$

де введені позначення

$$a_i = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n_i}{n_{i+1}} \right), \quad b_i = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n_i}{n_{i+1}} \right), \quad (6)$$

$$\sigma_i = k(n_i + n_{i+1})d_i, \quad \delta_i = k(n_i - n_{i+1})d_i. \quad (7)$$

Аналогічно, виразимо амплітуди A_i та A'_i через A_{i-1} та A'_{i-1}

$$A_i = a_{i-1} e^{i\delta_{i-1}} A_{i-1} + b_{i-1} e^{-i\sigma_{i-1}} A'_{i-1}, \quad (8)$$

$$A'_i = b_{i-1} e^{i\sigma_{i-1}} A_{i-1} + a_{i-1} e^{-i\delta_{i-1}} A'_{i-1}. \quad (9)$$

Тоді з співвідношень (4), (8), (9), можна виразити амплітуду A_{l+1} через A_l та A_{l-1}

$$A_{l+1} = \alpha_l^- A_l + \beta_l^- A_{l-1}. \quad (10)$$

Аналогічно, з співвідношень (5), (8), (9), можна виразити амплітуду A'_{l+1} через A'_l та A'_{l-1}

$$A'_{l+1} = \alpha_l^+ A'_l + \beta_l^+ A'_{l-1}. \quad (11)$$

Тут введені позначення

$$\alpha_l^\pm = a_l e^{\mp i \delta_l} + a_{l-1} \frac{b_l}{b_{l-1}} e^{\pm i(\delta_{l-1} + \sigma_l - \sigma_{l-1})},$$

$$\beta_l^\pm = b_l \left[b_{l-1} - \frac{a_{l-1}^2}{b_{l-1}} \right] e^{\pm i(\sigma_l - \sigma_{l-1})}, \quad (12)$$

де $l = 1, 2, \dots, N$.

Неважко бачити, що з співвідношення (11) випливає

$$\frac{A'_{l-1}}{A'_l} = -\frac{\alpha_l^+}{\beta_l^+} + \frac{1}{\beta_l^+} \cdot \frac{1}{\frac{A'_l}{A'_{l+1}}}. \quad (13)$$

Послідовно застосовуючи цю рекурентну формулу N разів, починаючи з $l = 0$, знайдемо відношення амплітуд відбитої електромагнітної хвилі в повітрі та першому плоскопаралельному шарі:

$$\frac{A'_0}{A'_1} = -\frac{\alpha_1^+}{\beta_1^+} + \frac{1}{\beta_1^+} \cdot \frac{1}{-\frac{\alpha_2^+}{\beta_2^+} + \frac{1}{\beta_2^+} \cdot \frac{1}{\dots \frac{-\frac{\alpha_N^+}{\beta_N^+} + \frac{1}{\beta_N^+} \cdot \frac{A'_{N+1}}{A'_N}}}}. \quad (14)$$

Враховуючи те, що в середовищі підкладки за шаруватою структурою $A'_{N+1} = 0$, отримуємо

$$\beta_1^+ \frac{A'_0}{A'_1} = -\alpha_1^+ + \frac{\beta_2^+}{-\alpha_2^+ + \frac{\beta_3^+}{\dots \frac{-\alpha_{N+1}^+ + \frac{\beta_N^+}{\alpha_N^+}}}}. \quad (15)$$

Зі співвідношення (5) при $l = 0$ отримаємо зв'язок

$$\frac{A'_0}{A_0} = \frac{\beta_0^+}{-\alpha_0^+ + \frac{A'_1}{A'_0}}, \quad (16)$$

де враховано, що $\sigma_0 = \delta_0 = 0$ (7), оскільки $d_0 = 0$, а також $\alpha_0^+ = a_0$, $\beta_0^+ = b_0$ (12).

Підстановка виразу (16) у співвідношення (15) дає величину відношення амплітуд відбитої та падаючої на шарувату структуру електромагнітних хвиль:

$$r = \frac{A'_0}{A_0} = \frac{\beta_0^+}{-\alpha_0^+ + \frac{\beta_1^+}{-\alpha_1^+ + \frac{\beta_2^+}{\dots \frac{-\alpha_{N-1}^+ + \frac{\beta_N^+}{-\alpha_N^+}}}}}. \quad (17)$$

Звідки маємо величину коефіцієнта відбивання $R = |r|^2$ електромагнітної хвилі від шаруватої структури.

Знайдемо вигляд для коефіцієнта проходження електромагнітної хвилі через шарувате середовище. Із співвідношення (10) випливає

$$\frac{A_{l+1}}{A_l} = \alpha_l^- + \beta_l^- \cdot \frac{1}{\frac{A_l}{A_{l+1}}}. \quad (18)$$

Послідовно застосовуючи це рекурентне співвідношення l разів, запишемо відношення амплітуд у сусідніх шарах для хвилі, що поширюється в напрямку осі Oz , у вигляді

$$\frac{A_{l+1}}{A_l} = \alpha_l^- + \frac{\beta_l^-}{\alpha_{l-1}^- + \frac{\beta_{l-1}^-}{\dots \frac{\alpha_1^- + \frac{\beta_1^-}{A_1}}{A_0}}}. \quad (19)$$

З співвідношення (4) при $l = 0$ випливає

$$\frac{A_1}{A_0} = \alpha_0^- + \beta_0^- r, \quad (20)$$

де $\alpha_0^- = a_0$, $\beta_0^- = b_0$ (12), а також враховано $\sigma_0 = \delta_0 = 0$ (7).

Знайдемо відношення амплітуд хвилі, що пройшла через шарувате середовище, та падаючої хвилі як

$$t = \frac{A_{N+1}}{A_0} = \frac{A_{N+1}}{A_N} \cdot \frac{A_N}{A_{N-1}} \cdot \dots \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{A_1}{A_0}. \quad (21)$$

Використовуючи (19) та (20), отримуємо

$$t = \prod_{l=0}^N \left[\alpha_l^- + \frac{\beta_l^-}{\alpha_{l-1}^- + \frac{\beta_{l-1}^-}{\dots \frac{\beta_1^-}{\alpha_1^- + \frac{\beta_0^-}{r^{-1}}}}} \right]. \quad (22)$$

Звідки величина коефіцієнта проходження електромагнітної хвилі через шарувате середовище $T = \frac{n_{N+1}}{n_0} |t|^2$.

3. Коефіцієнти відбивання та проходження хвиль

Отримані вирази для коефіцієнтів відбивання R та проходження T електромагнітної хвилі через шарувате середовище можна спростити, одночасно виразивши їх через величини, що мають безпосередній фізичний зміст, а саме, товщини прошарків $h_l = d_l - d_{l-1}$ і коефіцієнти формул Френеля для випадку нормального падіння плоскої хвилі на межу поділу двох середовищ [12]:

$$\rho_l = -\frac{b_l}{a_l} = \frac{n_l - n_{l+1}}{n_l + n_{l+1}}. \quad (23)$$

Тут ρ_l є відношення амплітуд відбитої та падаючої хвилі на межі поділу двох напівнескінчених середовищ з показниками заломлення n_l та n_{l+1} . Перепишемо (17) у вигляді

$$r = \frac{-\frac{\beta_0^+}{\alpha_0^+}}{1 - \frac{-\frac{\beta_1^+}{\alpha_0^+ \alpha_1^+}}{1 - \frac{-\frac{\beta_2^+}{\alpha_1^+ \alpha_2^+}}{\dots \frac{-\beta_N^+}{\alpha_{N-1}^+ \alpha_N^+}}}}. \quad (24)$$

Введемо позначення

$$\xi_0^\pm = -\frac{\beta_0^\pm}{\alpha_0^\pm} = \rho_0, \quad \xi_l^\pm = -\frac{\beta_l^\pm}{\alpha_l^\pm \alpha_{l-1}^\pm} = \frac{\rho_l (1 - \rho_0^2)}{\rho_l + \rho_0 e^{\mp 2ik_1 h_1}}. \quad (25)$$

$$\xi_l^\pm = \frac{-\beta_l^\pm}{\alpha_{l-1}^\pm \alpha_l^\pm} = \frac{\rho_{l-2} \rho_l (1 - \rho_{l-1}^2)}{(\rho_{l-2} + \rho_{l-1} e^{\pm 2ik_{l-1} h_{l-1}})(\rho_l + \rho_{l-1} e^{\mp 2ik_l h_l})}, \quad (26)$$

де $l = 2, 3, \dots, N$. Тоді отримуємо такий вигляд для коефіцієнта відбивання $R = |r|^2$ електромагнітної хвилі, де

$$r = \frac{\xi_0^+}{1 - \frac{\xi_1^+}{1 - \frac{\xi_2^+}{\dots \frac{1}{1 - \xi_N^+}}}}. \quad (27)$$

Також можна спростити вираз для t . Із співвідношення (22) легко отримується

$$t = \prod_{l=0}^N \alpha_l^- \left(1 - \frac{-\frac{\beta_l^-}{\alpha_{l-1}^- \alpha_l^-}}{1 - \frac{-\frac{\beta_{l-1}^-}{\alpha_{l-2}^- \alpha_{l-1}^-}}{\dots \frac{-\beta_1^-}{\alpha_0^- \alpha_1^-}} \frac{-\beta_0^-}{\alpha_0^-}} \right). \quad (28)$$

Добуток $\prod_{l=0}^N \alpha_l^-$ можна виразити через коефіцієнти ρ_l формул Френеля та товщини h_l прошарків (див. Додаток 5)

$$\prod_{l=0}^N \alpha_l^- = \sqrt{\frac{n_0}{n_{N+1}}} e^{-ik_{N+1} d_N} \prod_{l=1}^N e^{ik_l h_l} \cdot \prod_{l=0}^N \zeta_l, \quad (29)$$

де

$$\zeta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_0^2}}, \quad \zeta_l = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_l^2}} \left(1 + \frac{\rho_l}{\rho_{l-1}} e^{-2ik_l h_l} \right). \quad (30)$$

Тоді вираз для t (28), враховуючи (29), і позначення (25), (26), можна переписати у вигляді

$$t = \sqrt{\frac{n_0}{n_{N+1}}} e^{-ik_{N+1} d_N} \prod_{l=1}^N e^{ik_l h_l} \cdot \prod_{l=0}^N \zeta_l \eta_l, \quad (31)$$

де

$$\eta_l = 1 - \frac{\xi_l^-}{1 - \frac{\xi_{l-1}^-}{\dots \frac{\xi_1^-}{1 - \frac{\xi_0^-}{r^{-1}}}}}. \quad (32)$$

Звідки маємо остаточний вигляд для коефіцієнта $T = \frac{n_{N+1}}{n_0} |t|^2$ проходження електромагнітної хвилі через шарувату структуру

$$T = \prod_{l=1}^N |e^{ik_l h_l}|^2 \cdot \prod_{l=0}^N |\zeta_l \eta_l|^2. \quad (33)$$

Тут враховано, що показник заломлення підкладки за шаруватою структурою є дійсним, а отже $|e^{-ik_{N+1} d_N}| \equiv 1$.

Зауважимо, що перший добуток в (33) відмінний від одиниці лише у випадку шарів з комплексними показниками заломлення. Для випадку шарів з дійсними показниками заломлення, маємо

$$T = \prod_{l=0}^N |\zeta_l \eta_l|^2. \quad (34)$$

Таким чином, формули (23), (25)–(27), (30), (32), (33) дають значення коефіцієнтів відбивання і проходження електромагнітної хвилі через плоску шарувату структуру у випадку нормального падіння. Особливо простий вираз отримується для коефіцієнта відбивання R .

Перевіримо ці формули застосувавши їх до простих випадків, а саме, двох напівнескінчених середовищ ($N = 0$) та одного прошарку, обмеженого двома напівнескінченими середовищами ($N = 1$).

У випадку $N = 0$ для коефіцієнта відбивання маємо

$$R = |r|^2 = |\xi_0^+|^2 = \rho_0^2, \quad \text{де} \quad \rho_0 = \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}, \quad (35)$$

що є правильним результатом, який узгоджується з формулою Френеля [12]. Для коефіцієнта проходження матимемо, як і повинно бути

$$T = |\zeta_0(1 - \xi_0^- r)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_0^2}} (1 - \rho_0^2) \right|^2 = 1 - \rho_0^2. \quad (36)$$

У випадку $N = 1$ для прошарку з дійсним показником заломлення також отримуємо правильні результати для коефіцієнта відбивання $R = |r|^2$, де

$$r = \frac{\xi_0^+}{1 - \xi_1^+} = \frac{\rho_0 + \rho_1 e^{2ik_1 h_1}}{1 + \rho_0 \rho_1 e^{2ik_1 h_1}}, \quad (37)$$

та коефіцієнта проходження $T = |t|^2$, де

$$t = \zeta_0 \zeta_1 (1 - \xi_0^- r) \left(1 - \frac{\xi_1^-}{1 - \xi_0^- r} \right). \quad (38)$$

Після деяких спрощень матимемо

$$t = \frac{\sqrt{(1 - \rho_0^2)(1 - \rho_1^2)}}{1 + \rho_0 \rho_1 e^{2ik_1 h_1}}. \quad (39)$$

Формули (37), (39) узгоджуються з результатами роботи [10].

4. Напівнескінченна шарувата структура

Нехай маємо напівнескінченну шарувату структуру, в якій чергуються два шари діелектрика з показниками заломлення n_1 та n_2 і з товщинами відповідно h_1 та h_2 . На таку структуру з повітря нормально падає електромагнітна хвиля. У цьому випадку дробу у виразі для коефіцієнта R (27) відбивання електромагнітної хвилі стають нескінченними.

Тоді, враховуючи періодичність структури, в формулі (27) коефіцієнти починаючи з ξ_3 та ξ_4 будуть повторюватися

$$r = \frac{\xi_0^+}{1 - \frac{\xi_1^+}{1 - \frac{\xi_2^+}{1 - \frac{\xi_3^+}{1 - \frac{\xi_4^+}{1 - \frac{\xi_3^+}{1 - \frac{\xi_2^+}{1 - \frac{\xi_1^+}{1 - \frac{\xi_0^+}{\dots}}}}}}}}}. \quad (40)$$

Як результат, вираз для r може бути записаний так

$$r = \frac{\xi_0^+}{1 - \frac{\xi_1^+}{1 - \frac{\xi_2^+}{\gamma}}}, \quad (41)$$

де величина γ знаходиться з рівняння

$$\gamma = 1 - \frac{\xi_3^+}{1 - \frac{\xi_4^+}{\gamma}} \quad (42)$$

і є рівною

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(1 + \xi_4^+ - \xi_3^- + \sqrt{(1 + \xi_4^+ - \xi_3^-)^2 - 4\xi_4^+} \right). \quad (43)$$

Тут знак “+” перед коренем вибраний керуючись вимогою, що у граничному випадку $n_1 \rightarrow n_2$, маємо одну межу поділу двох напівнескінчених середовищ. Тому має бути $r = \xi_0^+$, що забезпечується відповідним вибором знака перед коренем.

5. Висновки

У представлений роботі теоретично досліджено поширення плоскої лінійно поляризованої електромагнітної хвилі через шарувату структуру, що складається з плоскопаралельних діелектричних шарів, у випадку нормального падіння. Отримано аналітичні вирази для коефіцієнтів відбивання та проходження електромагнітної хвилі через розглядану структуру. Хоча знаходження коефіцієнтів відбивання та проходження електромагнітної хвилі у випадку нормального падіння на плоску шарувату структуру не становить принципових труднощів, проте, відповідні результати, отримані стандартними методами, доволі громіздкі. Натомість вирази для коефіцієнтів відбивання та проходження електромагнітної хвилі, отримані в даній роботі, є відносно простими і дозволяють явно виразити результат через фізичні параметри шаруватого середовища, а саме, товщини прошарків та коефіцієнти формул Френеля для межі поділу прошарків.

Отримані результати також зручні для чисельних розрахунків, оскільки обчислення неперервного дробу може бути програмно реалізоване за допомогою одного циклу. Крім того, чисельна стійкість неперервних дробів добре вивчена. Запропонований підхід мінімізує накопичення похибки в числових розрахунках величин коефіцієнтів відбивання та проходження електромагнітних хвиль через шаруваті середовища.

На основі наведеного підходу аналітично отримано простий вигляд коефіцієнта відбивання електромагнітної хвилі для напівнескінченної періо-

дичної структури, утвореної чергуванням двох діелектричних шарів.

ДОДАТОК

Виразимо добуток $\prod_{l=0}^N \alpha_l^-$ через величини коефіцієнтів ρ_l формул Френеля для межі поділу прошарків, товщин h_l та показників n_l заломлення прошарків відповідно. Користуючись означенням α_l^- , маємо

$$\prod_{l=0}^N \alpha_l^- = a_0 \prod_{l=1}^N \left[a_l e^{i\delta_l} + a_{l-1} \frac{b_l}{b_{l-1}} e^{-i(\delta_{l-1} + \sigma_l - \sigma_{l-1})} \right]. \quad (Д.1)$$

Вносячи з l -го множника добутку величину $a_l e^{i\delta_l}$, матимемо

$$\prod_{l=0}^N \alpha_l^- = e^{i \sum_{l=1}^N \delta_l} \prod_{l=0}^N a_l \times \times \prod_{l=1}^N \left[1 + \frac{b_l}{a_l} \frac{a_{l-1}}{b_{l-1}} e^{-i(\delta_{l-1} - \sigma_{l-1} + \delta_l + \sigma_l)} \right]. \quad (Д.2)$$

Враховуючи те, що $\rho_l = -\frac{b_l}{a_l}$ і

$$\delta_{l-1} - \sigma_{l-1} + \delta_l + \sigma_l = 2kn_l h_l, \quad (Д.3)$$

а також

$$\sum_{l=1}^N \delta_l = -kn_{N+1} d_N + \sum_{l=1}^N kn_l h_l, \quad (Д.4)$$

отримуємо

$$\prod_{l=0}^N \alpha_l^- = e^{-ikn_{N+1} d_N} \prod_{l=1}^N e^{ikn_l h_l} \times \times \prod_{l=0}^N a_l \cdot \prod_{l=1}^N \left[1 + \frac{\rho_l}{\rho_{l-1}} e^{-2ikn_l h_l} \right]. \quad (Д.5)$$

Виразуємо $\prod_{l=0}^N a_l$. Враховуючи, що $\rho_l = \frac{n_l - n_{l+1}}{n_l + n_{l+1}}$, маємо

$$1 - \rho_l^2 = \frac{4n_l n_{l+1}}{(n_l + n_{l+1})^2} = \frac{\frac{n_l}{n_{l+1}}}{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{n_l}{n_{l+1}} \right)^2} = \frac{n_l}{n_{l+1}} \frac{1}{a_l^2}. \quad (Д.6)$$

Звідки

$$a_l = \sqrt{\frac{n_l}{n_{l+1}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_l^2}}. \quad (Д.7)$$

Тому

$$\prod_{l=0}^N a_l = \sqrt{\frac{n_0}{n_{N+1}}} \prod_{l=0}^N \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_l^2}}. \quad (Д.8)$$

Підставляючи (Д.8) в (Д.5), матимемо

$$\prod_{l=0}^N \alpha_l^- = \sqrt{\frac{n_0}{n_{N+1}}} e^{-ikn_{N+1} d_N} \prod_{l=1}^N e^{ikn_l h_l} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{1-\rho_0^2}} \prod_{l=1}^N \frac{1}{\sqrt{1-\rho_l^2}} \left[1 + \frac{\rho_l}{\rho_{l-1}} e^{-2ikn_l h_l} \right]. \quad (\text{Д.9})$$

Або у вигляді

$$\prod_{l=0}^N \alpha_l^- = \sqrt{\frac{n_0}{n_{N+1}}} e^{-ikn_{N+1}d_N} \prod_{l=1}^N e^{ikn_l h_l} \cdot \prod_{l=0}^N \zeta_l, \quad (\text{Д.10})$$

що відповідає (29).

1. Hung-Shan Chen, Yu-Jen Wang, Chia-Ming Chang, Yi-Hsin Lin. A polarizer-free liquid crystal lens exploiting an embedded-multilayered structure. *IEEE Photon. Technol. Lett.* **27**, 899 (2015).
2. Anyong Qing, Yizhe Zhao, Zhiyong Zhang. *Microwaves, Millimeter Wave and Terahertz Liquid Crystals* (Springer, 2024) [ISBN 978-981-99-8912-6].
3. J.M. Vigoureux. Polynomial formulation of reflection and transmission by stratified planar structures. *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 1697 (1991).
4. M-S. Tomaš. Recursion relations for generalized Fresnel coefficients: Casimir force in a planar cavity. *Phys. Rev. A* **81**, 044104 (2010).
5. A. Pitelet, E. Mallet, E. Centeno, A. Moreau. Fresnel coefficients and Fabry–Perot formula for spatially dispersive metallic layers. *Phys. Rev. B* **96**, 041406(R) (2017).
6. B. Busson. Sum-frequency generation at interfaces: A Fresnel story II. Analytical expressions for multilayer systems. *J. Chem. Phys.* **159**, 034706 (2023).
7. J.C. Torres-Guzmán, A. Díaz-de-Anda, J. Arriaga. Exact closed forms for the transmittance of electromagnetic waves in one-dimensional anisotropic periodic media. *J. Phys. A: Math. Theor.* **57**, 205201 (2024).
8. S. Luhn, M. Hentschel. Analytical Fresnel laws for curved dielectric interfaces. *J. Opt.* **22**, 015605 (2020).

9. A. Yariv, P. Yeh. *Optical Waves in Crystals. Propagation and Control of Laser Radiation* (John Wiley & Sons, 1984) [ISBN: 0-471-09142-1].
10. J.J. Morales, M.J. Nuevo. A general method for calculating reflection and transmission coefficients in multiple slabs. *Am. J. Phys.* **59**, 1140 (1991).
11. W.B. Jones, W.J. Thron. *Continued Fractions. Analytic Theory and Applications* (Addison-Wesley Publishing Company, 1980) [ISBN: 978-0-521-30231-9].
12. M. Zahn. *Electromagnetic Field Theory* (John Wiley & Sons, 1979) [ISBN: 978-0-471-02198-8].

Одержано 25.12.24

O.S. Tarnavskyy, M.F. Ledney, S.P. Bielykh

REFLECTANCE AND TRANSMITTANCE OF A LAYERED STRUCTURE FOR A NORMALLY INCIDENT ELECTROMAGNETIC WAVE

Simple analytic expressions have been obtained for the reflection and transmission coefficients in the case of a linearly polarized monochromatic planar electromagnetic wave normally incident on a layered structure consisting of planar dielectric layers. The refractive indices of the layers may be complex-valued. In contrast to the standard transfer-matrix method, in which implicit expressions for the reflectance and transmittance are obtained, the proposed one provides explicit expressions for those parameters in terms of the layers' thicknesses and the coefficients in the Fresnel formulas for the layer interfaces. As an example, the reflection coefficient is determined for the normal incidence of an electromagnetic wave on a semi-infinite periodic structure formed by two continuously alternating dielectric layers.

Keywords: reflectance, transmittance, optics of layered structures, Fresnel equations.