

Б.І. ЛЕВ

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14-б, Київ 03143; e-mail: bohdan.lev@gmail.com)

УДК 539

АЛГЕБРА КЛІФОРДА ЯК ШЛЯХ ДО КВАНТОВОЇ ГРАВІТАЦІЇ

У статті висувається нова гіпотеза щодо розв'язування проблеми квантування гравітації. Метою дослідження є демонстрація того, що геометричне представлення хвильової функції можна розглядати як характеристику просторово-часового многовиду. У цьому підході показано, що теорія Дірака для атома водню та динаміка Кеплера для планетної системи описують аналогічні явища у просторі-часі. Стани цих систем мають параметри, що відповідають дозволеним динамічним станам простору-часу, тим самим зберігаючи інформацію щодо корпускулярної та хвильової природи. Запропонований підхід проливає нове світло на потенційне вирішення проблем квантової гравітації.

Ключові слова: алгебра Кліфорда, хвильова функція, пробна частинка, просторово-часовий многовид.

1. Вступ

Один із підходів до квантової гравітації [1–3] припускає, що квантову теорію можна представити в геометричній формі, сумісній із загальною теорією відносності, яку вона має представляти. Особливий інтерес у цьому відношенні становить нещодавня стаття [3], у якій пропонується квантова гравітація без метричного квантування. У цій статті пропонується коваріантне розширення бомівської механіки у викривленому просторі-часі, де траєкторії створюють “приховану кривину”, замінюючи метричну суперпозицію статистичним ансамблем. У такому випадку гравітаційні ефекти виникають із детермінованих квантових траєкторій.

Як показано в попередніх дослідженнях [4–14], квантову механіку можна вивести з математичної структури алгебри Кліфорда без звернення до

зовнішнього простору Гільберта хвильових функцій. Цікавою в цьому напрямку є стаття [15], де формалізм геометричної алгебри використовується для розробки теорії, яка вдосконалює традиційну квантову механіку. Використання алгебри Кліфорда в квантовій механіці [4, 16] фактично забезпечує лише алгебраїчну структуру та приводить до квантово-механічної теорії, що не містить додаткових вимог; мало того, в термінах такого підходу можна знайти основу для загального геометричного опису як взаємодії якогось окремого типу, так і окремої частинки [17].

Просторово-часова алгебра Кліфорда є яскравим прикладом альтернативного формулювання хвильового рівняння. Рівняння Дірака можна розуміти як правило перенесення для хвильової функції будь-якого многовиду, і воно має приховану геометричну структуру [17, 18]. Це рівняння використовується як одна з можливих математичних інтерпретацій квантової механіки. Більше того, воно не відступає від принципів класичної фізики [19]. Також важливо, що в цьому випадку легко забезпечити геометричне представлення генераторів для калібрувальних перетворень. Як показано

Цитування: Лев Б.І. Алгебра Кліфорда як шлях до квантової гравітації. *Укр. фіз. журн.* **70**, № 6, 364 (2025).
© Видавець ВД “Академперіодика” НАН України, 2025.
Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

в роботах [20–22], поява полів різної природи диктується квантовими флуктуаціями і обов’язково залежить від геометричної природи фізичного вакууму, тобто від того, які фізичні властивості ми йому приписуємо.

У нашій інтерпретації рівняння перенесення для хвильової функції пробної частинки на довільному многовиді використовується як прототип теорії простору-часу, що базується на загальних фізичних принципах еквівалентності констант зв’язку частинок та динаміки цього многовиду. Як буде показано, запропонований алгебраїчний підхід є ефективним засобом опису поведінки електронів в атомі водню та планетарних системах. Геометричне представлення загальної теорії відносності дозволяє відновити стандартний квантовий підхід, а також може бути використане для опису фізичної поведінки у великих масштабах. Хвильові властивості макроскопічних частинок проявляються в поведінці їхніх “траєкторій” у спостережуваному просторі-часі.

Основна ідея статті полягає в тому, щоб показати, що квантові властивості “пробної частинки” можуть впливати з властивостей простору-часу, в якому відбувається динаміка. Тестова частинка проявляє корпускулярні або хвильові властивості на динамічному многовиді, що залежить від масштабу. Геометричне визначення хвильової функції пропонує модель, де хвильова функція розглядається як властивість простору-часу та приймає ймовірнісне значення з відповідних станів многовиду, в яких “пробна частинка” присутня та має відповідні коефіцієнти зв’язку. Такий підхід, на нашу думку, вказує шлях до квантування гравітаційного поля. Квантування викривленого простору-часу в такому випадку здійснюється через квантування можливих траєкторій руху пробної частинки, наділеної відповідними фізичними властивостями.

2. Метод

2.1. Геометричне представлення “пробної частинки”

По-перше, необхідно зазначити, що стандартне визначення пробної частинки є ідеалізацією фізичного об’єкта, властивості якого (спін, маса, заряд або розмір) використовуються для опису його динаміки на довільному просторово-часовому многовиді, що безпосередньо впливає на довільно вибрані вла-

стивості в різних масштабах. Первинна концепція базується на відповідності між спіновими матрицями Дірака γ_μ та елементами зовнішньої алгебри, а також на визначенні стану через представлення Кліфордової алгебри простору-часу $Cl_{1,3}$. Можна постулювати, що кожне елементарне утворення в будь-якій точці можна описати в термінах числа Кліфорда. Така характеристика просторово-часового многовиду у відповідній точці представляється як хвильова функція пробної частинки або збудження.

Збудження просторово-часового многовиду в довільній точці характеризується за допомогою повного геометричного об’єкта, що складається з прямих форм індукованого простору алгебри Кліфорда [18, 23–25]. У цьому випадку повний геометричний об’єкт можна записати як пряму суму скаляра, вектора, бівектора, тривектора та псевдоскаляра, тобто $\Psi = S \oplus V \oplus B \oplus T \oplus P$, де базисний вектор представлений матрицею Дірака γ_μ . Іншим елементом симетрії є заміна множення базисних векторів на обернені у представленні чисел Кліфорда, що перетворює їх на $\bar{\Psi} = S \oplus V \oplus B \oplus T \oplus P$. Кільцева структура задовольняється прямим добуток у символічному записі $\Psi\Phi = \Psi \cdot \Phi + \Psi \wedge \Phi$, де $\Psi \cdot \Phi$ – це скалярний добуток або згортка, яка зменшує кількість базисних векторів, а $\Psi \wedge \Phi$ – це зовнішній добуток, який збільшує кількість базисних векторів.

Симплектична структура алгебри Кліфорда впливає з основного співвідношення для множення двох базисних векторів $\gamma_\mu \gamma_\nu = \gamma_\mu \cdot \gamma_\nu + \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu$, де одночасно присутній скаляр та зовнішній добуток для базисних векторів. Скалярний добуток $\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = \eta_{\mu\nu} I$ можна визначити як метричний тензор Мінковського в евклідовому просторі (антикомутатор), а зовнішній добуток $\gamma_\mu \wedge \gamma_\nu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) = s_{\mu\nu}$ – як комутатор базисних матриць.

Якщо ми помножимо кожне число Кліфорда на фіксований стовпець u із чотирма елементами, де перший елемент дорівнює одиниці, а всі інші дорівнюють нулю, ми отримаємо біспінор Дірака з чотирма елементами $B = u\Psi$. Використовуючи цей стовпець, можна відтворити спінове представлення кожного числа Кліфорда. Комплексний спряжений біспінор можна отримати множенням того ж числа Кліфорда на рядок u^+ , перший елемент якого дорівнює одиниці, а всі інші дорівнюють ну-

лю, $B^* = \bar{\Psi}u^+$, за умови, що $u^+u = 1$. Існує повна відповідність між отриманими таким чином біспінорами та елементами зовнішньої алгебри – ізоморфізм [4].

Тепер визначимо правило порівняння двох чисел Кліфорда в різних точках многовиду. Довільне перетворення системи координат може бути задане через базисні деформації $e_\mu = R\gamma_\mu\tilde{R}$, де R – число Кліфорда, яке описує довільні зміни базису (включаючи довільні переміщення та обертання), що не порушують його нормалізацію, тобто за умови $\tilde{R}R = 1$. Неважко перевірити, що $e_\mu^2 = R\gamma_\mu\tilde{R}X\gamma_\mu\tilde{R} = R\gamma_\mu^2\tilde{R} = \gamma_\mu^2$, і це співвідношення не порушує умови нормалізації та комутативних співвідношень між новими матрицями [26]. Довільний фізичний об'єкт має бути представлений математичним об'єктом, який може трансформуватися під час обертань та перетворень. Геометричні об'єкти, представлені тут, мають властивості спірного перетворення [27].

Для довільного базису ми можемо визначити в кожній точці простору унікальну повну лінійно-незалежну форму як геометричну сутність, що характеризує цю точку многовиду. Якщо ця точка многовиду зайнята, то її геометричні характеристики можуть бути описані коефіцієнтами загального представлення. Добуток довільних форм задається подібною формою з новими коефіцієнтами, таким чином забезпечуючи структуру кільця. Такий підхід дозволяє розглянути взаємний зв'язок полів різної фізичної природи [17, 28].

Визначення характеристик многовиду передбачає співвіднесення кожної точки многовиду з числом Кліфорда та знаходження його значення. Щоб визначити операцію перенесення на довільному многовиді, ми повинні визначити оператор похідної, наприклад, що задається формулою $d = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \gamma^\mu \partial_\mu$ та представляє зміну вздовж кривих, що проходять через задану точку в просторі. Дію цього оператора для будь-якого числа Кліфорда можна представити у вигляді $d\Psi = d \cdot \Psi + d \wedge \Psi$, де $d \cdot \Psi$ та $d \wedge \Psi$ можна називати “дивергенцією” та “ротором” відповідного числа Кліфорда. У контексті визначення диференційованого многовиду недостатньо мати одну спеціальну систему координат, що охоплює многовид, топологія якого відрізняється від топології відкритої множини в евклідовому просторі.

2.2. Правило перенесення та інтеграли руху на довільному просторово-часовому многовиді

Надання певної геометричної інтерпретації хвильовій функції “пробної частинки” дозволяє нам отримати точні правила перенесення для довільного просторово-часового многовиду [17? , 18], і таким чином полегшує відкриття її природи. Для хвильової функції як геометричної сутності перше структурне рівняння можна записати у стандартній формі:

$$D\Psi = d\Psi + \Omega\Psi, \quad (1)$$

де зв'язність Ω включає вплив просторово-часового многовиду. Після цього викладу правила перенесення слід зробити кілька важливих зауважень. У такій формі оператор d та зв'язність Ω є скалярними величинами та не змінюються разом як координати за допомогою калібрувальних перетворень відповідно до різних перетворень симетрії. Що стосується перетворень координат, це очевидно, оскільки з таким перетворенням пов'язана лише одна частина, а саме

$$d^t = R\gamma^\mu\tilde{R}R\partial_\mu\tilde{R} = R\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{R} = \gamma^\mu\partial_\mu = d.$$

Існують два еквівалентні варіанти калібрувальних перетворень $\Psi^c = R\Psi$. Перший полягає в прирівнюванні коваріантного диференціювання до нуля, після чого всі властивості многовиду проявляються як коефіцієнти зв'язності хвильової функції з цим многовидом. При цьому калібрувальне співвідношення, яке застосовується до зв'язності як константи Ω , набуває вигляду

$$\Omega^c = \gamma^\mu R\gamma_\mu\Omega\tilde{R} - \gamma^\mu\partial_\mu R\tilde{R}. \quad (2)$$

Другий метод можна використовувати, якщо правила перенесення хвильової функції пропорційні тій самій хвильовій функції з вибраним скалярним коефіцієнтом M і які враховують окремий зв'язок з многовидом

$$D\Psi = d\Psi + \Omega^g\Psi - M\Psi. \quad (3)$$

Якщо представити $\Omega^c = \gamma^\mu\Gamma_\mu$ як добуток двох векторів, де Γ_μ можна назвати вектор-потенціалом, та переписати попереднє рівняння у вигляді

$$D\Psi = d\Psi + \Omega^c\Psi - M\Psi = 0, \quad \gamma^\mu \cdot \nabla_\mu \Psi = M\Psi, \quad (4)$$

де $\nabla_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu$ добре відома коваріантна похідна, то дійсне калібрувальне перетворення для цього рівняння набуває стандартного вигляду

$$\Gamma_\mu^c = R\Gamma_\mu\tilde{R} - \partial_\mu R\tilde{R}. \quad (5)$$

Таке ж перетворення можна отримати і в першому випадку, якщо представити загальну зв'язність як $\Omega = \Omega^c - M$. У цьому сенсі скалярну масу також можна розглядати як коефіцієнт зв'язку "пробної частинки" з просторово-часовим многовидом. Це доводить еквівалентність двох підходів. Різниця полягає лише в тому, що в першому випадку це дозволяє використовувати рівняння перенесення для нелінійного випадку, коли загальну зв'язність можна представити як скалярний добуток $\Omega = \Psi\tilde{\Psi}$ тих самих хвильових функцій, що використовувалися в статтях [8, 10, 11]. У статті [11] таке представлення зв'язності було використано для опису вакуумного стану многовиду та передбачення його суперсиметричної поведінки. Представлення зв'язності простору-часу у вигляді $\Omega = \gamma^\mu\Gamma_\mu$ завжди можна виконати, якщо припустити, що загальна форма зв'язності має той самий вигляд, що й хвильова функція, і помножити цей вираз на $\gamma^\mu\gamma_\mu = 1$, а все, що помножене на одиничний вектор γ^μ , можна використовувати як вектор-потенціал $\Gamma_\mu = \gamma_\mu\Omega$.

Тепер можна показати, що форма правила перенесення характеристики точки довільного многовиду 4 повністю узгоджується з рівнянням Дірака в геометричному представленні [18]. У загальному випадку зв'язність містить як дійсну, так і уявну частину, $\Gamma_\mu = \Gamma_\mu + iU_\mu$. Наприклад, якщо є лише уявна частина, достатньо представити загальну зв'язність як $\Omega = \gamma^\mu\Gamma_\mu = i\gamma^\mu U_\mu = iq\gamma^\mu A_\mu$, де A_μ – векторний потенціал електромагнітного поля з коефіцієнтом $q = \frac{e}{\hbar c}$ та $iM = \frac{mc}{\hbar}$, де m – маса, e – заряд пробної частинки, і $\hbar$ – стала Планка, і тоді рівняння перенесення для хвильової функції електрона в просторі-часі перетворюється на добре відоме стандартне рівняння Дірака

$$\gamma^\mu \left(i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu \right) \Psi = m_0c\Psi, \quad (6)$$

або у канонічній формі [19]

$$\gamma^\mu \nabla_\mu \Psi = -i\frac{m_0c}{\hbar} \Psi. \quad (7)$$

Для повної групи лінійних перетворень $\Psi' = \Psi R$, де R визначає елементи відображення та

задовольняє умову $\tilde{R}R = 1$, калібрувальне перетворення для зв'язності A_μ визначено як і раніше:

$$A'_\mu = RA_\mu\tilde{R} - R\partial_\mu\tilde{R}. \quad (8)$$

Тестова частинка (електрон) впливає на многовид лише через свої фізичні характеристики (масу, заряд, спин) як коефіцієнти загального представлення. Тільки в цьому підході динамічне рівняння для хвильової функції електрона представлено як паралельне правило перенесення на довільному просторово-часовому многовиді зі зв'язністю, що описує електромагнітне поле. З цієї причини правила перенесення 4 для хвильової функції можна назвати рівнянням типу Дірака.

Слід зазначити, що для визначення правил перенесення не потрібно вводити сталу Планка. Вона з'являється лише тоді, коли ми хочемо знайти хвильове рішення у представленні де Бройля $\Psi \sim \exp(i\frac{S}{\hbar})$, де S – це дія, а стала Планка $\hbar$ – це міра фазового простору, що відповідає одному стану, який описується заданою хвильовою функцією. Відповідно, розмір комірки фазового простору, що належить одному стану, безпосередньо залежить від масштабів імпульсу та координат. Масштаби поведінки електронів та планет суттєво відрізняються, і тому це відіграє вирішальну роль у хвильовій поведінці пробної частинки.

Симплектична структура алгебри Кліфорда дозволяє негайно ідентифікувати всі інтеграли руху для такої динаміки. Алгебра Кліфорда дозволяє одночасно вводити скалярний добуток та комутатор цих величин завдяки наявності внутрішнього та зовнішнього добутків. У попередніх дослідженнях [12, 19] було встановлено, що динамічні інтеграли руху, які зберігаються для рівняння Дірака, а також і в нашому випадку із загальними правилами перенесення, мають вигляд

$$J_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi, \quad J_5 = \bar{\Psi}\gamma_5\Psi, \quad (9)$$

$$J_{\mu\nu} = \bar{\Psi}s_{\mu\nu}\Psi, \quad J_{5\nu} = \bar{\Psi}\gamma_5\gamma_\nu\Psi, \quad (10)$$

де $s_{\mu\nu} = [\gamma_\mu\gamma_\nu] = \gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu$ – це комутатор матриці Дірака, а $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ – добуток усіх матриць Дірака. Величина $\bar{\Psi}\gamma_0 = \Psi^*$, тоді інтеграл руху $J_0 = \rho = \Psi^*\Psi$ чітко визначається як ймовірність знаходження пробної частинки у відповідній точці на траєкторії. Інтеграл руху $J_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi = \Psi^*\sigma_\mu\Psi$, де σ_μ – це матриця Паулі у чотирьох вимірах, відповідає потоку ймовірностей

на просторово-часовому многовиді [19]. Збереження потоку ймовірностей можна продемонструвати, перевіривши, що $\partial^\mu J_\mu = 0$ дорівнює нулю [13]. Інтеграл руху $J_{\mu\nu} = \bar{\Psi} s_{\mu\nu} \Psi$ відповідає за збереження моменту імпульсу, а інтеграл руху $J_{5\nu} = \bar{\Psi} \gamma_5 \gamma_\nu \Psi$ визначає вектор Рунге–Ленца, який безсумнівно зберігається в центральній-симетричному полі [29].

Слід зазначити, що отримані інтеграли руху повністю відтворюють дуже важливу приховану лоренцеву коваріантність квантової механіки, яка була повністю досліджена у статті [30]. Загалом, комутатори двох довільних матриць A та B можна записати у вигляді

$$[\bar{\Psi} A \Psi, \bar{\Psi} B \Psi] = \bar{\Psi} (AB - BA) \Psi. \quad (11)$$

У введених позначеннях для наших інтегралів руху J_{mi} ми можемо отримати

$$[J_\mu, J_\nu] = \rho \bar{\Psi} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \Psi = \rho \bar{\Psi} s_{\mu\nu} \Psi = \rho J_{\mu\nu}, \quad (12)$$

а для інтегралів руху $J_{\mu\nu}$ має місце таке співвідношення:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = \rho \bar{\Psi} (s_{\mu\nu} s_{\rho\sigma} - s_{\rho\sigma} s_{\mu\nu}) \Psi, \quad (13)$$

або в більш зручній формі через раніше введені інтеграли руху,

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = \rho (\delta_{\mu\nu} J_{\rho\sigma} + \delta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} - \delta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - \delta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma}), \quad (14)$$

що повністю відповідає співвідношенням, отриманим у статті [30], та підтверджує приховану лоренцеву коваріантність представленого підходу. Використовуючи задані інтеграли, завжди можна отримати розв'язок у загальному випадку.

2.3. Алгебра Кліффорда в загальній теорії відносності

Як показано у відомих статтях [20–22], проблему виникнення гравітаційного поля можна вирішити, враховуючи флуктуації вакууму. Таким чином, рівняння Дірака з гравітацією постає як прототип теорії взаємодії, заснованої на узагальненому принципі еквівалентності [21]. У запропонованому геометричному підході це можна врахувати за допомогою нелінійних перетворень системи координат. Основну складність теорії гравітації можна подолати завдяки квантовим флуктуаціям вакууму, основного стану, відносно якого матерія являє собою збудження та очікувані значення якого

дорівнюють нулю, але його квадрат дає ненульове значення. Це – найпростіший випадок квантової теорії поля, який задовольняє вимогу еквівалентності. Як показано в [18], рівняння Дірака в геометричній інтерпретації, ймовірно, є прототипом більш загального рівняння, що включає електромагнетизм, а також інші взаємодії. Таке рівняння є лінійним щодо додаткового поля, що є необхідною умовою для виконання твердження еквівалентності. У геометричній інтерпретації, густину Лагранжа для рівнянь правила перенесення можна представити у вигляді

$$L = \bar{\Psi} D \Psi = \bar{\Psi} (\gamma^\mu \cdot \nabla_\mu - M) \Psi, \quad (15)$$

де оператор $\nabla_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu$. Таке зображення завжди виникає навіть у випадку нелінійної залежності зв'язності від самої хвильової функції. Скалярну величину $\Omega \sim \gamma^\mu \Gamma_\mu$ завжди можна представити як скалярний добуток одиничного вектора та “векторного потенціала” з невідомим фізичним змістом. Було введено чотири додаткові “векторні потенціали” Γ_μ у просторі-часі, для яких цільність лагранжіана буде інваріантною не лише відносно унітарних перетворень координат, а й відносно більш загальних калібрувальних перетворень. Що стосується параметра маси M , то в цьому підході він розглядається як формальна величина, що буде обговорено пізніше.

Тепер ми можемо ввести конформне перетворення поля, $\bar{\Phi} = \sqrt{g} \bar{\Psi}$ та $\Phi = \sqrt{g} \Psi$, де g , як завжди, величина визначника матричного тензора. У терміні нових змінних густину лагранжіана можна представити у вигляді

$$L = \sqrt{g} \bar{\Phi} (\gamma^\mu \cdot \nabla_\mu - M) \Phi. \quad (16)$$

У цьому випадку перетворення координат не є унітарними. Важлива властивість густини лагранжіана задовольняє твердження еквівалентності в тому сенсі, що в будь-якій точці простору-часу перші похідні матриці Дірака по координатах можна звести до нуля, що було показано в роботі [8]. Мінімізуючи дію з новим лагранжіаном густини [21, 28], можна отримати рівняння $M\Phi = \gamma^\mu \cdot \nabla_\mu \Phi$ та $M\bar{\Phi} = \gamma^\mu \cdot \nabla_\mu \bar{\Phi}$. Беручи до уваги те, що $\gamma^\mu \cdot \nabla_\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \gamma^\mu \cdot \nabla_\mu \sqrt{g}$ та $(\gamma^\mu \cdot \nabla_\mu)^2 = \sqrt{g} (\partial_\mu - \Gamma_\mu) \sqrt{g} (\partial_\nu - \Gamma_\nu) g^{\mu\nu} - \frac{R}{4}$, де R – це скалярна кривина Ейнштейна, ми можемо отримати кінцевий вираз для

дії у формі

$$S = \int \sqrt{g} \bar{\Phi} \left(\sqrt{g} (\partial_\mu - \Gamma_\mu) \sqrt{g} (\partial_\nu - \Gamma_\nu) g^{\mu\nu} - \frac{R}{4} - M^2 \right) \Phi. \quad (17)$$

Таким чином, враховуючи флуктуації спірного поля в алгебрі Кліфорда, можна описати рух пробної частинки у спотвореному евклідовому просторі-часі. Для вакууму цей підхід припускає пружну деформацію простору-часу через наявність спірного поля [18].

3. Результати

3.1. Гравітаційне поле в алгебрі Кліфорда

Розглянемо тепер дуже важливе питання про можливе поєднання квантової теорії та загальної теорії відносності. Попереднє визначення правил перенесення на довільному многовиді (простір-час), а також існування відповідних інтегралів руху для коваріантного перенесення, вже містять таку можливість. Достатньо змінити акцент інтерпретації самої хвильової функції.

Нехай фізичний об'єкт є хвильовою функцією із заданим геометричним представленням, що описує динамічну траєкторію. Тобто хвильова функція описує пробну частинку на відповідній траєкторії. На цій траєкторії можна ввести відповідні координати у вигляді $x_\mu = J_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$, які точно відповідають першим інтегралам руху. Тепер можна ввести визначення інтервалу на відповідній траєкторії: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} d\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi d\bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi$. Якщо тепер використати рівняння перенесення для хвильової функції (4) та ввести нове визначення метричного тензора через введені хвильові функції як $g^{\mu\nu} = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \Psi$, то ми можемо отримати інтервал на будь-якій траєкторії у вигляді $ds^2 = \bar{\Psi} \Psi \Gamma^2 = B^* B \Gamma^2 = \rho \Gamma^2$, де присутня лише дійсна частина просторово-часового зв'язку $\Gamma = \gamma_\mu \Gamma^\mu$. Як видно, це – векторний потенціал гравітаційного поля у представленні Фока–Іваненка [8, 19], а ρ – це щільність ймовірності.

В алгебрі Кліфорда, $\bar{\Psi} \Psi = \rho$ визначає щільність ймовірності для хвильової функції, яка представлена в канонічній формі [7, 19] $\Psi = \rho^{\frac{1}{2}} R$, де R – це число Кліфорда, що визначає всі можливі перетворення хвильової функції за умови $\bar{R} R = 1$. Тепер введемо нове визначення метричного тензора

через канонічну форму хвильової функції $g^{\mu\nu} = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \Psi = \rho \bar{R} \gamma^\mu \gamma^\nu R = \rho \bar{R} \gamma^\mu \bar{R} R \gamma^\nu R = \rho e^\mu e^\nu$. У цій інтерпретації метричний тензор являє собою ймовірність відповідного деформованого базису, що відповідає геометричному представленню загальної теорії відносності. За такого визначення метричний тензор може набувати як дійсних, так і уявних значень. Це визначає приховану некласичну геометрію простору-часу. Саме в такій інтерпретації метрики й прихована стохастична (квантова) поведінка.

Можна зробити припущення, що якщо тепер ввести координату на траєкторії, де знаходиться пробна частинка, як це було продемонстровано в статтях [31, 32] раніше, в термінах спірного представлення $x_\mu = J_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$, та використати рівняння геодезичної траєкторії в гравітаційному полі, то можна отримати рівняння для швидкості $v_\mu = \frac{dx_\mu}{ds} = \frac{dJ_\mu}{ds} = \frac{d(\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)}{ds}$ у вигляді

$$\frac{dv^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu v_\nu v_\lambda = \frac{d^2 J^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dJ_\nu}{ds} \frac{dJ_\lambda}{ds} = 0. \quad (18)$$

Опублікування статей [31, 32], в яких було запропоновано спірну регуляризацию руху Кеплера, допомогло знайти приховану симетрію атома водню та звести проблему до опису поведінки гармонічного осцилятора. Після цього можна використовувати квантування потоку можливих траєкторій. Спостережувана траєкторія може відповідати зв'язаному стану в множині можливих траєкторій. Наприклад, для замкнутих періодичних траєкторій $\frac{d\Psi}{ds} = i\omega\Psi$ з частотою ω , що відповідає атому водню та руху Кеплера, вищезазначене співвідношення (18) виконується точно. Для відкритих траєкторій $\frac{d\Psi}{ds} = \pm\omega\Psi$, що відповідають вільному руху в гравітаційному полі, ми можемо отримати, що $\rho = \gamma_\sigma \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} g^{\mu\nu}$ визначається лише через метричний тензор простору-часу.

Тепер необхідно розглянути правила перетворення чисел Кліфорда в неевклідовій системі координат. Для вирішення питання коваріантного введення теорії важливо включити внутрішній зв'язок чисел Кліфорда в контекст довільної геометрії Рімана, де метрику Мінковського можна вважати відносно простим наближенням. У підході Фока–Іваненка, як описано в статтях [8, 21, 28, 33], було використано аналогію з електродинамікою для визначення суттєвих властивостей, необхідних для

коваріантного виведення, які використовуються в контексті чисел Кліфорда. У статті [9] показано, що модифікація просторово-часової метрики дозволяє розглянути геометризацию квантової механіки у формулюванні де Бройля–Бома з використанням неріманівської структури Вейля. У цьому контексті запишемо правило перенесення на довільному многовиді, представленому полем “векторного потенціалу” Γ_μ , завдяки якому густина Лагранжа буде інваріантною не лише відносно перетворень координат, а й відносно більш загальних унітарних перетворень,

$$\gamma^\mu \nabla_\mu \Psi = \gamma^\mu (\partial_\mu - \Gamma_\mu) \Psi = M \Psi. \quad (19)$$

У загальній релятивістській теорії рівняння перенесення можна записати аналогічним чином, якщо ввести матриці Дірака як функції просторово-часових координат, які утворюють контраваріантне векторне поле. Антикомутатори цих матриць мають бути кратними одиничній матриці, $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} I$, де $g_{\mu\nu}$ отожднюється з полем метрики. Крім того, зручно використовувати такі визначення: $2s_{\mu\nu} = [\gamma_\mu \gamma_\nu] = \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu$ і $g = \det(-g_{\mu\nu})$. Для загальної теорії відносності коваріантна похідна метричного тензора $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$. Матриця Дірака γ_μ зазвичай не є коваріантною відносно R -перетворень $\gamma_\mu^r = R \gamma_\mu \tilde{R}$. Перетворення елементів алгебри Кліфорда має бути певним чином модифіковане. Як показано нижче, представлена форма отримана за допомогою властивості алгебри Кліфорда. У новому польовому матричному представленні многовиду Γ_μ коваріантну похідну γ_μ можна визначити таким чином [33]:

$$\nabla_\nu \gamma_\mu = \partial_\nu \gamma_\mu + [\gamma_\mu \Gamma_\nu], \quad (20)$$

де для введеного додаткового поля виконується калібрувальне перетворення (5), яке дозволяє прирівняти коваріантну похідну матриці Дірака до нуля. З добре відомої умови для метричного тензора, $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$, можна отримати [8], що

$$\Gamma_\mu^0 = \frac{1}{8} (\gamma^\alpha \gamma_{\mu,\alpha} - \gamma_{\mu,\alpha} \gamma^\alpha + \Gamma_{\mu,\nu}^\beta (\gamma_\beta \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma_\beta)), \quad (21)$$

де $\Gamma_{\mu,\nu}^\beta$ – символ Крістофеля. Нульовий індекс — це лише нагадування про те, що ми маємо справу з фоном Мінковського в довільній системі координат. Ми можемо глобально анулювати такий зв'язок, перейшовши до евклідової системи координат.

У будь-якій точці простору-часу перші координатні похідні γ_μ , які представляють поле, можуть бути зведені до нуля, тоді як самі γ_μ стають рівними матрицям Дірака. Прямим наслідком співвідношення $\nabla_\mu \gamma_\nu = 0$ є те, що коваріантна похідна всіх γ_μ обертається на нуль. Це є наслідком того, що метрика є ріманівською: $\nabla_\lambda g_{\mu,\nu} = 0$. Хоча умова, що коваріантні похідні дорівнюють нулю, є достатньою для гарантії структури Рімана, геометричне представлення числа Кліфорда є необов'язковим.

3.2. Приховане квантування траєкторій “пробних” частинок

У статті [8] розглядається випадок, коли динаміка визначається структурою алгебри Кліфорда за умови комутації

$$\nabla_\mu \gamma_\nu = [U_\mu, \gamma_\nu], \quad (22)$$

де U_μ – це довільний елемент алгебри Кліфорда, який може бути представлений у вигляді суми вектора та псевдовектора, $U_\mu = A_\mu + B_\mu \gamma_5$. Можна отримати, що $\nabla_\lambda g_{\mu,\nu} = [U_\lambda, \gamma_\mu] \gamma_\nu + \gamma_\mu [U_\lambda, \gamma_\nu] + [U_\lambda, \gamma_\nu] \gamma_\mu + \gamma_\nu [U_\lambda, \gamma_\mu]$, звідки, завдяки антикомутуванню з усіма γ_μ , випливає, що $\nabla_\lambda g_{\mu,\nu} = 0$. Це справедливо для довільних векторів A_μ і B_μ та забезпечує зручний еквівалентний спосіб опису нелінійної структури при виборі спинорів U_μ . Таким чином, внутрішній зв'язок набуває вигляду $\Gamma_\mu = \Gamma_\mu^0 - iU_\mu$, де Γ_μ^0 – це “векторний потенціал” у просторі Мінковського. У такому випадку можна обчислити векторний потенціал у малому центральному гравітаційному полі [8] та представити гамільтоніан у класичному випадку у відомій формі

$$H = E(\mathbf{p}) = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{GmM}{r}. \quad (23)$$

У задачі Кеплера M – це маса Сонця, m – маса планети, і перший член відсутній. У цьому розділі ми продовжимо обчислення з гамільтоніаном (23) без першого члена.

Публікація статей [31, 32], в яких було запропоновано спинорну регуляризацию руху Кеплера, допомогла знайти приховану симетрію атома водню та звести проблему до опису поведінки гармонічного осцилятора. Надалі ми будемо використовувати лише остаточні формули спинорного представлення динаміки Кеплера. Рух планет по їхніх

орбітах навколо Сонця можна описати рівнянням Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \alpha \frac{\mathbf{r}}{r^2} = 0, \quad (24)$$

де $\alpha = GMm$ – це коефіцієнт гравітаційної взаємодії між центральною масою M та пробною частиною з масою m . Додатковими умовами для розв’язання цієї задачі є закони збереження енергії

$$E = m\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\alpha}{r}, \quad (25)$$

вектора моменту імпульсу

$$\mathbf{M} = \frac{m}{r}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}), \quad (26)$$

та вектора Рунге–Ленца

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r}(\mathbf{M} \times \dot{\mathbf{r}}) + \alpha \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (27)$$

Останній інтеграл руху враховує зміну положення орбіт у просторі, а також форму цих орбіт з постійною енергією.

Важливим моментом було використання нової кутової змінної під назвою “ексцентрична аномалія” для опису положення планет на їхніх орбітах [31, 32]. За допомогою цієї змінної та використовуючи закони Кеплера, можна точно описати плоску траєкторію орбіти, а також визначити всі можливі інтеграли динамічного руху. Якщо положення планети на її орбіті описувати не радіус-вектором $\mathbf{r}$, а його представленням через двокомпонентний спінор ψ та матрицю Паулі σ у вигляді $\mathbf{r} = \psi^* \sigma \psi$, то легко перевірити, що спінорне рівняння

$$\ddot{\psi} + \omega^2 \psi = 0 \quad (28)$$

повністю описує динаміку планет на кеплерівських орбітах, де $\omega = \frac{a}{\tau}$, a – значення великої осі еліпсоїда, а τ – період обертання навколо масивного тіла в центрі. Крапка означає похідну відносно параметра $s = \frac{\tau\chi}{2ma}$, де χ – ексцентрична аномалія еліптичної орбіти, яка фактично визначає, чим еліптична орбіта відрізняється від кругової. Для кругової орбіти це буде кут, що вказує на орієнтацію радіус-вектора до довільної точки кругової орбіти.

Алгебраїчна симетрія $O(4)$ вихідної задачі стає очевидною, особливо якщо ввести біспінор

$$\Psi = \sqrt{\frac{2m}{\omega}} \begin{pmatrix} \psi \\ -i\omega\psi \end{pmatrix},$$

з яким попередні рівняння перетворюються на одне рівняння

$$\dot{\Psi} = i\omega\gamma_5\Psi, \quad (29)$$

де $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ є добутком усіх матриць Дірака. Представлений розв’язок у біспінорній формі можна розглядати як число Кліфорда. Рівняння (29) є інваріантним відносно перетворень $\dot{\Psi} = \Psi \exp(iQ)$, де Q – це 4×4 -матриця, яка повинна комутувати з γ_5 .

Симплектична структура алгебри Кліфорда дозволяє ідентифікувати всі інтеграли руху для такої динаміки, оскільки вона дозволяє одночасно ввести скалярний добуток і комутатор цих величин завдяки наявності внутрішнього та зовнішнього добутків. У нашому випадку, динамічні інтеграли руху (9) та (10) були визначені як інтеграли руху для рівняння Дірака в ролі правил перенесення числа Кліфорда на многовид [18]. Наявність виявлених інтегралів руху дозволяє “квантувати” відповідний адіабатичний інваріант. Якщо тепер звернути увагу на інтеграли руху, то величина $\bar{\Psi}\gamma_5\Psi = \Psi^*\Psi$ буде чітко визначена як ймовірність знаходження пробної частинки на відповідній орбіті, $\rho = \Psi^*\Psi$. Такий інтеграл руху відповідає ймовірності знаходження пробної частинки (планети) у відповідній точці орбіти за умови, що $\partial^\mu J_\mu = 0$. Перший інтеграл руху можна інтерпретувати як гамільтоніан пробної частинки (планети). Окрім одиничної матриці, комутатор гамма-матриці $s_{\mu,\nu}$ також комутує з γ_5 і має ті самі інтеграли руху (9) та (10), що й у теорії Дірака для атома водню. Застосування цих інтегралів дозволяє отримати остаточний розв’язок задачі.

Якщо тепер ввести комплексно-спряжений біспінор Дірака $\bar{\Psi} = \Psi^*\gamma_5 = \sqrt{\frac{2m}{\omega}}(-i\omega\psi^*, -\psi^*)$, гамільтоніан можна представити у вигляді

$$H = \omega\bar{\Psi}\gamma_5\Psi, \quad (30)$$

з додатковим співвідношенням $\bar{\Psi}\Psi = 0$ та записати динамічне рівняння руху у вигляді дужки Пуассона

$$\dot{\Psi} = (\Psi, H). \quad (31)$$

Відмінність від задачі електрона в атомі водню полягає в тому, що в нашому випадку задача вирішується через функцію, яка описує діапа-

зон потенційних траєкторій. Ці траєкторії формуються простором-часом, що генерується центральним полем. У нашому випадку це – класичні траєкторії, але не позбавлені можливості флуктуацій простору-часу, які можуть змінити відповідне положення планети. Проблема можливих стабільних траєкторій можна вирішити навіть шляхом квантування класичного моменту [33] і таким чином звести її до “квантового” аналога.

Розгляд цієї більшої групи інваріантів дозволить нам побачити речі по-іншому та зрозуміти, чому стала Планка не є абсолютно однаковою для різних випадків. Це пов’язано, головним чином, з тим, що представлення де Бройля $\Psi \sim \exp(i\frac{S}{h_{\text{eff}}})$, яке визначає хвильові властивості, прийшло до нас з розуміння адіабатичного інваріанта $\int pdq$, який представляє дію S . Для “пробної частини”, якою в задачах Кеплера є планета, максимальний імпульс можна оцінити як $p \sim Mc$, а мінімальне збудження, яке може змінити положення планети, як відповідне до її розміру R . Звідси випливає, що реальна дія набуває дуже великого значення. Для того, щоб хвильові властивості проявилися, необхідно, щоб розмір комірки у фазовому просторі був порядку самої дії, тобто $h_{\text{eff}} = S$. Тут є два дуже важливі моменти. Перший полягає в тому, що навіть для класичних частинок існує правило Паулі, згідно з яким дві класичні частинки скінченного розміру не можуть перебувати в одному стані, оскільки вони не можуть займати однакоє просторове положення, навіть якщо мають однаковий імпульс, що також недосяжно через флуктуації. Мало того, симплектична структура математичного опису передбачає, що має зберігатися адіабатичний інваріант, який не може дорівнювати звичайній, загальноприйнятій квантовій константі Планка h , якщо розглядати відповідні значення імпульсу та координат пробної частинки (планети). Відповідно, стала Планка залежить від розмірів та маси “пробної частинки”, встановлюючи таким чином масштаб відповідних збурень багатовиду, які можуть змінити стан системи.

Тепер ми можемо перейти до квантового опису класичних траєкторій. Можна спробувати представити “квантову версію” розв’язку цієї проблеми. Згідно з підходом Дірака, перехід від класичного до квантового опису базується на заміні класичних дужок Пуассона комутаційними співвідношеннями. Саме симплектична структура багатовиду

приводить до можливості квантування класичних гамільтонових систем [29, 34]. Квантове динамічне рівняння в нашому випадку можна переписати у добре відомій формі

$$ih_{\text{eff}}\dot{\Psi} = [\Psi, H], \quad (32)$$

де h_{eff} – це нова ефективна “стала Планка”. Умови комутації можуть бути повністю виконані, якщо функція представлена у спінорній формі. Спробуємо показати, що енергії планет квантуються відповідно до зайнятих орбіт, і це можна зробити двома способами. Один із них запропоновано у статті [35], але ми продовжимо використовувати запропонований підхід геометричного опису, коли отриманий біспінор набуває вигляду

$$\begin{aligned} \Psi &= \sqrt{\frac{h_{\text{eff}}}{2}} \begin{pmatrix} u^+ + v \\ -u^+ + v \end{pmatrix}, \\ \bar{\Psi} &= \sqrt{\frac{h_{\text{eff}}}{2}} (u - v^+, -u - v^+), \end{aligned} \quad (33)$$

але надаючи введеній величині іншого фізичного змісту. Це – оператори народження та знищення відповідних компонентів координат планети на орбіті, яку можна пронумерувати числом n . Гамільтоніан задачі, що описує рух відповідної планети по відповідній еліптичній орбіті n , можна отримати у вигляді

$$H = \omega \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi = \omega \Psi^+ \Psi = h_{\text{eff}} \omega (u^+ u + v^+ v + 2). \quad (34)$$

За симетричних умов $\bar{\Psi} \Psi + \Psi \bar{\Psi} = \bar{h} (u^+ u - v^+ v) = 0$ ми знаходимо, що

$$H |\Psi\rangle = 2h_{\text{eff}} \omega (u^+ u + 1) |\Psi\rangle = 2h_{\text{eff}} n \omega |\Psi\rangle. \quad (35)$$

Якщо тепер врахувати, що енергія кеплерівського руху є постійною та дорівнює $E = -2\omega^2 m$, то ми можемо отримати такий вираз для енергетичних рівнів планети з масою m на відповідній орбіті у центрально-симетричному полі:

$$E_n = -\frac{m(GMm)^2}{2h_{\text{eff}}^2 n^2}. \quad (36)$$

Таким чином, запропоноване геометричне представлення “пробної частинки” дозволяє розв’язати задачу Кеплера як у класичному, так і в квантовому підходах.

Те саме можна зробити у випадку атома водню, якщо припустити ймовірність існування електронних орбіт навколо ядра. Аналогічно, всю вищезначену математичну процедуру можна виконати для класичного атома водню. У нерелятивістському випадку класичний гамільтоніан для атома водню можна записати у відомому вигляді

$$H = E(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}, \quad (37)$$

що буде використано нижче для іншого представлення в термінах спінора. Використовуючи геометричні представлення хвильової функції на рівні знаходження розв'язків рівняння Дірака для атома водню, можна знайти всі необхідні властивості релятивістської елементарної частинки. Точний розв'язок рівняння Дірака в викривленому просторі-часі був запропонований в роботі [36]. У запропонованому вище простому підході для задачі Кеплера ми можемо визначити вираз для енергетичних рівнів електронів з масою m на відповідній орбіті таким чином:

$$E_n = -\frac{m(Ze^2)^2}{2\hbar^2 n^2}, \quad (38)$$

де $\hbar$ – звичайна стала Планка, що повністю відтворює відомі результати квантової механіки. А це означає, що з квантування орбіт можна отримати відповідні значення енергії електронів атома водню. Тепер квадрат хвильової функції визначає ймовірність перебування на відповідній орбіті. Неможливо визначити, на якій саме, але така інтерпретація також відповідає нашим знанням про квантову поведінку атома.

4. Обговорення та висновки

Звичайно, класичний гамільтоніан для електрона в атомі водню, як і гамільтоніан у задачі Кеплера, можна було б записати одразу, використовуючи прості підручники. Але для узгодженості запропонованого підходу ми вивели ці вирази з правил перенесення для відповідного геометричного об'єкта, що описує фізичну ситуацію. Це зроблено для того, щоб показати, що математична структура не допускає жодного іншого виду гамільтоніана в запропонованому розгляді. Відповідна форма гамільтоніана дозволяє представити многовид завдяки характеристикам “пробної частинки”, яка

сканує цей многовид. Отже, можна описати динаміку фізичної системи в термінах геометричного представлення пробної частинки та вивчати динаміку простору-часу.

Дійсно, перетворення, яке приводить рівняння Дірака до його канонічної форми як правило перенесення хвильової функції, не залежить від постійної Планка. Фактично, ця незалежність є загальним фактом. Таким чином, нормальні представлення (або канонічні форми) рівнянь Дірака є кращими представленнями для вираження узагальнених співвідношень де Бройля у викривленому просторі-часі. Отримані результати вказують на те, що рівняння Дірака в геометричному представленні загальної теорії відносності є рівнянням перенесення на довільному многовиді. Як обговорювалося раніше, повний набір перетворень координат, пов'язаних зі структурним рівнянням, існує лише у представленні хвильової функції числами Кліфорда. Початкове структурне рівняння для хвильової функції виявляється ідентичним рівнянню Дірака. Як показали численні автори, включаючи [4] та [19], розв'язки цього рівняння для визначених інтегралів руху ідентичні тим, що отримані у спінорному представленні.

З усього вищесказаного можна припустити, що таке представлення хвильової функції містить як корпускулярні, так і хвильові властивості. Здається можливим приписати такі властивості насамперед многовиду, на якому розглядається відповідне явище. Стаціонарні стани пробної частинки відповідають стаціонарним станам многовиду. Водночас не дуже важливо, яку квантову чи класичну інтерпретацію ми їй надаємо. Важливо те, що ця хвильова функція описує многовид, а це означає, що дуальна корпускулярна та хвильова природа многовиду вбудована в поведінку геометричного представлення. Справжнє значення квантової сталої Планка визначається масштабами руху, оскільки на динаміку “пробної частинки” можуть впливати лише збурення або флуктуації, чий розмір співмірні з розміром самих пробних частинок.

У статтях [35, 37] показано, що орбіти планет і супутників навколо великої центральної маси в нашій Сонячній системі квантуються. Зараз проводиться перевірка передбачень закону Тіціуса–Боде для різних багатопланетних систем Кеплера. Слово “квантувати” зазвичай застосовується до фізики на субатомному рівні. Згідно з наведеними ви-

ще результатами, орбіти в гравітаційній системі квантуються, тобто відстань, період і швидкість можуть мати лише певні дискретні значення. Для опису цього необхідно використовувати особливості не лише “пробної частинки”, а й простору-часу, в якому відбувається її динаміка.

Хвильову функцію “пробної частинки” на гіперповерхні постійної енергії у фазовому просторі можна записати у всіх випадках у вигляді хвилі де Бройля. Визначення введених коефіцієнтів випливає з того, що ми шукаємо квадрат комплексної хвильової функції, модуль якої не перевищує одиниці. Крім того, нам потрібно мати представлення всіх можливих станів у фазовому просторі, але це можливо, якщо фаза цієї комплексної функції представлена в цьому фазовому просторі. Такою функцією є дія, мінімум якої визначає класичну траєкторію. Нарешті, кількість станів у фазовому просторі залежатиме від розміру комірки, до якої можна віднести лише один стан. Розмір елементарної комірки у фазовому просторі визначається сталою Планка $\hbar$. Тоді загальну форму хвильової функції можна задати так: $\Psi \sim \rho^{\frac{1}{2}} \exp(\frac{i}{\hbar} S)$, де дія $S = \int [H(p, q)dt - pdq]$ записується через координати q та імпульси p . Всі необхідні атрибути такої форми хвильової функції присутні в геометричному представленні [18, 19, 26]. Крім того, тільки таке представлення містить всі необхідні детальні визначення зв'язку між енергією та імпульсом у теорії відносності.

Можна оцінити значення ефективної “сталой Планка” як $\hbar_{\text{eff}} = mcR$, що полегшує застосування цього визначення в різних масштабах. Для конкретних значень маси електрона та розміру атома водню ефективна константа $\hbar_{\text{eff}} = \hbar$ збігається з тією, що була введена Планком. Отже, можна зробити висновок про те, що ефективна константа квантування залежить від масштабу досліджуваних об'єктів. З цього можна отримати співвідношення для ефективних констант Планка, $\frac{\hbar_{\text{eff}}}{\hbar} \sim \frac{R^4}{R_{\text{atom}}^4}$, яке для значень радіуса орбіти Землі R та електрона R_{atom} в атомі водню дає $\frac{\hbar_{\text{eff}}}{\hbar} \sim 10^{80}$.

Також можна ввести значення довжини хвилі збурення $\lambda_g = \frac{\hbar_{\text{eff}}}{m_E c}$, аналогічне комптонівській довжині для атома водню $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_E c}$, та порівняти ці дві величини. Співвідношення між сталою Планка для гравітаційних збурень та комптонівською довжиною атома водню можна оцінити як $\frac{\hbar_{\text{eff}}}{\hbar} = \frac{\lambda_g m_E}{\lambda_c m_e}$. Це значення можна назвати мас-

штабним коефіцієнтом. Якщо взяти довжину хвилі гравітаційного збурення порядку астрономічної одиниці $\lambda_g \approx 149 \cdot 10^9$ м та значення мас електрона $m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг та Землі $m_E \sim 10^{24}$ кг, то для комптонівської довжини хвилі $\lambda_c \approx 2,4 \cdot 10^{-12}$ м отримаємо $\hbar_{\text{eff}} \sim 10^{78} \hbar$, що узгоджується з оцінками попередніх авторів [35, 38].

Необхідно зробити важливе зауваження щодо рівняння перенесення на довільному многовиді, оскільки в загальному випадку зв'язність може бути представлена також числом Кліфорда, а окремі компоненти можуть і повинні мати різні коефіцієнти відгуку для полів різної природи. Але математична структура такого представлення [17] ще далека від завершення та потребує більш послідовного розвитку. Навіть найпростіша реалізація дає нетривіальні результати, оскільки містить більше інформації про можливу природу многовиду та хвильову функцію “пробної частинки”. Це вимагає більш ретельного пояснення і, ймовірно, буде зроблено в майбутньому.

Ця робота була підтримана Національним фондом досліджень України (проект 2023.03/0165 “Квантові кореляції електромагнітного випромінювання”).

1. J. Oppenheim. A postquantum theory of classical gravity. *Phys. Rev. X* **13**, 041040 (2023).
2. B.J. Wolk. Quantum gravity through geometric algebra. *J. Phys. A* **57**, 015402 (2024).
3. M. Hatifi. Quantum gravity without metric quantization: From hidden variables to hidden spacetime curvatures. arXiv: 2502.08421v1 [gr-qc] 12 Feb 2025.
4. D. Hestenes. Clifford algebra and the interpretation of quantum mechanics. In *Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics*. Edited by J.S.R. Chisholm, A.K. Commons (Reidel, 1986).
5. D. Hestenes. Spacetime physics with geometric algebra. *Am. J. Phys.* **71**, 691 (2003).
6. B.F. Schutz. *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (Cambridge University Press, 1982).
7. A. Harvey-Tremblay. The observer, defined as a measure space of halting programs. Is a complete and constructive formulation of physics. *scholar.archive.org* (2022).
8. M. Novello. Spinor theory of gravity. arXiv.gr-qc/0609033 (gr-qc).
9. M. Novello, E. Bittencourt. Metric relativity and the dynamical bridge: Highlights of Riemannian geometry in physics. *Brazil. J. Phys.* **45**, 756 (2015).
10. B.I. Lev. Geometric interpretation of the origin of the universe. *J. Mod. Phys.* **13**, 89 (2022).

11. B.I. Lev. Application of Clifford algebra to describe the early universe. *Mathematics* **12**, 3396 (2024).
12. C. Doran, A. Lasenby. *Geometric Algebra for Physicists* (Cambridge University Press, 2003).
13. M. Arminjon, F. Reifler. Equivalent forms of Dirac equations in curved spacetimes and generalized de Broglie relations. *Brazil. J. Phys.* **43**, 64 (2013).
14. G. Horton, C. Dewdney, A. Nesteruk. Time-like owns of energy-momentum and particle trajectories for the Klein–Gordon equation. *J. Phys. A* **33**, 7337 (2000).
15. A. Soiguine. *The Geometric Algebra Lift of Qubits and Beyond* (LAMBERT Academic Publishing, 2020).
16. I.M. Benn, R.W. Tucker. Clifford analysis of exterior forms and Fermi-Bose symmetry. *J. Phys. A* **16**, 4147 (1999).
17. B.I. Lev. A probable approach to the geometrization of interaction. *Mod. Phys. Lett. A* **3** (10), 1025 (1988); ib. **4**, erratum, (1989).
18. B.I. Lev. *Research and Applications Towards Mathematics and Computer Science*. Vol. 4, Chap. 11 [ISBN: 978-81-19491-72-8].
19. C. Daviau, J. Bertrand. *New Insights in the Standard Model of Quantum Physics in Clifford Algebra* HAL Id: hal-00907848 (2013).
20. A.D. Sakharov. Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitations. *Dok. Akad. Nauk. SSSR* **177**, 70 (1967) [Sov. Phys. Dokl. **12**, 1040 (1968)].
21. O. Klein. Generalization of Einstein principle of equivalence so as to embrace the field equations of gravitation. *Phys. Scr.* **9**, 69 (1974).
22. S.L. Adler. Einstein gravity as a symmetry-breaking effect in quantum field theory. *Rev. Mod. Phys.* **54**, 3 (1982).
23. P. Cameron. Impedance approach to the chiral anomaly (2014). [rxiv.org/pdf/1402.0064vA.pdf](https://arxiv.org/pdf/1402.0064vA.pdf).
24. P. Cameron. Generalized quantum impedances: A background independent model for the unstable particle spectrum (2012). [http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.25702.84800](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.25702.84800).
25. B.I. Lev. Geometrical presentation of elementary particle wave function. *Low Temp. Phys.* **48**, 938 (2022).
26. G. Kasanova. *Vector Algebra* (Presses Universitaires de France, 1976).
27. M.J. Hadley. Spin-1/2 in classical general relativity. *Class. Quant. Grav.* **17**, 4187 (2000).
28. A.G. Klein. Schrödinger inviolate: Neutron optical searches for violations of quantum mechanics. *Physica B* **151**, 44, (1988).
29. А.С. Бакай, Ю.П. Степановский. *Адиабатические инварианты* (Наукова думка, 1981).
30. P. Nandi, F.G. Scholtz. The hidden Lorentz covariance of quantum mechanics. *Ann. Phys.* **464**, 169643 (2024).
31. P. Kustaanheimo. Spinor regularization of the Kepler motion. *Ann. Univ. Turku. Ser. A* **73**, 1 (1964).
32. P. Kustaanheimo, E. Stiefel. Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization. *J. Rein., Angew. Math.* **218**, 204 (1965).
33. B.E. Laurent. A variational principle and conservation theorems in connection with the generally relativistic Dirac equation. *Phys. Scripta* **16**, (25), 263 (1960).
34. K. Bliokh. Geometric amplitude, adiabatic invariants, quantization, and strong stability of Hamiltonian systems. *J. Math. Phys.* **43**, 25 (2002).
35. R. Louise. Loi de titius-bode et formalisme ondulatoire. *Moon Planets* **26**, 389 (1982).
36. M.D. de Oliveira, A.G.M. Schmidt. Exact solutions of Dirac equation on a static curved space-time. *Ann. Phys.* **401**, 21 (2019).
37. J. Llibre, C. Pinol. A gravitational approach to the Titius–Bode law. *Astronom. J.* **93**, 1272 (1987).
38. C.X. Huang, G.A. Bakos. Testing the Titius–Bode law predictions for Kepler multiplanet systems. *Month. Not. R. Astronom. Soc.* **442**, 674 (2014).

Одержано 14.05.25.

Переклад на українську мову О. Войтенка

B.I. Lev

CLIFFORD ALGEBRA
AS A WAY TO QUANTUM GRAVITY

This article puts forward a novel hypothesis for a solution to the problem of quantization of gravity. The objective of this study is to demonstrate that the geometric representation of the wave function can be considered as a characteristic of the space-time manifold. In this approach, it is shown that the Dirac theory for the hydrogen atom and the Kepler dynamics for the planetary system describe analogous phenomena in the space-time. The states of these systems possess parameters that correspond to the permitted dynamic states of the space-time, thereby maintaining information regarding the corpuscular and wave nature. The proposed approach sheds a new light on the potential resolution of the problems of quantum gravity.

Keywords: Clifford algebra, wave function, test particle, space-time manifold.