Ю.М. ПОЛУЕКТОВ

Національний науковий центр "Харківський фізико-технічний інститут" НАН України
(Вул. Академічна, 1, Харків 61108; e-mail: yuripoluektov@kipt.kharkov.ua, y.poluekt52@gmail.com)

УДК 539

КОГЕРЕНТНІСТЬ, ПОРУШЕНА СИМЕТРІЯ ТА НЕДИСИПАТИВНИЙ РУХ КВАНТОВОГО ОСЦИЛЯТОРА

На прикладі квантового осцилятора розглянуто зв'язок між динамічним когерентним станом із порушенням фазової симетрії та існуванням недисипативного руху. У багаточастинкових системах взаємодіючих частинок подібні стани проявляються як надплинність та надпровідність.

Ключові слова: квантовий осцилятор, когерентні стани, порушена фазова симетрія, аномальні та нормальні середні, парні кореляції, надплинність, надпровідність.

1. Вступ

Для розуміння властивостей багаточастинкових систем важливу роль відіграють точно розв'язувані задачі, зокрема моделі ідеального газу та гармонічного квантового осцилятора. Динамічний когерентний стан (ДКС) квантового осцилятора розглядався ще Шредінгером на зорі квантової механіки [1,2]. Квантовий осцилятор можна розглядати як різновид найпростішої моделі твердого тіла [3]. Представлення когерентних станів (КС) широко використовується при вивченні різних квантових систем [4–7].

У цій роботі розглядається гармонічний квантовий осцилятор у динамічному когерентному стані. Звертається увага на те, що особливістю такого стану є те, що він має недисипативний внутрішній рух з ненульовим середнім імпульсом, і водночас симетрія відносно фазового перетворення виявляється порушеною. Зазначається, що перехід до когерентного стану з порушеною фазовою симетрією приводить до існування недисипативних потоків, які в системах Бозе проявляються як надплинність, а в заряджених системах Фермі – як надпровідність.

2. "Нормальний" та когерентний стани квантового осцилятора

Гамільтоніан квантового осцилятора [2]

$$H = \frac{p^2}{2M} + \frac{M\omega^2 x^2}{2} \tag{1}$$

можна представити через несамоспряжені оператори народження a^+ та анігіляції a, що задовольняють комутаційне співвідношення $\left[a, a^+\right] \equiv aa^+ - a^+a = 1$. Оператори координати та імпульсу визначаються через ці оператори співвідношеннями

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\,(a^+ + a),$$
$$p \equiv -i\hbar\frac{d}{dx} = i\sqrt{\frac{M\hbar\omega}{2}}\,(a^+ - a), \tag{2}$$

Цитування: Полуектов Ю.М. Когерентність, порушена симетрія та недисипативний рух квантового осцилятора. *Укр. фіз. журн.* **71**, №1, 23 (2026).

і гамільтоніан (1) набуває відомого вигляду

$$H = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

Він інваріантний відносно фазового перетворення

$$a \to a' = ae^{i\alpha}, \quad a^+ \to a'^+ = a^+e^{-i\alpha} \tag{4}$$

або перетворення операторів координати та імпульсу

$$\begin{aligned} &x \to x' = -\frac{p}{M\omega}\sin\alpha + x\cos\alpha, \\ &p \to p' = p\cos\alpha + M\omega x\sin\alpha, \end{aligned} \tag{5}$$

де α – довільне дійсне число. Власні стани гамільтоніана (3) $H|n\rangle = \varepsilon_n|n\rangle$ з енергією $\varepsilon_n \equiv \equiv \hbar\omega(n+1/2)$ характеризуються цілими числами $n = 0, 1, 2, \ldots$. Залежність векторів від часу в станах з фіксованою енергією має вигляд $|n,t\rangle = = e^{-i\frac{\varepsilon_n}{\hbar}t}|n\rangle$. Дії операторів a^+ та a на вектор станів задаються відомими співвідношеннями

$$\begin{aligned} &a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \\ &a^+a|n\rangle = n|n\rangle. \end{aligned}$$

Основний (вакуумний) стан $|0\rangle$ визначається як розв'язок рівняння $a|0\rangle = 0$, а вектори збуджених станів осцилятора знаходяться в результаті дії степенів оператора a^+ на основний стан $|n\rangle = = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$. У координатному представленні хвильові функції осцилятора виражаються через поліноми Ерміта $H_n(x)$ [2],

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{M\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,e^{-\frac{M\omega}{2\hbar}x^2}H_n\!\left(x\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}\right). \tag{6}$$

У стаціонарних станах осцилятора середні значення координати та імпульсу дорівнюють нулю,

$$\overline{x} \equiv \langle n|x|n\rangle = 0, \quad \overline{p} \equiv \langle n|p|n\rangle = 0,$$

а добуток флуктуацій координати та імпульсу $I \equiv \sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2)(\overline{p^2} - \overline{p}^2)}$ для n-го рівня становить $I_n = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Мінімальне значення добутку флуктуацій координати та імпульсу досягається в основному стані, $I_0 = \hbar/2$. Такі стани осцилятора з певною енергією називатимемо "нормальними".

Довільний залежний від часу вектор стану можна розкласти по повній системі власних векторів осцилятора,

$$\big|\Phi(t)\big\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, e^{-i\frac{\varepsilon_n}{\hbar}t}\,|n\rangle. \tag{7}$$

Розглянемо такий конкретний стан, у якому коефіцієнти розкладання у виразі (7) мають вигляд

$$C_n = \frac{\chi^n}{\sqrt{n!}}\,e^{-\frac{|\chi|^2}{2}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\big|C_n\big|^2 = 1, \tag{8}$$

де χ – довільне комплексне число, що не залежить від часу. У випадку коефіцієнтів розкладу (8) ймовірність знаходження осцилятора у стані $|n\rangle$ визначається розподілом Пуассона $\big|C_n\big|^2 = e^{-|\chi|^2}\frac{|\chi|^{2n}}{n!}$. Тоді стан (7) набуває вигляду

$$\big|\Phi_\chi(t)\big\rangle = e^{-\frac{|\chi|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\chi^n}{\sqrt{n!}}\,e^{-i\frac{\varepsilon_n}{\hbar}t}|n\rangle. \tag{9}$$

При $\chi = 0$ вираз (9) збігається з хвильовою функцією осцилятора в основному стані. Вектор (9) є власним станом оператора анігіляції, $a|\Phi_\chi(t)\rangle = = \chi(t)\big|\Phi_\chi(t)\big\rangle$, з власним значенням, що залежить від часу, $\chi(t) \equiv \chi e^{-i\omega t}$. Зауважимо, що зазвичай [4–7] розглядаються стаціонарні когерентні стани

$$|\chi\rangle \equiv \big|\Phi_\chi(0)\big\rangle = e^{-\frac{|\chi|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\chi^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle. \tag{10}$$

Динамічний когерентний стан можна отримати дією оператора $U(t) = \exp\left[-i\omega t\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)\right]$ на стаціонарну когерентну систему (КС). Важливо підкреслити, що стаціонарна КС не є розв'язком стаціонарного рівняння Шредінгера, тоді як ДКС (9) є точним розв'язком нестаціонарного equation Шредінгера. Розгляд нестаціонарних когерентних станів є принципово важливим при вивченні систем, в яких можуть існувати недисипативні потоки.

У координатному представленні функція (9) набуває вигляду

$$\begin{aligned} &\Phi_\chi(x,t) = \left(\frac{M\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{|\chi|^2}{2}}\,e^{-i\frac{\omega t}{2}}\,\times \\ &\times e^{-\frac{M\omega}{2\hbar}x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\chi(t)^n}{\sqrt{2^n}n!}\,H_n\!\left(x\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Використовуючи формулу для суми поліномів Ерміта

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\,H_k(x) = e^{2xt-t^2}, \tag{12}$$

отримуємо представлення функції (11) у вигляді

$$\Phi_\chi(x,t) = \left(\frac{M\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{|\chi|^2}{2}}\, e^{-i\frac{\omega t}{2}+\frac{\chi^2(t)}{2}} \times \\ \times e^{-\frac{M\omega}{2\hbar}\left(x-\chi(t)\sqrt{\frac{2\hbar}{M\omega}}\right)^2}. \qquad (13)$$

Ця функція є хвильовим пакетом, який не дифундує з часом.

3. Різниця між симетріями "нормального" та когерентного станів

Як зазначалося, гамільтоніан (3) є симетричним відносно фазових перетворень (4). Якщо осцилятор знаходиться в станах з фіксованою енергією $\varepsilon_n \equiv \hbar\omega\big(n+\frac{1}{2}\big)$, то середні лише фазово-інваріантних операторів можуть бути ненульовими, $\langle n|a^+a|n\rangle = n$, тоді як середні фазово-неінваріантних операторів дорівнюють нулю, $\langle n|a|n\rangle = \langle n|a^+|n\rangle = 0$ та $\langle n|a^2|n\rangle = \langle n|a^{+2}|n\rangle = 0$. Таким чином, симетрія середніх у нормальних станах збігається із симетрією гамільтоніана.

У когерентних станах як нормальні середні від фазово-інваріантних операторів створення та анігіляції, так і аномальні середні від фазово-неінваріантних операторів виявляються ненульовими,

$$\begin{aligned} &\big\langle \Phi_\chi(t)\big|a^+a\big|\Phi_\chi(t)\big\rangle = |\chi|^2, \\ &\big\langle \Phi_\chi(t)\big|a^+\big|\Phi_\chi(t)\big\rangle = \chi^*(t), \\ &\big\langle \Phi_\chi(t)\big|a\big|\Phi_\chi(t)\big\rangle = \chi(t), \\ &\big\langle \Phi_\chi(t)\big|a^{+2}\big|\Phi_\chi(t)\big\rangle = \chi^{*2}(t), \\ &\big\langle \Phi_\chi(t)\big|a^2\big|\Phi_\chi(t)\big\rangle = \chi^2(t). \end{aligned} \qquad (14)$$

У цьому випадку симетрія аномальних середніх виявляється нижчою за симетрію гамільтоніана (3). Такі стани називаються станами зі спонтанно порушеною фазовою симетрією.

Середні значення координати та імпульсу в когерентному стані, на відміну від нормального стану, не дорівнюють нулю та залежать від часу,

$$\begin{aligned} &\overline{x}(t) = \big\langle \Phi_\chi(t)\big|\,x\big|\Phi_\chi(t)\big\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}\,\big(\chi^*(t)+\chi(t)\big), \\ &\overline{p}(t) = \big\langle \Phi_\chi(t)\big|\,p\,\big|\Phi_\chi(t)\big\rangle = i\sqrt{\frac{M\hbar\omega}{2}}\,\big(\chi^*(t)-\chi(t)\big). \end{aligned} \qquad (15)$$

Звідси випливає, що

$$\dot{\overline{x}}(t) = \overline{p}(t)/M, \quad \dot{\overline{p}}(t) = -M\omega^2\,\overline{x}(t),$$

а середні значення як координати, так і імпульсу задовольняють рівняння для класичного осцилятора

$$\ddot{\overline{x}}(t) + \omega^2\overline{x}(t) = 0, \quad \ddot{\overline{p}}(t) + \omega^2\overline{p}(t) = 0.$$

На відміну від стаціонарного стану в нормальному стані осцилятора, де середній імпульс дорівнює нулю, у динамічному когерентному стані середній імпульс не дорівнює нулю та коливається з часом. Отже, у динамічному когерентному стані існує недисипативний внутрішній рух, який аналогічний станам багаточастинкових систем з недисипативними потоками. Хвильову функцію когерентного стану (13) можна виразити через усереднення $\overline{x}(t)$ та $\overline{p}(t)$,

$$\Phi_\chi(x,t) = \left(\frac{M\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-i\left(\frac{\omega t}{2}+\frac{\overline{p}(t)\overline{x}(t)}{2\hbar}\right)} \times \\ \times e^{i\frac{\overline{p}(t)}{\hbar}x}\, e^{-\frac{M\omega}{2\hbar}(x-\overline{x}(t))^2}. \qquad (16)$$

У цій формі цю хвильову функцію вперше отримав Шредінгер [1, 2].

Усереднення по когерентному стану квадратів координати та імпульсу мають вигляд

$$\begin{aligned} &\overline{x^2}(t) = \big\langle \Phi_\chi(t)\big|\,x^2\big|\Phi_\chi(t)\big\rangle = \\ &= \frac{\hbar}{2M\omega}\big(\chi(t)^{*2}+\chi(t)^2+2|\chi|^2+1\big), \\ &\overline{p^2}(t) = \big\langle \Phi_\chi(t)\big|\,p^2\big|\Phi_\chi(t)\big\rangle = \\ &= -\frac{M\hbar\omega}{2}\big(\chi(t)^{*2}+\chi(t)^2-2|\chi|^2-1\big). \end{aligned} \qquad (17)$$

Враховуючи рівняння (15) та (17), знаходимо для співвідношення невизначеності

$$I \equiv \sqrt{\big(\overline{x^2}-\overline{x}^2\big)\big(\overline{p^2}-\overline{p}^2\big)} = \frac{\hbar}{2}. \qquad (18)$$

Як вже було показано Шредінгером [1, 2], невизначеність I (18) у когерентному стані мінімальна. Для нормального стану осцилятора невизначеність мінімальна лише в основному стані.

У когерентному стані енергія осцилятора точно не визначена. Квантово-механічне середнє значення енергії в динамічному когерентному стані не залежить від часу та може бути виражене через середні значення квадратів координати та імпульсу: (17),

$$\varepsilon(\chi) = \hbar\omega\Big(\big\langle \Phi_\chi(t)\big|a^+a\big|\Phi_\chi(t)\big\rangle + \frac{1}{2}\Big) =$$

$$= \hbar\omega\Big(|\chi|^2 + \frac{1}{2}\Big) = \frac{\overline{p^2}(t)}{2M} + \frac{M\omega^2}{2}\,\overline{x^2}(t). \quad (19)$$

Таким чином, динамічний когерентний стан – це стан з постійною середньою енергією, в якому існує незатухаючий рух і порушується фазова симетрія.

4. Обговорення та висновки

Головною особливістю надплинних та надпровідних систем є можливість існування в них стаціонарних потоків маси або заряду як завгодно довго без затухання. Перехід з нормального стану в надплинний або надпровідний стан є фазовим переходом. Згідно із загальною теорією фазових переходів [8], фазовий перехід в упорядкований стан повинен супроводжуватися появою нової характеристики – параметра порядку. Довгий час було незрозуміло, що таке параметр порядку в надпровідних або надплинних переходах. Ще до відкриття надплинності Л.В. Шубніков [9] запропонував гіпотезу про те, що фазовий перехід He I – He II супроводжується впорядкуванням, подібним до переходу з рідкого стану в кристалічний. Однак, після відкриття надплинності [10, 11], стало незрозуміло, як таке впорядкування здатне підтримувати недисипативні потоки.

Правильну форму параметра порядку в рамках феноменологічного опису запропонували Гінзбург і Ландау [12]. Вони використовували комплексну макроскопічну хвильову функцію як параметр порядку для надпровідників. Такий параметр порядку дозволяє побудувати вираз для макроскопічної густини недисипативного потоку, подібно до того, як будується густина потоку ймовірності в квантовій механіці. Оскільки макроскопічна хвильова функція, як і хвильова функція в квантовій механіці, визначена з точністю до довільного фазового множника, то такий стан називається станом з порушеною фазовою симетрією.

У спрощеному варіанті для надпровідників мікроскопічне обґрунтування теорії Гінзбурга–Ландау на основі теорії БКШ [13] було надано Горьковим [14]. Він показав, що існування надпровідних властивостей пов'язане з появою аномальних середніх. Феноменологічний підхід Гінзбурга–Ландау був поширений Гінзбургом та Пітаєвським на надплинну бозе-рідину [15]. Розвиток цієї теорії був продовжений у роботах [16, 17]. Слід зазначити, що у відомій теорії надплинності Ландау [18, 19] порушення фазової симетрії також неявно враховується шляхом введення надплинної густини, пов'язаної з модулем комплексного параметра порядку, та надплинної швидкості, що визначається градієнтом фази. У бозе-системах просте моделювання надплинності при нульовій температурі приводить до рівняння Гросса–Пітаєвського [20, 21]. Макроскопічна хвильова функція в цій теорії є когерентним станом [22].

Для існування макроскопічної комплексної хвильової функції система повинна мати ненульові аномальні середні виду $\langle a_{k_1\sigma_1} a_{k_2\sigma_2}\rangle$ або $\langle a_{k\sigma}\rangle$, які порушують фазову симетрію. У цьому випадку макроскопічна хвильова функція надпровідника у стані s матиме вигляд

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \sim \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} e^{-i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2)} \langle a_{\mathbf{k}_1\uparrow} a_{\mathbf{k}_2\downarrow}\rangle,$$

а макроскопічна хвильова функція системи частинок Бозе з нульовим спіном – вигляд

$$\Psi(\mathbf{r}) \sim \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \langle a_{\mathbf{k}}\rangle.$$

Наразі, як вже видно з цитованих робіт, цілком очевидно, що в будь-якій фізичній системі, де існують явища надплинності або надпровідності, фазова симетрія обов'язково має бути порушена. Водночас, звичайно, кожна система має й властивості, специфічні саме для неї. Проте, з'явилася і продовжує з'являтися велика кількість робіт, присвячених цій проблемі, де порушення фазової симетрії відсутнє. У цьому випадку не може існувати станів з рівноважними недисипативними потоками [23].

Однак, проблема встановлення на мікроскопічному рівні зв'язку між когерентністю стану, порушенням фазової симетрії та існуванням недисипативних потоків у багаточастинкових системах Фермі та Бозе продовжує залишатися актуальною. У цій статті на простому прикладі квантового гармонічного осцилятора простежується зв'язок між порушенням фазової симетрії та існуванням макроскопічного руху в динамічному когерентному стані. Показано, що, на відміну від станів осцилятора з фіксованою енергією, в яких середній імпульс дорівнює нулю, в динамічному когерентному стані він відмінний від нуля та коливається згідно з рівнянням для класичного осцилятора. Водночас у ДКС фазово-неінваріантні аномальні середні також виявляються відмінними від нуля.

Зауважимо, що енергія в розглянутій ДКС визначається лише фазово-інваріантним середнім (19). У більш складних системах взаємодіючих частинок енергія та інші спостережувані величини визначаються не лише нормальними, а й аномальними середніми. Таким чином, когерентні стани, не будучи власними функціями деякого ермітового оператора, вносять свій внесок у спостережувані величини. Прикладом цього є щілина в спектрі квазічастинкових збуджень надпровідника. Являючись вимірюваною величиною, вона визначається аномальним середнім. Таким чином, у станах з порушеною фазовою симетрією поняття квантово-механічної спостережуваної величини має більш загальний характер, ніж у нормальних системах.

Автор дякує А.А. Сороці за допомогу в підготовці статті.

1. E. Schrödinger. The continuous transition from micro- to macromechanics. *Naturwissenschaften* **14**, 664 (1926).
2. L.D. Landau, L.M. Lifshitz. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Butterworth-Heinemann, 1991).
3. H. Haken, *Quantum Field Theory of Solids* (North-Holland, 1976).
4. I.A. Malkin, V.I. Manko. *Dynamic Symmetries and Coherent States of Quantum Systems* (Nauka, 1979) (in Russian).
5. J.R. Klauder, E. Sudarshan. *Fundamentals of Quantum Optics* (W.A. Benjamin, 1968).
6. A.M. Perelomov. *Generalized Coherent States and Their Applications* (Springer-Verlag, 1986).
7. *Coherent States in Quantum Theory.* Edited by V.I. Manko (Mir, 1972).
8. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Statistical Physics. Part 1* (Butterworth-Heinemann, 1980).
9. L.W. Shubnikov, A.K. Kikoin. Optical experiments on liquid helium II. *Nature* **138**, 641 (1936).
10. P.L. Kapitsa. Viscosity of liquid helium below the λ-point. *Nature* **141**, 74 (1938).
11. J.F. Allen, A.D. Misener, Flow of liquid helium II. *Nature* **141**, 75 (1938).
12. V.L. Ginzburg, L.D. Landau. On the theory of superconductivity. *J. Eksp. Theor. Phys.* **20**, 1064 (1950).
13. J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
14. L.P. Gor'kov. Microscopic derivation of the Ginzburg–Landau equations in the theory of superconductivity. *Sov. Phys. JETP* **36**, 1364 (1959).
15. V.L. Ginzburg, L.P. Pitaevskii, On the theory of superfluidity. *Sov. Phys. JETP* **34**, 858 (1958).
16. V.L. Ginzburg, A.A. Sobyanin, Superfluidity of helium II near the λ point. *Sov. Phys. Usp.* **19**, 773 (1976).
17. Yu.M. Poluektov. The modification of exponents in the Ginzburg–Sobyanin theory of superfluidity. *Low Temp. Phys.* **45**, 1059 (2019).
18. L.D. Landau. Theory of superfluidity of helium II. *Zh. Èksp. Teor. Fiz.* **11**, 592 (1941) (in Russian).
19. L.D. Landau. On the theory of superfluidity of helium II. *J. Phys. USSR* **11**, 91 (1947).
20. E.P. Gross. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961).
21. L.P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP* **13**, 451 (1961).
22. Yu.M. Poluektov. The polarization properties of an atomic gas in a coherent state. *Low Temp. Phys.* **37**, 986 (2011).
23. Yu.M. Poluektov. Nondissipative flows in many-particle systems as a consequence of symmetry breaking. *Low Temp. Phys.* **29**, 1 (2003).

Одержано 16.02.25.

Переклад на українську мову О. Войтенка

Yu.M. Poluektov

COHERENCE, BROKEN SYMMETRY AND NONDISSIPATIVE MOTION OF A QUANTUM OSCILLATOR

Using the example of a quantum oscillator, the connection between the dynamical coherent state with the phase symmetry breaking and the existence of the non-dissipative motion is considered. In multiparticle systems of interacting particles similar states manifest themselves as superfluidity and superconductivity.

Keywords: quantum oscillator, coherent states, broken phase symmetry, anomalous and normal averages, pair correlations, superfluidity, superconductivity.