УДК 519.217.2

А.А. Вишенский, С.В. Сирик

О спектральном подходе к исследованию цепей Маркова

Рассмотрен спектральный подход к исследованию процесса одномерного симметричного случайного блуждания по целым числам с поглощающим экраном в минус один. Используя теорию обобщенных спектральных разложений самосопряженных операторов, вычислены выражения для элементов произвольной натуральной степени матрицы переходных вероятностей и решена задача классификации состояний цепи.

A spectral approach to one-dimensional symmetrical random wandering around whole numbers –1,0,1,2,… with obscuring screen in –1 is considered. Using the generalized spectral decomposition theory of self-adjoint operators the expressions for transition probabilities matrix elements in natural powers in an explicit form are obtained and the chain's states classification problem is solved.

Розглянуто спектральний підхід до вивчення процесу одновимірного симетричного випадкового блукання цілими числами з поглинаючим екраном у мінус один. Завдяки використанню теорії узагальнених спектральних розкладів самоспряжених операторів, обчислено вирази для елементів довільного натурального ступеня матриці перехідних вірогідностей та розв'язано задачу класифікації стану ланцюга.

Введение. Цепи Маркова – один из наиболее важных и часто применяемых разделов теории случайных процессов, особенно богат на приложения. Теория цепей Маркова используется в таких областях, как теория массового обслуживания (теория очередей), теория распознавания образов, математические методы экономики, финансовая математика, генетика, теория оптимального планирования, статистическая физика и теория твердого тела. При применении цепи Маркова особое внимание уделяется вопросу классификации состояний цепи (актуально для теории массового обслуживания). Под классификацией обычно подразумевается указание определенных свойств состояний и группирование самих состояний по некоторым признакам. Однако решение данного вопроса требует знания элементов произвольной натуральной степени матрицы переходных вероятностей (по крайней мере, умения определять, какие из элементов равны нулю), вычисление которых в случае счетных цепей – довольно серьезная проблема. Хотя в некоторых случаях, опираясь на определенные свойства рассматриваемой цепи и применяя специальные методы, это возможно.

Особый интерес частных случаев цепей Маркова представляют случайные блуждания, широко применяемые в различных прикладных областях. В данной статье рассматривается процесс одномерного симметричного случайного блуждания по целым числам $-1, 0, 1, 2,...$ с вероятностью перехода в одно из соседних состояний, равное 0,5, и поглощающим экраном в состоянии -1, что является частным случаем однородной счетной цепи Маркова. В силу того, что матрица переходных вероятностей в данном случае (после некоторой модификации) – симметрична, есть возможность рассматривать ее как действие самосопряженного оператора в некотором гильбертовом пространстве. В свою очередь, применяя обобщенное спектральное разложение [1] указанного оператора и выписав в явном виде выражения для элементов произвольной натуральной степени матрицы переходных вероятностей, появляется возможность полностью решить задачу классификации состояний.

Вычисление переходных вероятностей

Рассмотрим одномерное симметричное случайное блуждание по целым числам $\{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ с поглощающим экраном в точке $\{-1\}$. Очевидно, это частный случай однородной счетной цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей P_{ij} (при $i, j \in \{-1,0,1,2,...\}$) следующего вида:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при попадании в состояние -1 эволюция системы фактически заканчивается –

система навсегда остается в этом состоянии. Поэтому нет необходимости рассматривать траектории, ведущие в состояние –1, так как эти траектории не могут выйти из него, и задача сводится к цепи с состояниями $\{0,1,2,3,...\}$ и матрицей переходных вероятностей $\widetilde{P}$, полученной из P вычеркиванием первого столбца и строки, т.е.

$$\tilde{P} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

В матрице $P = \{P_{ij}\}$ отсчет индексов (и состояний в цепи) ведется от –1, а в матрице $\widetilde{P} = \{\widetilde{P}_{ij}\}$ от нуля. Видно, что $P_{ij}^n = \widetilde{P}_{ij}^n$ при $n \geq 0, i \geq 0, j \geq 0$.

Переходим к рассмотрению спектральной теории матрицы $\widetilde{P}$. Будем описывать состояния соответствующей цепи Маркова единичными векторами $e_i = (\delta_{ij})_{j=0}^{\infty}$ гильбертова пространства $l_2([0;\infty))$, образующими базис в этом пространстве:

$$e_0 = (1,0,0,0,...) \equiv \left|0\right\rangle,\ e_1 = (0,1,0,0,...) \equiv \left|1\right\rangle,$$
$$e_2 = (0,0,1,0,...) \equiv \left|2\right\rangle,\ ... .$$

Матрица $\widetilde{P}$ рассматривается как разностный оператор, действующий в $l_2([0;\infty))$. Матричные элементы оператора $\widetilde{P}$ имеют вид $\widetilde{P}_{ij} = (e_i, \widetilde{P}e_j) \equiv \left\langle i\middle|\widetilde{P}\middle|j\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j+1}\right)$.

Найдем спектр оператора $\widetilde{P}$. Известно, что спектр оператора – замкнутое множество, находящееся внутри круга $|z| = \|\tilde{P}\|$, где $\|\tilde{P}\|$– норма оператора $\widetilde{P}$. Поскольку $\widetilde{P}$ – самосопряженный оператор, то его спектр находится на отрезке действительной оси, попадающей в этот круг.

Найдем норму оператора $\widetilde{P}$. Видно, что $\widetilde{P} = \frac{1}{2}\left(V + V^*\right)$, где V – оператор сдвига: $Ve_k = V\left|k\right\rangle = (1-\delta_{k,0})\left|k-1\right\rangle = (1-\delta_{k,0})e_{k-1}$, а V^* – сопряженный ему оператор. С учетом того, что $\|V\| = 1$ и $\|V\| = \|V^*\|$, из неравенства треугольника получаем: $\|\tilde{P}\| = \frac{1}{2}\|V + V^*\| \leq \frac{1}{2}\left(\|V\| + \|V^*\|\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$. С другой стороны, из спектральных свойств оператора V следует, что точка 1 принадлежит спектру оператора $\widetilde{P}$. Это значит, что $\|\tilde{P}\| \geq 1$. Из этих двух неравенств и заключаем, что $\|\tilde{P}\| = 1$.

Докажем, что спектр оператора $\widetilde{P}$ полностью заполняет промежуток [–1; 1]. Для этого достаточно проверить, что оператор $\widetilde{P}$ не имеет нормированных собственных векторов. Итак, переходим к задаче нахождения собственных векторов оператора $\widetilde{P}$. Она сводится к решению следующей (дискретной) задачи Коши:

$$\frac{1}{2}U_{j-1} + \frac{1}{2}U_{j+1} = \lambda \cdot U_j$$
$$(j = 0,1,2,...;\ U_{-1} = 0, U_0 = 1),$$

т.е. к решению линейного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами, решая которое и используя начальные условия, получаем:

$$U_j(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2-1}}\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}\right)^{j+1} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2-1}}\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2-1}\right)^{j+1}. \quad (1)$$

Из условия $\|\tilde{P}\| = 1$ следует, что $|\lambda| \leq 1$. Это позволяет сделать замену $\lambda = \cos\theta$. Тогда из выражения (1) следует:

$$U_j(\cos\theta) = \frac{\sin(j+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Получили следующий результат: компонентами собственного вектора оператора $\widetilde{P}$ должны быть полиномы Чебышева второго рода. Таким образом, собственные векторы оператора $\widetilde{P}$, отвечающие собственным значениям $\lambda = \cos\theta$, принимают вид:

$$\left|\lambda\right\rangle \equiv \left|\cos\theta\right\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin(j+1)\theta}{\sin\theta}\left|j\right\rangle.$$

Собственные векторы оператора $\widetilde{P}$ не являются нормированными, так как $\left\langle\lambda|\lambda\right\rangle = = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin^2(j+1)\theta}{\sin^2\theta} = \infty$ (не выполняется необходимое условие сходимости ряда) для произвольного $\text{л} \in [-1;1]$.

Итак, установлено, что оператор $\widetilde{P}$ имеет полностью непрерывный спектр, целиком заполняющий промежуток [–1; 1].

Для операторов с непрерывным спектром основная теорема о спектральном разложении [1] дает следующее представление оператора $\widetilde{P}$:

$$\tilde{P} = \int_{-1}^{1} \text{л}\, \Phi(\text{л}) dg(\text{л}) \equiv \int_{-1}^{1} \text{л} \left|\text{л}\right\rangle\left\langle\text{л}\right| dg(\text{л}), \qquad (2)$$

где $\Phi(\lambda) = \left|\lambda\right\rangle\left\langle\lambda\right|$ – проектор на обобщенный собственный вектор, $dg(\lambda)$ – спектральная мера оператора $\widetilde{P}$. Представим единичный оператор:

$$I = \int_{-1}^{1} \left|\lambda\right\rangle\left\langle\lambda\right| dg(\lambda).$$

Оператор проектирования $\Phi(\lambda) = \left|\lambda\right\rangle\left\langle\lambda\right|$ в пространстве $l_2([0;\infty))$ представляется бесконечной матрицей с матричными элементами:

$$\Phi_{ij} = \left\langle i|\lambda\right\rangle\left\langle\lambda|j\right\rangle = U_i(\lambda)U_j(\lambda).$$

Используя представление для оператора I, находим выражение для спектральной меры $dg(\lambda)$ оператора $\widetilde{P}$. Действительно, $\left\langle i|j\right\rangle = = \int_{-1}^{1} \left\langle i|\lambda\right\rangle\left\langle\lambda|j\right\rangle dg(\lambda)$ или $\int_{-1}^{1} U_i(\lambda)U_j(\lambda)\, dg(\lambda) = = \delta_{ij}$, т.е. спектральная мера $dg(\lambda)$ – это весовая функция, относительно которой полиномы Чебышева второго рода ортогональны на [–1;1]. Используя известный факт, что для полиномов Чебышева второго рода имеет место условие ортогональности $\int_{-1}^{1} U_i(\text{л})U_j(\text{л}) \frac{2}{\text{р}}\sqrt{1-\text{л}^2}\, d\text{л} = \delta_{ij}$, приходим к выводу, что спектральная мера оператора $\widetilde{P}$ имеет вид $dg(\lambda) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-\lambda^2}\, d\lambda$, причем функция $g(\lambda)$определена однозначно с точностью до аддитивной постоянной.

Таким образом, формула (2), выражающая спектральное представление оператора $\widetilde{P}$, может быть записана в следующем виде: $\widetilde{P} = = \int_{-1}^{1} \lambda \left|\lambda\right\rangle\left\langle\lambda\right| \frac{2}{\pi}\sqrt{1-\lambda^2}\, d\lambda$. Тогда получим, что матрица n-шаговых переходных вероятностей имеет следующий вид:

$$\tilde{P}^{(n)} = \tilde{P}^n = \int_{-1}^{1} \lambda^n \left|\lambda\right\rangle\left\langle\lambda\right| \frac{2}{\pi}\sqrt{1-\lambda^2}\, d\lambda.$$

В результате получим искомые переходные вероятности:

$$\tilde{P}_{ij}^{(n)} = \left\langle i\right|\tilde{P}^n\left|j\right\rangle = \int_{-1}^{1} \lambda^n \left\langle i|\lambda\right\rangle\left\langle\lambda|j\right\rangle \frac{2}{\pi}\sqrt{1-\lambda^2}\, d\lambda =$$

$$= \int_{-1}^{1} \lambda^n U_i(\lambda)U_j(\lambda) \frac{2}{\pi}\sqrt{1-\lambda^2}\, d\lambda. \qquad (3)$$

Для вычисления $\widetilde{P}_{ij}^{(n)}$ рассмотрим унитарный оператор $S(x) = \exp(xk\widetilde{P})$ (где $k^2 = -1$). Его спектральное представление –

$$S(x) = \int_{-1}^{1} e^{k\lambda x} \left|\lambda\right\rangle\left\langle\lambda\right| \frac{2}{\pi}\sqrt{1-\lambda^2}\, d\lambda.$$

Матричные элементы этого оператора имеют вид:

$$F_{ij}(x) = \left\langle i\right|S(x)\left|j\right\rangle =$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{k\lambda x} U_i(\lambda)U_j(\lambda) \frac{2}{\pi}\sqrt{1-\lambda^2}\, d\lambda. \qquad (4)$$

Сделав замену $\lambda = \cos\theta$, получим выражение $F_{ij}(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{kx\cos\theta} \sin((i+1)\theta)\sin((j+1)\theta)d\theta$, для вычисления которого понадобится формула Ангера–Якоби [7]:

$$e^{kx\cos\theta} = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} k^n J_n(x)\cos(n\theta),$$

где $k^2 = -1$, а $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода целого порядка n.

Тогда после несложных, но достаточно громоздких преобразований, получаем выражение

$$F_{ij}(x) = k^{|i-j|} J_{|i-j|}(x) - k^{i+j+2} J_{i+j+2}(x) . \quad (5)$$

С другой стороны, из (4) получим

$$\widetilde{P}_{ij}^{(n)} \equiv \left\langle i \middle| \widetilde{P}^n \middle| j \right\rangle = \frac{1}{k^n} \frac{d^n F_{ij}(x)}{dx^n} \bigg|_{x=0} . \qquad (6)$$

Воспользовавшись разложением функции Бесселя первого рода в ряд Маклорена

$$J_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+i}}{2^{2k+i} k!(k+i)!},$$

из (5) и (6) получим явные выражения для элементов матрицы n-шаговых переходных вероятностей:

$$\widetilde{P}_{ij}^{(n)} = \widetilde{P}_{ij}^{n} =$$

$$= \begin{cases} 2^{-n}\left(C_n^{\frac{n+j-i}{2}} - C_n^{\frac{n+i+j+2}{2}} \right), \text{если } n+j-i \text{ четно} \\ 0, \quad \text{иначе} \end{cases}, \quad (7)$$

$$n \ge 0, \quad i \ge 0, j \ge 0 .$$

Здесь $C_n^k \equiv \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Выражения для диагональных элементов матрицы $\widetilde{P}^{(n)}$ несколько упрощаются:

$$\widetilde{P}_{ii}^{2k} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}, \ 0 \le k \le i \\ \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\left(1 - \dfrac{(k!)^2}{(k-i-1)!(k+i+1)!}\right), \ k \ge i+1 \end{cases} \quad (8)$$

$$\widetilde{P}_{ii}^{2k+1} = 0, \quad i \ge 0.$$

Классификация состояний

Предварительно введем некоторые определения.

Определение 1. Будем считать, что состояния i и j принадлежат одному *классу сообщаемости*, если из одного состояния можно с ненулевой вероятностью перейти в другое за некоторое число шагов и наоборот, иначе говоря: $\exists n \ \exists m \ \ P_{ij}^{(n)} > 0$ и $P_{ji}^{(m)} > 0$.

Определение 2. Назовем *периодом* состояния i наибольший общий делитель (НОД) всех целых чисел $n \ge 1$, для которых $P_{ii}^{(n)} > 0$.

Определение 3. Будем называть класс сообщаемости *периодичным*, если он разбивается на конечное число непересекающихся подмножеств, именуемых *циклами,* таких что если цепь выходит из произвольного подмножества, то возвращаться обратно в это подмножество она может лишь через фиксированные числа шагов, кратные определенному числу, называемых *периодом класса*.

Период класса – минимальное число шагов, через которое возможен возврат обратно в исходное подмножество. Можно показать [4], что число циклов равно периоду класса, а период класса равен периоду любого из состояний этого класса.

Определение 4. Пусть $f_{ii}^{(n)}$ обозначает вероятность того, что отправляясь из состояния i, система впервые возвратится в это состояние через n переходов. Состояние i в цепи Маркова будем называть *возвратным*, если $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$; в противном случае – состояние *невозвратно*. Смысл возвратности в том, что выходя из i, система с вероятностью 1 когда-нибудь возвратится в i.

Справедлива следующая теорема [3, 5]: состояние i является возвратным тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} = \infty$. Используя результаты, подобные известной лемме Бореля–Кантелли [5], можно показать, что невозвратное состояние i посещается лишь конечное число раз за всю продолжительность жизни системы. Возвратность и невозвратность являются характеристиками класса сообщаемости, т.е. все состояния класса сообщаемости либо возвратны, либо невозвратны.

Теперь применим описанную классификацию состояний к рассматриваемому случаю одномерного симметричного случайного блуждания по целым числам $-1, 0, 1, 2, ...$ с поглощающим экраном в –1. При этом будем пользоваться выведенными формулами (7) и (8) для элементов натуральной степени матрицы переходных вероятностей.

Используя выражения (7) в нашем случае, видно, что пространство состояний разбивается отношением сообщаемости на два класса состояний: $\{-1\}$ и $\{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Пользуясь явными выражениями (8) для диагональных элементов степеней матрицы $\widetilde{P}^{(n)}$, можно показать, что период произвольного состояния i класса $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ равен двум: действительно, НОД степеней матрицы P, для которых $P_{ii}^{n} > 0$, равняется двум. Тогда заключаем, что период класса $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ равен двум, причем сам класс разбивается на два цикла: $\{0, 2, ..., 2k, ...\}$ и $\{1, 3, ..., 2k+1, ...\}$.

Класс $\{-1\}$ имеет период 1, так как $P_{ii}^{n} > 0$ при $i = -1$ для всех целых $n \geq 1$.

Используя выражения (8), можно показать, что класс $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ невозвратный. Действительно, доказав сходимость ряда $\sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\Big(1 - \frac{(k!)^2}{(k-i-1)!(k+i+1)!}\Big)$, мы тем самым докажем невозвратность состояния $i \in \{0,1,2,3,...\}$. Используя признак Раабе и формулу Стирлинга для асимптотической оценки факториала, несложно показать, что вышеуказанный ряд сходится.

Класс $\{-1\}$ является возвратным, так как $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} = \infty$ при $i = -1$.

С помощью выведенных формул для вычисления переходных вероятностей можно установить более глубокие результаты. Докажем, что *блуждающая частица с вероятностью единица поглощается состоянием* –1, *но поглощения в среднем следует ожидать бесконечно долго.* Для этого вычислим сначала вероятность $f_k^{(n)}$ того, что поглощение состоянием –1 произойдет в точности на n-м шаге, если исходным состоянием было состояние k. Действительно, поглощение состоянием –1 на n-м шаге может произойти лишь в том случае, если система на $(n-1)$-м шаге была в состоянии 0. Тогда с вероятностью 0,5 система из состояния 0 переходит в состояние –1. Производя в формуле (3) замену $\lambda = \cos\theta$, получаем интегральное представление вероятности $f_k^{(n)}$:

$$f_k^{(n)} = \frac{1}{2}P_{k0}^{n-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^{n-1}\theta\sin((k+1)\theta)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^{n-1}\theta\sin((k+1)\theta)\sin\theta\, d\theta,$$

причем $P_{k0}^{n-1} = 0$, если $n-1+k$ нечетно. Заметим, что вероятность события, заключающегося в том, что блуждающая частица, выходя из состояния k, будет когда-нибудь поглощена состоянием –1, равна $f_k = \sum_{n=1}^{\infty} f_k^{(n)}$. Тогда, рассматривая отдельно случаи четного и нечетного k, после несложных, но достаточно громоздких выкладок получаем следующий результат: $\forall k \geq 0 \quad f_k = 1$, т.е. с вероятностью единица происходит поглощение блуждающей частицы состоянием –1, откуда бы она не начала свой путь.

Оценим среднее время до поглощения. Обозначим его через M, тогда очевидно, что $M = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_k^{(n)}$. Из формулы (7) можно получить явное выражение для вероятностей $f_k^{(n)}$:

$$f_k^{(n)} = 2^{-n} \times$$

$$\times\left(\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-k-1}{2}\right)!\cdot\left(\frac{n+k-1}{2}\right)!} - \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n+k+1}{2}\right)!\cdot\left(\frac{n-k-3}{2}\right)!}\right).$$

Используя выписанное выражение и признак Раабе, можно показать, что ряд в выражении для M расходится, значит среднее время до поглощения бесконечно большое.

Заключение. В данной работе рассмотрено одномерное симметричное случайное блуждание по целым числам $\{-1, 0, 1, 2, ...\}$ с поглощающим экраном в –1. Ясно, что этот процесс является однородной счетной цепью Маркова. Для детального изучения ее свойств, а также классификации состояний, необходимо иметь возможность определять произвольные натуральные степени матрицы P переходных вероятностей, что вызывает дополнительные сложности, поскольку фазовое пространство в данном случае счетное. Для упрощения сложившейся ситуации обычно прибегают к различным методикам, связанным с применением теории ортогональных полиномов [3], теории потенциала и границ фазового пространства [2, 4, 5], комбинаторных методов [2–6], стараясь избежать прямых вычислений. Это связано исключительно со сложностью самой *задачи вычисления степеней матрицы* P для цепей со счетным фазовым пространством и отсутствием общих подходов к ее решению. Хотя заметим, что элементы $P^{(n)}$ – важнейшие характеристики цепи. Их вычисление актуально для различных приложений.

Для решения данной задачи использована теория обобщенных спектральных разложений самосопряженных операторов. В явном виде вычислены выражения для элементов произвольной натуральной степени матрицы P переходных вероятностей для рассматриваемого блуждания и полностью решен вопрос о классификации состояний.

Показано, что фазовое пространство разбивается на два класса сообщаемости: $\{-1\}$ и $\{0,1,2,3,...\}$.

Класс $\{0,1,2,3,...\}$ является невозвратным и периодичным с периодом два; класс $\{-1\}$ возвратный и имеет период единицу.

Исследования показали, что блуждающая частица с вероятностью единица поглощается состоянием –1, но среднее время до поглощения равно бесконечности.

1. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
2. *Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А.* Теоремы и задачи о процессах Маркова. – М.: Наука, 1967. – 232 с.
3. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. – М.:Мир, 1971. – 536 с.
4. *Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А.* Счетные цепи Маркова. – М.: Наука, 1987. – 416 с.
5. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. – М.: Мир, 1969. – 472 с.
6. *Чжун Кай-лай.* Однородные цепи Маркова. – М.: Мир, 1964. – 425 с.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966. – 296 с.

Поступила 10.02.2009
Тел. для справок: (044) 489-7077, 8(095) 6313766 (Киев)

●