

И.Ю. Кононенко

Моделирование свободных и вынужденных гидроупругих колебаний систем оболочек с использованием интегральных представлений

Рассмотрена задача о гидроупругих колебаниях систем оболочек вращения при частичном заполнении идеальной несжимаемой жидкостью. Построено интегральное представление упругих перемещений систем оболочек.

A problem of the hydro-elastic vibrations for partially filled compound shells of revolution is considered. The integral representation of elastic shifts is constructed.

Розглянуто задачу про гідропружні коливання систем оболонок обертання при частковому заповненні ідеальною нестисливою рідиною. Побудовано інтегральне перетворення пружних переміщень систем оболонок.

Введение. Для хранения и транспортировки жидкостей используются различные емкости, они моделируются системами оболочек. При анализе прочности этих оболочечных конструкций использование таких численных методов, как метод конечных элементов и конечных разностей, приводит к большим вычислительным погрешностям на стыках оболочек. Поэтому частоты собственных колебаний таких конструкций, в том числе при взаимодействии с жидкостью, определяются неточно, что в свою очередь ухудшает возможность анализа явлений резонанса.

Например, в работах [1–5] рассматриваются задачи о гидроупругих колебаниях оболочек простой геометрии. В данной статье строится интегральное представление упругих перемещений оболочек сложной геометрии при их частичном заполнении идеальной несжимаемой жидкостью. Рассматриваются системы оболочек вращения (рис. 1), состоящие из цилиндрических, конических и сферических частей.



Рис. 1. Системы оболочек

Постановка задачи

Вводятся две системы координат: неподвижная декартова система координат X, Y, Z , относительно которой система и содержащаяся в ней жидкость либо покоятся, либо совершают равноускоренное поступательное движение,

и цилиндрическая система координат r, φ, z , связанная с оболочкой.

Определяющая система уравнений для нахождения частот и форм гидроупругих колебаний имеет вид:

$$(L\vec{U}) + (M\vec{U}) = \vec{P}, \quad (1)$$

где L – оператор упругих сил, M – оператор массовых сил, $\vec{U} = (u, v, w)$ – вектор перемещений системы, $\vec{P} = (0, 0, p)$ – давление со стороны жидкости на внутреннюю поверхность системы.

Давление $p(t)$ является решением следующей краевой задачи [4]:

$$\begin{cases} \Delta p|_{\Omega} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial n}|_S = F|_S, \end{cases} \quad (2)$$

где Ω – область, ограниченная поверхностью S , $S = S_0 \cup \sigma$, S_0 – срединная поверхность той части системы, что контактирует с жидкостью, σ – свободная поверхность колеблющейся жидкости (рис. 2).

Подвижная граница жидкости описывается функцией $f(r, \varphi, z, t)$. Для краевого условия на функцию $p(t)$ на S_0 используем предположение, что относительная скорость частицы жидкости, обтекающей поверхность оболочки, и относительная скорость соответствующей точки этой поверхности должны иметь одинаковые нормальные составляющие. На поверхности σ одинаковыми должны быть скорость подвижной границы жидкости и угловая ско-

рость вращения системы координат, связанной с оболочкой.

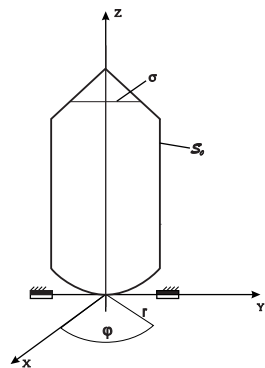


Рис. 2. Оболочка, состоящая из сферической, цилиндрической и конической частей

Следовательно, краевые условия имеют вид:

$$F(r, \varphi, z, t) = \begin{cases} -\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \vec{n} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} (\vec{r} \times \vec{n}) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]_{S_0} \\ -\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \vec{n} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} (\vec{r} \times \vec{n}) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right]_{\sigma} \end{cases}, \quad (3)$$

где ρ – плотность жидкости, \vec{v} и \vec{a} – скорость и ускорение движения соответственно, \vec{r} – радиус-вектор рассматриваемой частицы жидкости, \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности системы.

Неизвестные функции $p(r, \varphi, z, t)$, $u(r, \varphi, z, t)$, $v(r, \varphi, z, t)$, $w(r, \varphi, z, t)$ разыскиваются в виде тригонометрических рядов по переменным r и φ . Для определения давления жидкости на оболочку в работе [6] построены гиперсингулярные интегральные уравнения (ГСИУ) для каждого члена ряда.

Исследование колебаний системы оболочек сводится к определению функций $u(r, \varphi, z, t)$, $v(r, \varphi, z, t)$, $w(r, \varphi, z, t)$, которые представляют собой перемещения системы, и функции $f(r, \varphi, z, t)$, описывающей свободную поверхность жидкости S .

Построение математической модели задачи

В работе [4] используется основной вариационный принцип теории упругости для вывода уравнений равновесия упругого тела.

Вариационное уравнение Лагранжа включает в себя три уравнения упругого равновесия и три граничных условия. Следовательно, при применении этого принципа нет необходимости удовлетворять заранее статическим граничным условиям (они удовлетворяются автоматически). К тому же, так как задаются выражения упругих смещений $u(r, \varphi, z, t)$, $v(r, \varphi, z, t)$, $w(r, \varphi, z, t)$, согласные со связями, наложенными на упругое тело, то соотношения Сен-Венана (совместности деформации) также будут выполняться.

Трехмерные уравнения равновесия сводятся к двумерным асимптотическим разложениям функционала [4], представляющим собой разность между потенциальной энергией упругого тела и работой, совершаемой внешними силами:

$$J(u_r, u_\varphi, u_z) = \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{zz})^2 + e_{rr}^2 + e_{\varphi\varphi}^2 + e_{zz}^2 + \frac{1}{2} (e_{zr}^2 + e_{z\varphi}^2 + e_{r\varphi}^2) \right] \frac{EdV}{1+\nu} - \int_V (Q_r u_r + Q_\varphi u_\varphi + Q_z u_z) dV - \int_S (q_r u_r + q_\varphi u_\varphi + q_z u_z) d\sigma, \quad (4)$$

где u_r, u_φ, u_z – проекции упругого перемещения \vec{u} , Q_r, Q_φ, Q_z – проекции объемной силы \vec{Q} , q_r, q_φ, q_z – проекции поверхностной силы \vec{q} , V – область, занимаемая упругим телом, S – граничная поверхность, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, $e_{rr}, e_{\varphi\varphi}, e_{zz}$ – относительные удлинения, $e_{zr}, e_{z\varphi}, e_{r\varphi}$ – углы сдвига.

Решение задачи о равновесии упругой оболочки сводится к отысканию экстремума указанного функционала J . Уравнения равновесия упругого тела получаются как уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала, который аппроксимирует исходный (асимптотическое приближение с погрешностью порядка малости h^4 , где h – толщина оболочки):

$$\tilde{J} = \int_S Q_1 dr d\varphi - \int_{S_0} Q_2 d\varphi. \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_1(r, \varphi) &= Q_{10} + hQ_{11} + h^2Q_{12} + h^3Q_{13}, \\ Q_2(r, \varphi) &= Q_{20} + hQ_{21} + h^2Q_{22}, \quad Q_{10} = -(\vec{p}^{(0)}\vec{u}_0), \\ Q_{11} &= \varphi_0 - \frac{1}{2}(\vec{p}^{(1)}\vec{u}_1), \quad Q_{12} = -\frac{1}{4}(\vec{p}^{(2)}\vec{u}_2), \\ Q_{13} &= \frac{1}{12}\varphi_1 - \frac{1}{8}(\vec{p}^{(3)}\vec{u}_3), \quad Q_{2i} = (\vec{p}^{(i)}\vec{u}_i), \\ \vec{p}^{(i)} &= (p_r^{(i)}, p_\varphi^{(i)}, p_z^{(i)}), \quad u^{(i)} = (u_i, v_i, w_i), \quad i = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Выражения для $\vec{p}^{(i)}$ приведены в [4].

Для того чтобы первая вариация функционала \tilde{J} обращалась в нуль при любых вариациях функций упругих перемещений, на поверхности S_0 должны выполняться равенства (уравнения равновесия), которые представимы в виде:

$$\begin{cases} D_r(u, v, w) + \frac{2(1+\nu)}{Eh} X(r, \varphi, t) = 0, \\ D_\varphi(u, v, w) + \frac{2(1+\nu)}{Eh} Y(r, \varphi, t) = 0, \\ D_z(u, v, w) + \frac{2(1+\nu)}{Eh} Z(r, \varphi, t) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где D_r, D_φ, D_z – линейные дифференциальные выражения, $X(r, \varphi, t), Y(r, \varphi, t), Z(r, \varphi, t)$ находятся по заданным поверхностным и объемным силам [4].

Так как мы рассматриваем задачу о малых гармонических колебаниях системы, то

$$\begin{aligned} u_m(r, \varphi, t) &= \tilde{u}_m(r, \varphi)e^{i\omega_m t}, \quad v_m(r, \varphi, t) = \\ &= \tilde{v}_m(r, \varphi)e^{i\omega_m t}, \quad w_m(r, \varphi, t) = \tilde{w}_m(r, \varphi)e^{i\omega_m t}, \end{aligned}$$

где ω_m – частота, а $\tilde{u}_m, \tilde{v}_m, \tilde{w}_m$ – собственные формы колебаний рассматриваемой системы.

Отыскание упругих перемещений осесимметричной оболочки $u(r, \varphi), v(r, \varphi), w(r, \varphi)$ сводится к решению краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). При этом функции $X(r, \varphi), Y(r, \varphi), Z(r, \varphi)$ и искомые упругие перемещения раскладываются в тригонометрические ряды:

$$\left\{ \begin{aligned} X(r, \varphi) &= X_0(r) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} [X_m^{(1)}(r) \cos m\varphi + X_m^{(2)}(r) \sin m\varphi], \\ Y(r, \varphi) &= Y_0(r) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} [Y_m^{(1)}(r) \cos m\varphi - Y_m^{(2)}(r) \sin m\varphi], \\ Z(r, \varphi) &= Z_0(r) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} [Z_m^{(1)}(r) \cos m\varphi + Z_m^{(2)}(r) \sin m\varphi], \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} u(r, \varphi) &= u_0(r) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} [u_m^{(1)}(r) \cos m\varphi + u_m^{(2)}(r) \sin m\varphi], \\ v(r, \varphi) &= v_0(r) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} [v_m^{(1)}(r) \cos m\varphi - v_m^{(2)}(r) \sin m\varphi], \\ w(r, \varphi) &= w_0(r) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} [w_m^{(1)}(r) \cos m\varphi + w_m^{(2)}(r) \sin m\varphi]. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Для функций $u_0(r), v_0(r), w_0(r), u_m^{(j)}(r), v_m^{(j)}(r), w_m^{(j)}(r), j = 1, 2, m = 1, 2, \dots$ дифференциальные уравнения равновесия представимы в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} D_r^{(m)}(u_m^{(j)}, v_m^{(j)}, w_m^{(j)}) + \frac{2(1+\nu)}{Eh} X_m^{(j)}(r) &= 0, \\ D_\varphi^{(m)}(u_m^{(j)}, v_m^{(j)}, w_m^{(j)}) + \frac{2(1+\nu)}{Eh} Y_m^{(j)}(r) &= 0, \\ D_z^{(m)}(u_m^{(j)}, v_m^{(j)}, w_m^{(j)}) + \frac{2(1+\nu)}{Eh} Z_m^{(j)}(r) &= 0, \end{aligned} \right. \quad (9)$$

где $D_r^{(m)}, D_\varphi^{(m)}, D_z^{(m)}$ – линейные дифференциальные выражения [4].

Для построения интегральных представлений упругих перемещений осуществим интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих одномерную дельта-функцию. При этом вырожденные уравнения интегрируются в элементарных функциях и квадратурах, невырожденные – асимптотическим методом интегрирования обыкновенных

дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр [4].

Вырожденные уравнения

Данная работа посвящена построению решений вырожденных уравнений (при $h \rightarrow 0$). Обозначим через $s = s(r)$ радиус сечения срединной поверхности системы оболочек плоскостью, перпендикулярной к оси z . Вырожденные уравнения запишем в виде ($m \geq 0$):

$$\begin{cases} D_r^{(m),h \rightarrow 0}(u, v, w) = 0, \\ D_u^{(m),h \rightarrow 0}(u, v, w) = 0, \\ D_z^{(m),h \rightarrow 0}(u, v, w) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Далее приведем полученные в работе решения вырожденных уравнений для различных типов оболочек вращения.

Коническая поверхность

Для конической поверхности $s(r) = R - r \sin \psi$, где R – радиус основания конуса, ψ – угол между образующей и осью конической поверхности.

Главные кривизны равны $k_1 = 0, k_2 = \frac{\cos \psi}{R - r \sin \psi}$.

Вырожденные уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_m}{dr^2} - \frac{(1-\nu)m^2}{2R^2} u_m - \\ - \frac{(1+\nu)m}{2R} \frac{dv_m}{dr} + \frac{\nu}{R} \frac{dw_m}{dr} = 0, \\ \frac{(1+\nu)m}{2R} \frac{du_m}{dr} + \frac{1-\nu}{2} \frac{d^2 v_m}{dr^2} + \\ + \frac{m}{R^2} (w_m - m v_m) = 0, \\ - \frac{\nu}{R} \frac{du_m}{dr} + \frac{1}{R^2} (m v_m - w_m) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

При $m \geq 0$ получены следующие решения этих уравнений:

$$u_m(r) = \frac{C_1 m}{2(1+\nu)s(r)\sin^2 \psi} + C_2 \ln s(r) + C_3,$$

$$v_m(r) = C_1 \frac{2(1+\nu)\sin^2 \psi - m^2}{4(1+\nu)s(r)\sin^3 \psi} -$$

$$- C_2 \frac{m(1 + \ln s(r))}{\sin \psi} - C_3 \frac{m}{\sin \psi} + C_4 s(r),$$

$$w_m(r) = C_1 \frac{m(2\sin^2 \psi - m^2)}{4(1+\nu)s(r)\sin^3 \psi \cos \psi} +$$

$$+ C_2 \frac{\nu \sin^2 \psi - m^2 + (\sin^2 \psi - m^2) \ln s(r)}{\sin \psi \cos \psi} +$$

$$+ C_3 \frac{\sin^2 \psi - m^2}{\sin \psi \cos \psi} + C_4 \frac{ms(r)}{\cos \psi},$$

зависящие от четырех произвольных констант.

Цилиндрическая поверхность

Для цилиндрической поверхности $s(r) = R$.

Главные кривизны равны $k_1 = 0, k_2 = \frac{1}{R}$.

При $m \geq 0$ получаем решения вырожденных уравнений (11):

$$u_m(r) = -\frac{1}{m} \left(C_2 + \frac{12(1+\nu)}{m^2} C_4 + 2C_3 \frac{r}{R} + 3C_4 \frac{r^2}{R^2} \right),$$

$$v_m(r) = C_1 + C_2 \frac{r}{R} + C_3 \frac{r^2}{R^2} + C_4 \frac{r^3}{R^3},$$

$$w_m(r) = mC_1 + \frac{2\nu}{m} C_3 + \left(mC_2 + \frac{6\nu}{m} C_4 \right) \frac{r}{R} +$$

$$+ mC_3 \frac{r^2}{R^2} + mC_4 \frac{r^3}{R^3},$$

которые также зависят от четырех произвольных постоянных.

Сферическая поверхность

Для сферической поверхности $s(r)$ описывается следующим выражением: $s^2 = R^2 - d^2$, где R – радиус шара, d – расстояние от секущей плоскости до центра сферы.

Главные кривизны равны $k_1 = \frac{1}{R}, k_2 = \frac{1}{R}$.

Для случая $m = 0$ введем функцию $j(r)$:

$$j(r) = \frac{k_2 s}{k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2} \left(k_2 \frac{du}{dr} - \frac{k_1}{s} \frac{ds}{dr} u \right),$$

которая удовлетворяет дифференциальному уравнению: $\frac{dj}{dr} + \frac{k_1}{k_2 s} \frac{ds}{dr} j = 0$. Решением этого

уравнения является функция

$$j(r) = e^C \left(\cos \frac{r}{R} \right)^{-1}.$$

Так как $\frac{du}{dr} - \frac{k_1}{k_2 s} \frac{ds}{dr} u = \frac{k_1^2 + 2\nu k_1 k_2}{k_2^2 s} j$, то

$$u(r) = \frac{1}{j} \int \frac{k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2}{k_2^2 s} j^2 dr + C_1,$$

$$v(r) = s \left(C_2 \int \frac{dr}{s^3} + C_3 \right),$$

$$w(r) = \frac{1}{k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2} \times \left((k_1 + \nu k_2) \frac{du}{dr} + \frac{\nu k_1 + k_2}{s} \frac{ds}{dr} u \right).$$

Рассмотрим случай $m \geq 1$. Введем функцию $j_m(r)$, удовлетворяющую дифференциальному

уравнению: $\frac{d}{dr} \left(\frac{k_2}{k_1} \frac{dj_m}{dr} \right) + \frac{1}{s} \frac{dj_m}{dr} - \frac{m^2}{s^2} j_m = 0$, ре-

шение которого определим в виде:

$$j_m(r) = C_0 \cosh \left(2m \arctan \left(\tan \frac{r}{2R} \right) \right) + C_1 \sinh \left(2m \arctan \left(\tan \frac{r}{2R} \right) \right).$$

Для u_m получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{k_2}{k_1} \frac{du_m}{dr} \right) - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{s} \frac{ds}{dr} u_m \right) - \frac{m^2}{s^2} u_m &= \\ = \frac{d}{dr} \left(\frac{k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2}{2(1+\nu)mk_1^2 s} \frac{dj_m}{dr} \right) - \frac{m}{s^3} j_m. \end{aligned}$$

Решением этого уравнения является функция

$$u_m(r) = C_2 \cos \left(2\sqrt{-1+m^2} \arctan \left(\tan \frac{r}{2R} \right) \right) + C_3 \sin \left(2\sqrt{-1+m^2} \arctan \left(\tan \frac{r}{2R} \right) \right).$$

Перемещение v_m примет вид:

$$v_m(r) = \frac{s}{m} \left(\frac{k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2}{2(1+\nu)mk_1^2 s} \frac{dj_m}{dr} - \frac{k_2}{k_1} \frac{du_m}{dr} + \frac{1}{s} \frac{ds}{dr} u_m \right).$$

Для перемещения w_m имеем:

$$w_m(r) = -\frac{1}{\nu k_1 + k_2} \left(\nu \frac{du_m}{dr} + \frac{1}{s} \frac{ds}{dr} u_m - \frac{m}{s} v_m + \frac{1-\nu}{2ms} \frac{dj_m}{dr} \right).$$

На рис. 3 приведен график решения вырожденных уравнений для конической, цилиндрической, сферической оболочек, а также для систем оболочек, изображенных на рис. 1.

Интегральное представление упругих перемещений u, v, w получаем интегрированием ОДУ, содержащих δ -функцию.

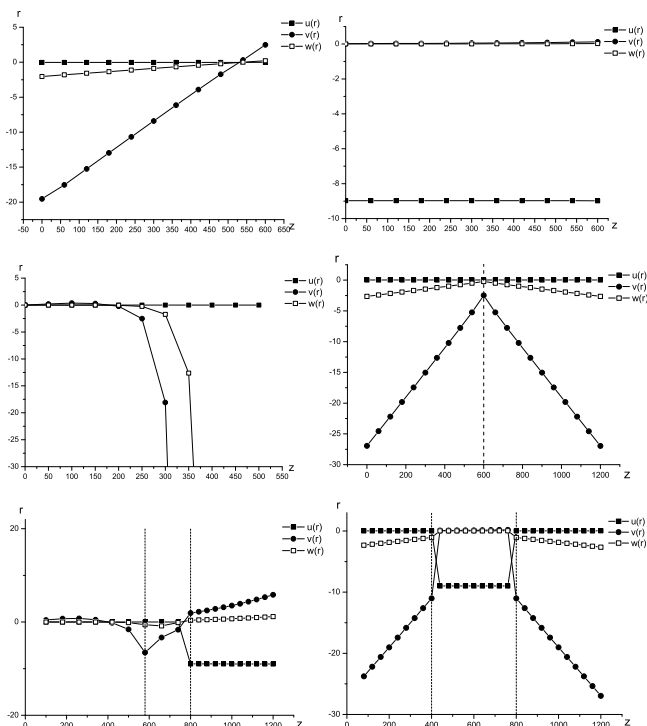


Рис. 3. Решение вырожденных дифференциальных уравнений

Частные решения задачи строятся следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} u_m(r) &= \int_0^{s_0} [X_m(s')U_r(s, s') + Y_m(s')U_\varphi(s, s') + Z_m(s')U_z(s, s')] ds' \\ v_m(r) &= \int_0^{s_0} [X_m(s')V_r(s, s') + Y_m(s')V_\varphi(s, s') + Z_m(s')V_z(s, s')] ds' \\ w_m(r) &= \int_0^{s_0} [X_m(s')W_r(s, s') + Y_m(s')W_\varphi(s, s') + Z_m(s')W_z(s, s')] ds' \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Окончание на стр. 64

Общим решением задачи (6) является линейная комбинация ее частных решений.

Заключение. В процессе решения поставленной задачи построено интегральное представление (12) упругих перемещений системы оболочек вместе с содержащейся в ней жидкостью. С этой целью рассмотрены вырожденные уравнения задачи (2) для систем оболочек вращения.

Полученные представления дают возможность рассматривать сложные оболочки с резким изменением меридиана, выделять зоны сварных швов и прочие конструктивные особенности, что практически неосуществимо другими численными и аналитическими методами.

В дальнейшем предполагается проведение исследования импульсного воздействия на системы оболочек, содержащих жидкость.

1. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. – Ленинград: Судостроение, 1976. – 200 с.

2. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов // Изв. АН Механика тверд. тела. – 1998. – 6. – С. 166–174.
3. Chen Z., Wang J., Liu H. Three-dimensional numerical analysis of flow-induced vibration in turbomachinery // J. Fluids Eng. – 1999. – 121, N 4. – P. 804–807.
4. Рапопорт И.М. Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. – Москва: Машиностроение, 1967. – 359 с.
5. Еселева Е.В., Гнисько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания оболочек вращения, частично заполненных жидкостью // Проблемы машиностроения. – 2006. – 9, № 1. – С. 58–69.
6. Кононенко И.Ю., Стрельникова Е.А. Математическая модель гидроупругих колебаний составных оболочек, частично заполненных жидкостью // Доп. НАН України. – 2008. – 6. – С. 32–40.

Поступила 05.01.2009

Тел. для справок: (057*2) 944-716 (Харьков)

E-mail: ikuzinka@yandex.ru

© И.Ю. Кононенко, 2009