УДК 519.1

Г.А. Донец, Л.Н. Колечкина

Об одном подходе к решению комбинаторной задачи оптимизации на графах

Рассмотрены задачи комбинаторной оптимизации на множестве перестановок с повторениями. На основании специфических свойств и структуры множества перестановок, а также теории графов описывается построение последовательности значений линейной целевой функции, разложение точек множества перестановок по гиперплоскостям и их зависимость с учетом повторения элементов.

The problems of the combinatorial optimization on a set of transpositions with repetitions. are considered. On the basis of specific characteristics and structures of a set of transpositions as well as the graph theory, the building of a sequence of values of a linear target function, the decomposition of points of a set of transpositions on hyperplanes and their dependence with account of elements repetitions are described.

Розглянуто задачі комбінаторної оптимізації на множині перестановок з повтореннями. На підставі специфічних властивостей та структури множини перестановок, а також теорії графів описано побудову послідовності значень лінійної цільової функції, розклад точок множини перестановок на гіперплощинах та їх залежність з урахуванням повторення елементів.

Введение. Комбинаторные оптимизационные задачи сложны с вычислительной точки зрения. Методы решения этих задач развиваются в двух основных направлениях: точные и приближенные. Такое разделение весьма условно в силу того, что каждый конкретный класс задач (даже отдельная задача) предъявляют свои требования к методу решения.

В последние годы началось изучение свойств отдельных классов дискретных оптимизационных задач и использование этих свойств при построении алгоритмов решения. Ряд обзорных публикаций охватывают определенные классы задач и методы их решения. В частности, разработан ряд методов итерационного типа, достаточно универсальных и позволяющих вместе с тем учитывать конкретную специфику задачи. В этом смысле представляют интерес задачи комбинаторного типа, описанные в работах [1–8].

Задачи на комбинаторных множествах интересны тем, что область допустимых решений представляет собой некоторый комбинаторный многогранник, свойства которого изучены и исследованы, что дает возможность использовать их специфические свойства для построения новых и для совершенствования существующих методов решения комбинаторных оптимизационных задач.

Широкий круг задач по своей математической постановке сводится к соответствующим классам задач комбинаторной оптимизации, в частности, в ряде задач оптимизируемый функционал задается на комбинаторном множестве. Примерами комбинаторных множеств является множество перестановок, перестановок с повторениями, разбиений и др. В работах [4–6, 9] показано, что элементы множества перестановок можно интерпретировать как вершины некоторого выпуклого многогранника. Отметим, что особенности комбинаторных свойств многогранников тесно связаны с задачами оптимизации, важными для практических применений. Многогранники тесно связаны с изучением свойств графов. Графы многогранников обладают многими интересными свойствами. При их изучении и применении решается большое число задач, представляющих интерес в экономике, транспорте, оптимальном календарном и многоэтапном планировании.

Графы можно использовать, когда исследуемая задача моделируется с помощью графа, вершины которого представляют вершины многогранника.

Использование свойств графов комбинаторных многогранников могут послужить повышению эффективности «традиционных» и разработке новых методов комбинаторной оптимизации.

Комбинаторные модели могут быть применены для представления оптимизационных за-

* **Ключевые слова**: комбинаторные множества, множество перестановок с повторениями, перестановочный многогранник, графы, гиперграни, гамильтонов путь.

дач, возникающих при оптимальном размещении на графах. Отметим, что ряд задач формулируется в терминах точек и связей между ними, такие как составление расписания, проектирование электронных схем, анализ сетей в электротехнике и др. Поэтому эффективные алгоритмы решения задач теории графов имеют большее практическое значение.

В статье рассматривается комбинаторная задача нахождения вершины перестановочного многогранника, отвечающей значению заданной целевой функции.

Предложен новый алгоритм решения оптимизации задач на комбинаторном множестве перестановок с повторениями использования специальных свойств перестановочного многогранника и его графов, что является продолжением работ [9–12], в которых рассматриваются алгоритмы на графах.

Задача оптимизации на комбинаторном множестве перестановок с повторениями

Для дальнейшего изложения материала приведем основные понятия и определения. Рассмотрим мультимножество $A=\{a_1,a_2,...,a_q\}$, его основание $S(A)=\{e_1,e_2,...,e_k\}$, где $e_j\in R^l$ для $\forall j\in N_k$, и кратность элементов $k(e_j)=r_j$, $j\in N_k$, $r_1+r_2+...+r_k=q$ согласно [4, 5].

Упорядоченной n-выборкой из мультимножества A называется набор

$$a=\left(a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_n}\right), \qquad (1)$$

где $a_{i_j}\in A$ $\forall i_j\in N_n$, $\forall j\in N_n$, $i_s\neq i_t$, если $s\neq t$ $\forall s\in N_n$, $\forall t\in N_n$.

Определение 1. [4–6] Множество $E(A)$, элементами которого являются n-выборки вида (1) из мультимножества A, называется евклидово комбинаторное множество, если для произвольных его элементов $a'=(a'_1,a'_2,...,a'_n)$, $a''=$ $=(a''_1,a''_2,...,a''_n)$ выполняются условия: $(a'\neq a'')\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(\exists\, j\in N_n : a'_j\neq a''_j)$, т.е. два элемента множества $E(A)$ отличны один от другого, если они независимо от других отличий различаются порядком размещения символов, их образующих.

Множество перестановок с повторениями из n действительных чисел, среди которых k различны, называется общим множеством перестановок и обозначается $P_{nk}(A)$. Это множество упорядоченных n-выборок вида (1) из мультимножества A при условии $n = q > k$.

Будем рассматривать элементы множества перестановок как точки арифметического евклидова пространства R^n.

В монографиях [9, 10] показано, что выпуклой оболочкой множества перестановок является перестановочный многогранник $\Pi(A) =$ $= conv\, P_{nk}(A)$, множество вершин которого равно множеству $P_{nk}(A)$ перестановок: $vert\, M(A)=$ $=P_{nk}(A)$.

Не теряя общности, упорядочим элементы мультимножества A по неубыванию:

$$a_1\le a_2\le\ldots\le a_n, \qquad (2)$$

и элементы его основания – по возрастанию: $e_1<e_2<\ldots<e_k$. Тогда выпуклой оболочкой общего множества перестановок $P_{nk}(A)$ является общий перестановочный многогранник $M(A) =$ $= P(A)$, описываемый следующей системой линейных неравенств:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_j\le\sum_{j=1}^{n}a_j, & (3)\\ \sum_{j=1}^{i}x_{\alpha_j}\le\sum_{j=1}^{i}a_j, & (4)\end{cases}$$

$\alpha_j\in N_n, \alpha_j\neq\alpha_t,\ \ \forall j\neq t, \forall j,\ \ \forall j,t\in N_i, \forall i\in N_n$, а $P_{nk}(A)=vert\,\Pi(A)$.

Рассмотрим задачу евклидовой комбинаторной оптимизации вида:

$$Z(\Phi(a),P_{nk}(A)):\max\left\{\Phi(a)\middle|\, a\in P_{nk}(A)\right\},$$

состоящей в максимизации функции $\Phi(a)$ на множестве перестановок $P_{nk}(A)$, где $\Phi(a)=$ $=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j.$

При отображении множества $P_{nk}(A)$ в евклидово пространство R^n можно сформулировать задачу линейного программирования $Z(F, X)$ максимизации критерия $F(x)$ на множестве X, причем каждой точке $a \in P_{nk}(A)$ будет соответствовать точка $x \in X$, такая что $F(x) = \Phi(a)$.

$$Z(F, X): \max\left\{F(x) \mid x \in X\right\}, \qquad (5)$$

где $F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, X – непустое множество в R^n, определяемое таким образом $X = vetrM(A)$, $M = convP_{nk}(A)$.

Следует отметить, что иногда целесообразно решить задачу вида:

$$x^* = \arg\max_{x \in M(A)} F(x), \qquad (6)$$

для значения функции $y^* = F(x^*)$. Имеет смысл рассматривать задачу, где значение целевой функции находится в интервале

$$F(\bar{x}) \le F(x) \le F(\bar{\bar{x}}).$$

Тогда задача (6) примет вид:

$$\bar{x} = \arg\max_{x \in M(A)} F(x) \text{ при } \bar{y} = F(\bar{x}),$$

$$\bar{\bar{x}} = \arg\max_{x \in M(A)} F(x) \text{ при } \bar{\bar{y}} = F(\bar{\bar{x}})$$

при условии $\left|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\right| \to \min$.

Продолжая исследования и развивая результаты работ [4–6], в статье предложен подход к решению задач, основанных на упорядочивании значений целевой линейной функции $F(x)$ и построении гамильтонова пути для точек, в которых эти значения находятся. Далее под задачей понимаем задачу (6).

Для построения метода, прежде всего, необходимо определить начальную точку. Воспользуемся следующим утверждением.

Утверждение 1. [8] Если для элементов мультимножества A и коэффициентов целевой функции задачи

$$extr\left\{ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,\middle|\, x \in vert\, M(A) \right\}$$

выполняются соответственно условия (2) и

$$c_{i_1} \le c_{i_2} \le \ldots \le c_{i_n}, \qquad (7)$$

$i_n \in N_n$, то максимум функции $f(x)$ на допустимом множестве достигается в точке $x^* = (x^*_{i_1}, \ldots, x^*_{i_n}) \in vertM(A)$, которая задается следующим образом:

$$x^*_{i_j} = a_j \forall j \in N_n,$$

а минимум соответственно в точке $y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$, где

$$y_{i_{j+1}} = a_{n-j} \forall j \in N_{n-1} \cup \{0\}.$$

Отметим, что общее число q линейных неравенств, входящих в систему (3), (4), описывающую перестановочный многогранник $M(A)$, равно $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$, а это задача большей размерности и очень сложна при решении традиционными методами линейного программирования. Поэтому назрела необходимость в разработке новых методов, базирующихся на свойствах множества допустимых решений и целевых функций.

Для рассматриваемой задачи (6) область допустимых решений определяется перестановочным многогранником, вершины которого – точки общего множества перестановок. Сформулируем некоторые полезные свойства перестановочного многогранника.

Теорема 1. [4] Точки множества $P_{nk}(A)$ лежат на семействе n-плоскостей вида

$$\frac{s}{n-s}x_1 + \frac{s}{n-s}x_2 + \ldots + \frac{s}{n-s}x_{n-s} -$$

$$- x_{n-s+1} - \ldots - x_n + a_t^s = 0,$$

$$t = 1, 2, \ldots, \gamma_s \le \frac{n}{s!(n-s)!},$$

при этом s может принимать значения 1, 2, … …, $n-1$.

Теорема 2. [4] Вершины $M(A)$, смежные с вершиной $a = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, имеют вид $\beta = (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots a_{j_n})$, где каждая из последовательностей $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ получена из $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ в результате перестановки таких индексов i_r и i_t, что $\left|i_r - i_t\right| = 1, a_{i_r} \ne a_{i_t}$.

Обе теоремы дают возможность рассматривать многогранник перестановок как некий граф, поскольку задача формулируется в терминах точек и связей между ними, т.е. в терминах графов. Большинство задач на графах касается определения компонент связности, поиска маршрутов, расстояния.

Подход к решению задачи комбинаторной оптимизации

Существует множество задач, постановка которых укладывается в рамки задач комбинаторной оптимизации, в частности задач на множестве перестановок с повторениями.

Решение таких задач – сложный процесс. В данной статье рассматривается задача, в которой необходимо определить точку экстремума – вершину перестановочного многогранника $M(A)$ по известному значению целевой функции. Для этого вначале необходимо найти значения целевой функции в каждой точке, построить для этих значений цепочку (граф), отображающую переходы от точки к точке, где точки соединяются дугами, и выяснить зависимость между ними.

На основании утверждения 1 можно определить точку максимума и минимума. Обозначим вершину x_0, определяющую точку минимума, началом сети, из которой дуги только выходят. Тогда вершина, определяющая точку максимума x_n, – конец сети, в которую дуги входят.

Воспользуемся теорией графов и рассмотрим произвольную вершину многогранника. Произвольная вершина перестановочного многогранника x и ребро u графа Г являются инцидентными, так как вершина x – один из концов ребра u, т.е. входит в пару вершин, определяющих ребро u. Как известно, степенью вершины называют число инцидентных ей ребер. Вершины первой степени называются концевыми. Вершины нулевой степени очевидно не связаны ребрами с другими вершинами, и их называют изолированными.

Учитывая, что каждое ребро перестановочного многогранника инцидентно двум вершинам графа, легко заметить, что сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу его ребер. Пусть $\Gamma = \langle X, C \rangle$ – некоторый граф, $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Бинарная матрица $\| a_{ij} \|$ такая, что $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины смежные,} \\ 0, & \text{если вершины несмежные} \end{cases}$ определяет матрицу смежности графа перестановочного многогранника. Смежность вершин многогранника перестановок определяется согласно теоремы 2.

Отметим, что граф многогранника перестановок – гамильтонов, т.е. должен содержать простой цикл, проходящий через каждую его вершину. Гамильтоновой цепью называют простую цепь, содержащую все вершины графа.

Знаменитая задача о коммивояжере – комбинаторная задача на множестве перестановок и связана с нахождением гамильтонова цикла кратчайшей суммарной длины. В этой задаче считается, что имеется n городов, которые непременно должен посетить коммивояжер, – все и по одному разу, проделав общий путь наименьшей суммарной протяженности. Если между городами есть дороги, то они интерпретируются как ребра графа порядка n с указанием длины. Вершины такого графа – вершины перестановочного многогранника.

Задача коммивояжера – пример комбинаторной задачи на графах, имеющий большое практическое и теоретическое значение. В силу своей вычислительной сложности она равносильна целому классу переборных задач и часто используется математиками для сравнительного анализа и изучения сложности алгоритмов оптимизации в дискретной математике.

Легко убедится, что в полном графе порядка n существует ровно $(n-1)!$ гамильтоновых циклов. Действительно, зафиксировав любую из n вершин полного графа, из нее $(n-1)$ способами можно перейти в другую – следующую, получая простую цепь из двух вершин. Далее выбрать следующую вершину можно $(n-2)$ способами и так далее, получая $(n-1)\,(n-2)\ \ldots$ $\ldots\ 2*1 = (n-1)!$ гамильтоновых циклов.

Поскольку $n! \approx a\sqrt{n}n^n e^{-n} = a\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)$ при $n \to \infty$, можно предположить, что поиск гамильтоновых циклов связан с огромным перебором вариантов. Но в данной статье предлагается другой подход к решению таких задач, без перебора вариантов, что делает алгоритм более эффективным и удобным.

Рассмотрим пример перестановки с повторениями из множества $A = \{1, 2, 2, 4\}$.

Последовательности перестановок можно интерпретировать как граф G_n, вершины которого соответствуют всем точкам множества перестановок $P_{nk}(A)$.

В графе две вершины, соответствующие перестановкам f и g, соединены ребром тогда, когда g образуется из f однократной транспозицией соседних элементов (таким образом, каждая вершина имеет степень $n - 1$). Согласно теореме 2, эти вершины являются смежными.

Заметим, что последовательность перестановок, образованная графом, соответствует гамильтонову пути в G_n, т.е. пути, содержащему каждую вершину графа в точности один раз. Теорема 1 указывает на возможность разбиения множества $P_{nk}(A)$ на подмножества, лежащие во взаимно параллельных плоскостях, так же согласно [4] исходное множество $P_{nk}(A)$ можно разложить на множества меньшей размерности, объединение которых порождает множество $P_{nk}(A)$:

$$P_{nk}(A) = \bigcup_{t=1}^{k} P_{nk}^{t}(A).$$

В некоторых ситуациях важно, чтобы каждое последующее полученное подмножество наименьшим образом отличалось от предыдущего.

Последовательность таких подмножеств можно проиллюстрировать на графе, вершины которого соответствуют бинарным последовательностям длины n и две вершины которого соединены ребром, если соответствующие последовательности отличаются только в одной позиции. В таком графе построенная последовательность соответствует гамильтонову пути. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть дано множество $A = \{1, 2, 2, 4\}$, с помощью которого образуется множество перестановок с повторениями $P_{nk}(A)$. Определена функция

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4, \qquad (8)$$

коэффициенты которой упорядочены следующим образом $c_1 \le c_2 \le c_3 \le c_4$ и принимают значения $\{1, 2, 3, 4\}$, а $y^* = F(x^*)$ значение функции в некоторой точке.

Необходимо найти $x^* = \arg extr F(x)$, где $x^* \in$ $\in P(A)$.

Решение: Как известно $M(A) = conv P_{nk}(A)$. Представим разложение графа перестановочного многогранника $M(A)$ по подграфам. Согласно утверждению 1 и условию упорядочения коэффициентов, в начальной вершине графа находится точка, в которой достигается максимальное значение целевой функции.

На рис. 1 рассматривается подграф A, который задается уравнением $x_4 = 4$, а остальные три цифры переставляются между собой. Стрелки указывают переход от точки к точке по убыванию значений целевых функций.

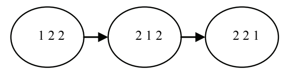

Рис. 1

Соответственно можно построить подграф B, на котором будут представлены точки при условии $x_4 = 2$. Заметим, что такой подграф будет содержать по шесть точек. Назовем эти гиперплоскости 3-грани. Грани лежат на гиперграни вида $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 2 + 2 + 4$. Обозначим ее символом A. Тогда $A = A \bigcup B \bigcup C$, а на рис. 2 гиперплоскость A имеет вид.

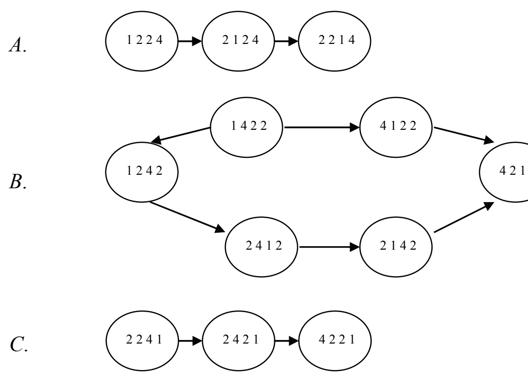

Рис. 2

Таким образом, количество повторений в множестве перестановок $P_{nk}(A)$ приводит к «склеиванию» гиперплоскостей в точках этих повторений.

Определим значения целевой функции в каждой вершине многогранника.

$F(A_1) = 1*1+2*2+3*2+4*4=1+4+6+16 = 27$
$F(A_2) = 1*2+2*1+3*2+4*4=2+2+6+16 = 26$
$F(A_3) = 1*2+2*2+3*1+4*4=2+4+3+16 = 25$
$F(A_4) = 1*1+2*2+3*4+4*2=1+4+12+8 = 25$
$F(A_5) = 1*1+2*4+3*2+4*2=1+8+6+8 = 23$
$F(A_6) = 1*4+2*1+3*2+4*2=4+2+6+8 = 20$
$F(A_7) = 1*4+2*2+3*1+4*2=4+4+3+8 = 19$
$F(A_8) = 1*2+2*1+3*4+4*2=2+2+12+8 = 24$
$F(A_9) = 1*2+2*4+3*1+4*2=2+8+3+8 = 21$
$F(A_{10}) = 1*2+2*2+3*4+4*1=2+4+12+4 = 22$
$F(A_{11}) = 1*2+2*4+3*2+4*1=2+8+6+4 = 20$
$F(A_{12}) = 1*4+2*2+3*2+4*1=4+4+6+4 = 18$

С учетом сказанного и рис. 1, 2 сформулируем следующую лемму.

Лемма 1. Точки множества перестановок с повторениями $P_{nk}(A)$ можно разложить по параллельным гиперплоскостям в порядке убывания значений линейной целевой функции $F(x)$ в этих точках.

Справедливость леммы следует из теоремы 1 и утверждения 1 (рис. 3).

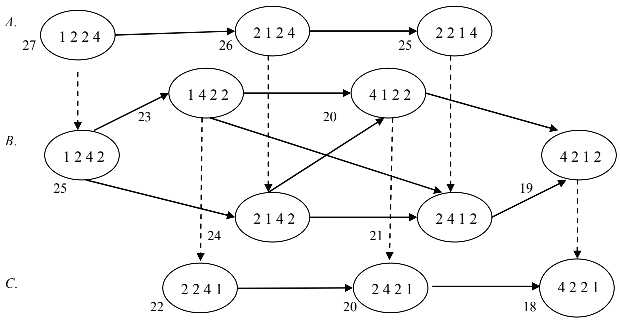

Рис. 3

На основании леммы 1 целесообразно сформулировать утверждение, обеспечивающее построение иерархии точек.

Лемма 2. Разложение точек комбинаторного множества перестановок с повторениями $P_{nk}(A)$ при $n \geq 4$ обеспечивает иерархическое расположение этих точек по гиперплоскостям A, B, C (рис. 2) согласно значениям целевой функции $y^* = F(x^*)$.

Доказательство: Согласно теореме 1 разложение по гиперплоскостям точек комбинаторного множества перестановок очевидно. А по утверждению 1 можно определить максимальное и минимальное значения функции $F(x)$ на каждой из гиперплоскостей A, B, C, D. Стрелки указывают переход по значениям целевой функции от больших к меньшим.

Для функции (8) при условии $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$ введем следующие обозначения

$$\Delta_1 = c_2 - c_1;\ \Delta_2 = c_3 - c_2;\ \Delta_3 = c_4 - c_3.$$

Для вышеопределенных обозначений установим возможные соотношения:

1) $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$; 2) $\Delta_1 > \Delta_2 > \Delta_3$;
3) $\Delta_2 > \Delta_1 > \Delta_3$; 4) $\Delta_2 > \Delta_3 > \Delta_1$.

Для построения гамильтонова пути необходимо установить соотношения на каждой из гиперплоскостей A, B, C (рис. 3) между парами точек. Для этого введем в рассмотрение понятия α_i-вопросов.

Определение 2. Назовем α_i-опросами соотношения между точками множества перестановок $P_{nk}(A)$ на гиперплоскостях A, B, C, решаемых для определения гамильтонова пути отдельно на каждой гиперплоскости.

По каждому из вышеопределенных случаев составим схему, отображающую расположение точек множества перестановок $P_{nk}(A)$ по значению целевой функции на гиперплоскостях A, B, C, затем составим общее соотношение и укажем гамильтонов путь по всему перестановочному многограннику $\Pi(A)$.

Рассмотрим гиперплоскость A (рис. 1) и точки, между которыми необходимо установить связь. Поэтому вычислим соотношения:

$$-\frac{\begin{array}{cccc}1 & 2 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 2 & 4\end{array}}{\begin{array}{cccc}-1 & +1 & 0 & \end{array}} = \Delta_1 - \Delta_2 = 0,$$

$$-\frac{\begin{array}{cccc}2 & 1 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 1 & 4\end{array}}{\begin{array}{cccc}0 & -1 & +1 & \end{array}} = -\Delta_1 + \Delta_2 = 0.$$

Обозначим вопрос $\alpha_1 = \Delta_1 - \Delta_2$.

Тогда, размещение точек на гиперплоскости A по значению целевой функции соответствует рис. 1. Аналогичная ситуация и на гиперплоскости C:

C. (2 2 4 1) → (2 4 2 1) → (4 2 2 1)

Рассмотрим гиперплоскость B (рис. 2), для точек которой составим соотношение для таких пар вершин:

$$-\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ \hline -1 & +3 & -2 & \end{array} = \Delta_1 - 2\Delta_2 = -\Delta_2 < 0,$$

$$-\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ \hline +2 & -3 & +1 & \end{array} = -2\Delta_1 + \Delta_2 = -\Delta_1 < 0.$$

На гиперплоскости B возникают вопросы $\alpha_1 = \Delta_1 - 2\Delta_2$ и $\alpha_2 = -2\Delta_1 + \Delta_2$. Поэтому гамильтонов путь на B имеет вид:

B. (1 2 4 2) → (2 1 4 2) → (1 4 2 2) → (2 4 1 2) → (4 1 2 2) → (4 2 1 2)

При решении α_i-вопросов также следует отметить, что прослеживается зависимость между точками, которые находятся на разных гиперплоскостях.

Заметим, что на гиперплоскостях A и B имеются точки, для которых выполняется следующее соотношение: $-\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ \hline +1 & 0 & -3 & +2 \end{array}$.

С учетом вышесказанного точки на гиперплоскостях A и B можно разложить в следующую цепочку, в зависимости от значений целевой функции:

1 2 2 4 →	2 1 2 4 →	2 2 1 4 →	1 2 4 2 →	2 1 4 2 →	1 4 2 2 →	2 4 1 2 →	4 1 2 2 →	4 2 1 2
27	26	25	25	24	23	21	20	19

Рассмотрим точки на гиперплоскости C, в частности (2 1 4 2), (1 4 2 2), так как

$$-\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ \hline +1 & -3 & 2 & \end{array} = -2\Delta_1 + \Delta_2 = -\Delta_1 < 0,$$ то значение в (2 1 4 2) больше значения в точке (1 4 2 2).

В данной ситуации рассматривается вопрос $\alpha_2 = -2\Delta_1 + \Delta_2$.

Аналогично со значениями в точках (4 1 3 2) и (3 4 1 2) , так как

$$-\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ \hline +2 & -3 & +1 & \end{array} = -\Delta_1 + 2\Delta_2 = \Delta_2 > 0.$$ Это вопрос $\alpha_2 = -\Delta_1 + 2\Delta_2$.

Если рассматривать отношение точек из разных гиперплоскостей, то значение в точке (1 2 4 2) из B равно значению в точке (1 4 2 2) из B, так как

$$-\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ \hline & -2 & 2 & 0 \end{array} = \Delta_2 - \Delta_3 = 0.$$

В результате расчетов получим гамильтонову цепь всего графа перестановочного многогранника и упорядочение всех значений линейной функции $F(x)$ в порядке их убывания для точек гиперплоскостей A, B, C (рис. 4):

1 2 2 4 →	2 1 2 4 →	2 2 1 4 →	1 2 4 2 →	2 1 4 2 →	1 4 2 2 →
27	26	25	25	24	23
→ 2 2 4 1 →	2 4 1 2 →	4 1 2 2 →	2 4 2 1 →	4 2 1 2 →	4 2 2 1
21	21	20	20	19	18

Рис. 4

Пусть дано $A_1 = (1, 1, 3, 3,) = (1^2, 2^2)$, где $k = 4$, $n = 2$, $r_1 = 2$, $r_n = r_2 = 2$. Система ограничений многогранника $\Pi(A)$ имеет вид:

$x_1 \geq 1$; $x_2 \geq 1$; $x_3 \geq 1$; $x_4 \geq 1$;

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$; $x_1 + x_2 + x_4 \geq 5$; $x_1 + x_3 + x_4 \geq 5$;

$x_2 + x_3 + x_4 \geq 5$; $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$.

Необходимо определить значение целевой функции $f(x) = 1x_1 + 2x_2 + 3x_2 + 4x_4$ в вершине многогранника П(А).

Вершины многогранника размещены на гипергранях. Количество гиперграней этого многогранника $\gamma(\Gamma_{k-2}) = 2k = 8$. Количество гиперграней, проходящих через одну и ту же произвольную его вершину, равно $\gamma(\Gamma_{(v)}) = r_1 + r_2 = 4$. Многогранник изображен на рис. 5.

Определим значение целевой функции в каждой вершине многогранника и построим гамильтонов путь по этим значениям.

$$f(A_1) = 1*3 + 2*3 + 3*1 + 4*1 = 16$$
$$f(A_2) = 1*3 + 2*1 + 3*1 + 4*3 = 20$$
$$f(A_3) = 1*3 + 2*1 + 3*3 + 4*1 = 18$$
$$f(A_4) = 1*1 + 2*3 + 3*3 + 4*1 = 20$$

$$f(A_5) = 1*1 + 2*3 + 3*1 + 4*3 = 20$$

$$f(A_6) = 1*1 + 2*1 + 3*3 + 4*3 = 24$$

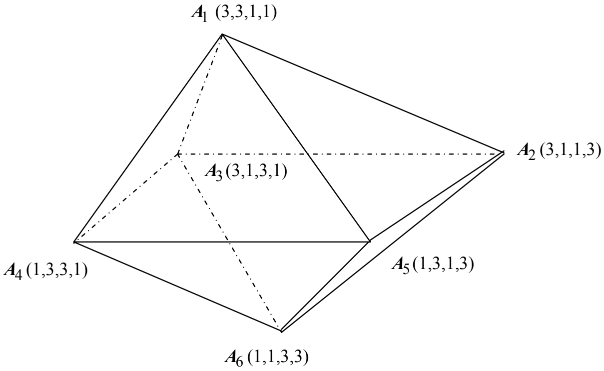

Рис. 5

Пример 2. Пусть дано A_2={1, 1, 2, 4,} = {1^2, 2^1 4^1}, где $k = 4$, $n = 3$, $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = 1$. Система ограничений многогранника П(A) имеет вид

$x_1 \geq 1$; $x_2 \geq 1$; $x_3 \geq 1$; $x_4 \geq 1$;

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$; $\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$;

$x_1 + x_2 + x_4 \geq 4$; $\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$;

$x_1 + x_3 + x_4 \geq 4$.

Найти значение целевой функции $f(x) = 1x_1 + {}$ $+2x_2 + 3x_2 + 4x_4$ в вершине многогранника П(A).

Вершины многогранника размещены на гипергранях. Количество гиперграней этого многогранника определено как $\gamma\left(\Gamma_{k-2}\right) = C_4^1 + C_4^8 = 8$. Количество гиперграней, проходящих через одну и ту же произвольную его вершину $\gamma\left(\Gamma_{\nu)}\right) = {}$ $= C_2^1 + C_1^1 = 2 + 1 = 3$. Многогранник П($A$) изображен на рис. 6.

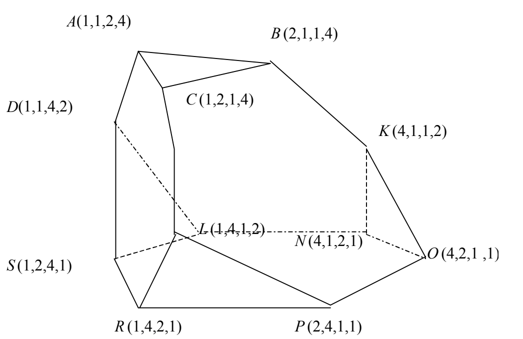

Рис. 6

На многограннике задано линейную целевую функцию вида

$$f(x) = 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 .$$

Определим значение целевой функции в каждой вершине многогранника

а) на гиперграни $x_4 = 4$:

$f(1;1;2;4) = 1*1 + 2*1 + 3*2 + 4*4 = 25$

$f(2;1;1;4) = 1*2 + 2*1 + 3*1 + 4*4 = 23$

$f(1;2;1;4) = 1*1 + 2*2 + 3*1 + 4*4 = 24$

б) на гиперграни $x_4 = 2$:

$f(1;1;4;2) = 1*1 + 2*1 + 3*4 + 4*2 = 23$

$f(1;4;1;2) = 1*1 + 2*4 + 3*1 + 4*2 = 20$

$f(4;1;1;2) = 1*4 + 2*1 + 3*1 + 4*2 = 17$

в) на гиперграни $x_4 = 1$:

$f(1;2;4;4) = 1*1 + 2*2 + 3*4 + 4*1 = 21$

$f(1;4;2;4) = 1*1 + 2*4 + 3*2 + 4*1 = 19$

$f(2;1;4;1) = 1*2 + 2*1 + 3*4 + 4*1 = 22$

$f(4;1;2;1) = 1*4 + 2*1 + 3*2 + 4*1 = 20$

$f(4;2;1;1) = 1*4 + 2*2 + 3*1 + 4*1 = 16$

$f(2;4;1;1) = 1*2 + 2*4 + 3*1 + 4*1 = 17$

Пример 3. Пусть $A = \{1,2,2,2,\} = \{1^1, 2^2, 3^1\}$, где $k = 4$, $n = 3$, $r_1 = 1$, $r_n = r_3 = 1$. Система ограничений многогранника П (A) имеет вид

$x_1 \geq 1$; $x_2 \geq 1$; $x_3 \geq 1$; $x_4 \geq 1$;

$x_1 + x_2 \geq 3$; $x_1 + x_3 \geq 3$; $x_1 + x_4 \geq 3$;

$x_2 + x_3 \geq 3$; $x_2 + x_4 \geq 3$; $x_3 + x_4 \geq 3$;

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$; $\quad x_1 + x_2 + x_4 \geq 5$;

$x_1 + x_3 + x_4 \geq 5$; $\quad x_2 + x_3 + x_4 \geq 5$;

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$.

Вершины многогранника размещены на гипергранях. Количество гиперграней этого многогранника определено как $\gamma\left(\Gamma_{k-2}\right) = C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 = {}$ $= 14$, а количество гиперграней, пересекающихся в одной вершине, $\gamma\left(\Gamma_{\nu)}\right) = C_1^1 + C_2^1 + C_1^1 = 4$. Многогранник П ($A$) изображен на рисунке 7.

$f(x) = 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$

$f(x_2) = 1*2 + 2*2 + 3*3 + 4*1 = 16$

$f(x_3) = 1*1 + 2*3 + 3*2 + 4*2 = 21$

$f(x_4) = 1*2 + 2*3 + 3*2 + 4*1 = 18$

$f(x_5) = 1*2 + 2*1 + 3*3 + 4*2 = 21$

$f(x_6) = 1*1 + 2*2 + 3*2 + 4*3 = 23$

$f(x_7) = 1*2 + 2*1 + 3*2 + 4*3 = 22$

$f(x_8) = 1*3 + 2*1 + 3*2 + 4*2 = 19$

$f(x_9) = 1*3 + 2*2 + 3*2 + 4*1 = 17$

$f(x_{10}) = 1*2 + 2*3 + 3*1 + 4*2 = 20$

$f(x_{11}) = 1*2 + 2*2 + 3*1 + 4*3 = 22$

$f(x_{12}) = 1*3 + 2*2 + 3*1 + 4*2 = 23$

На многограннике задана линейная функция

$f(x) = 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$.

Построим граф многогранника П(A) (рис. 7). Как известно, граф перестановочного многогранника П(A) – гамильтонов. Тогда толщина многогранника П(A) равна числу вершин многогранника П(A).

Теорема 3. Если П(A) – перестановочный многогранник, то граф многогранника П(A) – гамильтонов.

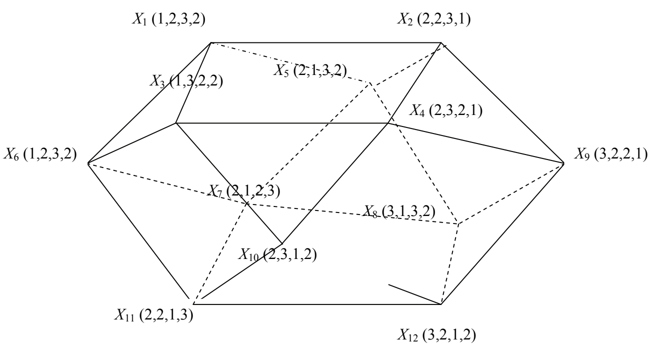

Рис. 7

Заключение. Исследованы сложные комбинаторные задачи на множестве перестановок. Рассмотрены некоторые свойства допустимой области евклидовой комбинаторной задачи, имеющей специфические входные данные. Построен и обоснован метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок.

Дальнейшее развитие этой тематики, которая не нашла полного отражения в статье, будет направлено на реализацию и адаптацию сформулированного метода, а также на разработку новых методов решения комбинаторных оптимизационных задач с учетом входных данных и других комбинаторных множеств.

1. *Сергиенко И.В*., *Каспшицкая М.Ф*. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – К.: – Наук. думка, 1981. – 287 с.
2. *Сергиенко И.В*. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Там же, 1988. – 472 с.
3. *Сергиенко И.В*., *Лебедева Т.Т*., *Рощин В.А*. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации. – Там же, 1980. – 276 с.
4. *Стоян Ю.Г*., *Яковлев С.В*. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – Там же, 1986. – 265 с.
5. *Стоян Ю.Г*., *Ємець О.О*. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
6. *Ємець О.О*., *Колєчкіна Л.М*. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. – К.: Наук. думка, 2005. – 118 с.
7. *Баранов В.И*., *Стечкин Б.С*. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 240 с.
8. *Семенова Н.В*., *Колечкина Л.Н*., *Нагорная А.Н*. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 3. – С. 158–172.
9. *Емеличев В.А*., *Ковалев М.М*., *Кравцов М.К*. Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
10. *Донец Г.А*., *Шулинок И.Э*. О сложности алгоритмов поиска в глубину на модульных графах // Теорія оптимальних рішень. – 2002. – № 1. – С. 105–110.
11. *Донец Г.А*. Алгоритмы раскраски плоских графов // Там же. – 2006. – № 5. С. 134–143.
12. *Донец Г.А*., *Самер И.М*., *Альшаламе* Решение задачи о построении линейной мозаики // Там же. – 2005. – № 4. – С. 15–24.

Поступила 19.11.2008

Тел. для справок:(044) 526-2188 (Киев)
E–mail: *ludapl@ukr.net*