УДК 519.6

О.Н. Литвин, И.В. Нефёдова

Численная реализация метода конечных элементов с оптимальным выбором параметров, базисных функций и координат узлов элементов

Приведены основные утверждения метода конечных элементов с оптимальным выбором параметров, базисных функций и координат узлов элементов. Предложена численная схема реализации данного метода.

Main statements of the method of finite elements with the optimal choice of parameters, basic functions and co-ordinates of the nodes of elements are presented. A numerical scheme of realization of the given method is suggested.

Наведено основні твердження методу скінчених елементів з оптимальним вибором параметрів, базисних функцій та координат вузлів елементів. Запропоновано обчислювальну схему реалізації даного методу.

Введение. Цель статьи – формулировка задачи оптимального выбора узловых параметров, базисных функций и координат узлов в методе конечных элементов в задаче Дирихле для уравнения эллиптического типа второго порядка (прямоугольные элементы) и обоснование предложенного метода ее решения; разработка алгоритма численной реализации предложенной оптимизационной задачи.

Постановка проблемы

В статье исследуются схемы метода конечных элементов (МКЭ) решения задачи Дирихле для двумерного уравнения эллиптического типа второго порядка. Особенность исследуемого метода – из условия минимума функционала находятся узловые параметры, базисные функции и координаты узлов сетки, на которую разбивается область интегрирования. В вычислительной математике известны методы приближения функций с помощью некоторого набора их значений в фиксированных точках (узлах), точность которых улучшается при оптимальном выборе узлов (полиномы Чебышева П.Л., квадратурные формулы Гаусса, приводимые к оптимальным алгоритмам). Поэтому исследование схем МКЭ с оптимальным выбором узлов сетки актуально.

Анализ исследований и публикаций

Проблеме оптимального или близкого к оптимальному выбору узлов в МКЭ посвящены работы [1, 2], в которых дан апостериорный анализ погрешности и изложен адаптивный процесс проведения вычислений. Предложенный в этих работах выбор оптимальной или близкой к оптимальной сетке узлов основан на предположении, что базисные функции в МКЭ – известные сплайны. В работе [3] исследуются вопросы наилучшего выбора узлов при интерполировании функций эрмитовыми сплайнами, в частности в ней получены явные выражения для асимптотического оптимального размещения узлов эрмитовых сплайнов. Эти результаты могут быть с соответствующими изменениями перенесены на МКЭ, основанный на использовании полиномиальных сплайнов. В статье [4] исследуются некоторые вопросы диагностики особенностей точного решения задачи Коши методом сгущения сетки.

В научном пособии [5] детально исследовались схемы МКЭ, в которых оптимально выбирались как узловые параметры, так и базисные функции при фиксированном наборе узлов разбиения.

Вспомогательные утверждения

Допустим, что область Ω разбита линиями $x = x_k$, $(k=\overline{1,m})$, $y = y_l$, $(l=\overline{1,n})$ на элементы $\Pi_{k,l} = [x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}]$, $(k=\overline{1,m-1},\ l=\overline{1,n-1})$ и в каждом из этих элементов приближенное решение $\tilde{u}(x,y)$ краевой задачи

$$Lu(x,y) = f(x,y),\quad (x,y)\in\Omega, \tag{1}$$

$$u(x,y)=0,\ (x,y)\in\partial\Omega, \tag{2}$$

где

$$Lu(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p1(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right) -$$

Ключевые слова: метод конечных элементов, базисные функции, координаты узлов, оптимизация.

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(p2(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)+q(x,y)u(x,y),$$

$$p1, p2\in C^1(\Omega),\ q\in C(\Omega),\ f\in L^2(\Omega)$$

представляется в виде: $\tilde{u}(x,y)=u_{k,l}(x,y),\ (x,y)\in$ $\in\Pi_{k,l}\subset\Omega$

$$u_{k,l}(x,y)=C_{k,l}\,h1^0_{k,l}\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)h2^0_{k,l}\left(\frac{y-y_l}{y_{l+1}-y_l}\right)+$$
$$+C_{k+1,l}\,h1^1_{k+1,l}\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)h2^0_{k+1,l}\left(\frac{y-y_l}{y_{l+1}-y_l}\right)+$$
$$+C_{k,l+1}\,h1^0_{k,l+1}\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)h2^1_{k,l+1}\left(\frac{y-y_l}{y_{l+1}-y_l}\right)+$$
$$+C_{k+1,l+1}\,h1^1_{k+1,l+1}\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)h2^1_{k+1,l+1}\left(\frac{y-y_l}{y_{l+1}-y_l}\right)=$$
$$=\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}C_{k+\mu,l+\nu}\,h1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)\,h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)=$$
$$=w_{k,l}(s,t),\tag{3}$$

где $s=\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k},\ t=\dfrac{y-y_l}{y_{l+1}-y_l},\ h1^{\mu}_{k,l}(s),\ h2^{\nu}_{k,l}(t)\in$ $\in C^2\ [0,1]$ и имеют свойства

$$h1^0_{k,l}(0)=h2^0_{k,l}(0)=1,\ h1^0_{k,l}(1)=h2^0_{k,l}(1)=0,$$
$$h1^0_{k,l}(0)=h2^0_{k,l}(0)=1,\ \ h1^0_{k,l}(1)=h2^0_{k,l}(1)=0,\tag{4}$$
$\forall(x_k,y_l)\in\bar{\Omega}$.

Лемма 1. Если функции $h1^{\mu}_{k,l}(s),\ h2^{\nu}_{k,l}(t)\in C^2$ $[0,1]$ и удовлетворяют свойствам (4), то формула (3) удовлетворяет следующим свойствам:

1) $u_{k,l}(x_{k+\mu},y_{l+\nu})=C_{k+\mu,l+\nu},\ 0\le\mu,\nu\le1;\ \Pi_{k,l}\subset\Omega$;

2) $\tilde{u}(x,y)\in C(\Omega)\cap W_2^1(\Omega)$;

3) если $C_{k,l}=0\ \ \forall(x_k,y_l)\in\partial\Omega$, то $\tilde{u}(x,y)\in$ $\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)=\left\{u\in W_2^1(\Omega)\middle|u(x,y)=0,\ (x,y)\in\partial\Omega\right\}$.

Доказательство. Интерполяционные свойства 1) доказываются непосредственной проверкой – подстановкой в формулу (3) для $u_{k,l}(x,y)$ значений $(x_k,y_l),\ (x_{k+1},y_l),\ (x_k,y_{l+1}),\ (x_{k+1},y_{l+1})$.

Функция $\tilde{u}(x,y)\in C(\Omega)$ следует из нижеизложенного: если $\Pi_{k,l}\subset\Omega,\ \Pi_{k,l-1}\subset\Omega$, то

$$u_{k,l}(x,y_l)=u_{k,l-1}(x,y_l)=$$
$$=C_{k,l}h1^0_{k,l}\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)+C_{k+1,l}h1^1_{k+1,l}\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right).$$

Таким образом, в каждом из элементов $\Pi_{k,l}$ функция $u_{k,l}(x,y)\in C^2\left[\Pi_{k,l}\right]$ и поэтому функция $\tilde{u}(x,y)\in C(\Omega)$, так как на границе между соседними элементами она непрерывна.

Тот факт, что функция $\tilde{u}(x,y)$ принадлежит классу функций $W_2^1(\Omega)$, следует из определения класса

$$W_2^1(\Omega):=\left\{u\middle|G_\Omega(u)<\infty\right\}:$$
$$G_\Omega(u):=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)^2+u^2(x,y)\right]dxdy.$$

Неравенство $J_\Omega(\tilde{u})<\infty$ следует из формулы

$$J_\Omega(\tilde{u})=\sum_{\Pi_{k,l}\subset\Omega}\iint_{\Pi_{k,l}}\left[\left(\frac{\partial u_{k,l}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_{k,l}}{\partial y}\right)^2+\right.$$
$$\left.+u^2_{k,l}\right]dxdy=\sum_{\Pi_{k,l}\subset\Omega}J_{\Pi_{k,l}}(u_{k,l}).\tag{5}$$

Каждый из этих функционалов $J_{\Pi_{k,l}}(u_{k,l})$ – ограниченная величина, так как $u_{k,l}(x,y),\ \dfrac{\partial u_{k,l}}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u_{k,l}}{\partial y}$ являются непрерывными функциями, т.е. $\exists M>0:\left|u_{k,l}(x,y)\right|<M,\ \ \left|\dfrac{\partial u_{k,l}}{\partial x}\right|<M,\left|\dfrac{\partial u_{k,l}}{\partial y}\right|<M,$ $\forall(x,y)\in\Pi_{k,l}$. Поэтому $J_{k,l}(u_{k,l})<3M^2\cdot mes(\Omega)<\infty$.

Доказательство того, что $\tilde{u}(x,y)$ удовлетворяет предельным условиям, следует непосредственно из интерполяционных свойств $\tilde{u}(x,y)$. **Лемма 1 доказана**.

Замечание. Можно также предположить, что $h1^{\mu}_{k,l}(s),\ h2^{\nu}_{k,l}(t) \in C^1\left[0,1\right]$.

Формулу (3) в некоторых случаях удобно также записывать в виде

$$\tilde{u}\left(x,y\right) = \sum_{(x_k,y_l)\in\Omega} C_{k,l} h1_{k,l}\left(x\right) h2_{k,l}\left(y\right),$$

где

$$h1_{k,l}\left(x\right) = \begin{cases} 0,\ x \le x_{k-1}; \\ h1^1_{k,l}\left(\dfrac{x-x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right),\ x_{k-1} < x \le x_k; \\ h1^0_{k,l}\left(\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right),\ x_k < x < x_{k+1}; \\ 0,\ x \ge x_{k+1}; \end{cases}$$

$$h2_{k,l}\left(y\right) = \begin{cases} 0,\ y \le y_{l-1}; \\ h2^1_{k,l}\left(\dfrac{y-y_{l-1}}{y_l - y_{l-1}}\right),\ y_{l-1} < y \le y_l; \\ h2^0_{k,l}\left(\dfrac{y-y_l}{y_{l+1}-y_l}\right),\ y_l < y < y_{l+1}; \\ 0,\ y \ge y_{l+1}. \end{cases}$$

Введем обозначение

$$\tilde{J}_{k,l} = \iint_{\Pi_{k,l}} \left(p1\left(\frac{\partial u_{k,l}}{\partial x}\right)^2 + p2\left(\frac{\partial u_{k,l}}{\partial y}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + q u^2_{k,l} - 2 f u_{k,l} \right) dxdy, \qquad (6)$$
$$p1 = p1\left(x,y\right),\ p2 = p2\left(x,y\right),$$
$$q = q\left(x,y\right),\ f = f\left(x,y\right),\ u_{k,l} = u_{k,l}\left(x,y\right).$$

Лемма 2. Для функционалов $\tilde{J}_{k,l}$ выполняется равенство $\tilde{J}_{k,l} = J_{k,l}$, где

$$J_{k,l} = \int_0^1\!\!\int_0^1 \left[p1_{k,l}\left(s,t\right)\left(\frac{\partial w_{k,l}\left(s,t\right)}{\partial s}\right)^2 \Delta1_k^{-2} + \right.$$
$$+ p2_{k,l}\left(s,t\right)\left(\frac{\partial w_{k,l}\left(s,t\right)}{\partial t}\right)^2 \Delta2_k^{-2} +$$
$$+ q_{k,l}\left(s,t\right) w^2_{k,l}\left(s,t\right) -$$
$$\left. - 2 f_{k,l}\left(s,t\right) w_{k,l}\left(s,t\right) \right] \Delta1_k \Delta2_l \, dsdt, \qquad (7)$$

$\Delta1_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta2_l = y_{l+1} - y_l$,

$p1_{k,l}\left(s,t\right) = p1\left(s\Delta1_k + x_k, t\Delta2_l + y_l\right)$,

$p2_{k,l}\left(s,t\right) = p2\left(s\Delta1_k + x_k, t\Delta2_l + y_l\right)$,

$q_{k,l}\left(s,t\right) = q\left(s\Delta1_k + x_k, t\Delta2_l + y_l\right)$,

$f_{k,l}\left(s,t\right) = f\left(s\Delta1_k + x_k, t\Delta2_l + y_l\right)$.

Доказательство.

$$J_{k,l} = \int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_l}^{y_{l+1}} \left(p1\left(x,y\right)\left(\frac{\partial u_{k,l}\left(x,y\right)}{\partial x}\right)^2 + \right.$$
$$+ p2\left(x,y\right)\left(\frac{\partial u_{k,l}\left(x,y\right)}{\partial y}\right)^2 + q\left(x,y\right) u^2_{k,l}\left(x,y\right) -$$
$$\left. - 2 f\left(x,y\right) u_{k,l}\left(x,y\right) \right) dxdy.$$

Выполним следующую замену переменных $\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} = s$, $\quad dx = \Delta1_k\, ds$; $\quad \dfrac{y-y_l}{y_{l+1}-y_l} = t$, $dy = \Delta2_l\, dt$; $x = x_k \Rightarrow s = 0$, $\quad x = x_{k+1} \Rightarrow s = 1$; $y = y_l \Rightarrow t = 0$, $y = y_{t+1} \Rightarrow t = 1$.

В результате получим:

$$J_{k,l} = \int_0^1\!\!\int_0^1 \left[p1_{k,l}\left(s,t\right)\left(\frac{\partial w_{k,l}\left(s,t\right)}{\partial s}\cdot\frac{ds}{dx}\right)^2 + \right.$$
$$+ p2_{k,l}\left(s,t\right)\left(\frac{\partial w_{k,l}\left(s,t\right)}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dy}\right)^2 + q_{k,l}\left(s,t\right) w^2_{k,l}\left(s,t\right) -$$
$$\left. - 2 f_{k,l}\left(s,t\right) w_{k,l}\left(s,t\right) \right] \Delta1_k \Delta2_l \, dsdt =$$
$$= \int_0^1\!\!\int_0^1 \left[p1_{k,l}\left(s,t\right)\left(\frac{\partial w_{k,l}\left(s,t\right)}{\partial s}\right)^2 \Delta1_k^{-2} + \right.$$
$$+ p2_{k,l}\left(s,t\right)\left(\frac{\partial w_{k,l}\left(s,t\right)}{\partial t}\right)^2 \Delta2_k^{-2} + q_{k,l}\left(s,t\right) w^2_{k,l}\left(s,t\right) -$$
$$\left. - 2 f_{k,l}\left(s,t\right) w_{k,l}\left(s,t\right) \right] \Delta1_k \Delta2_l \, dsdt,$$

что и нужно было доказать. **Лемма 2 доказана**.

Основные утверждения статьи

Теорема 1. Функции $h1^i_{k+i,l+j}\left(s\right),\ i,j \in \left\{0,1\right\}$, на которых достигается минимум функционала $J_{k,l}$, должны удовлетворять системе интегро-дифференциальных уравнений, являющихся уравнениями Эйлера для функционала $J_{k,l}$ относительно функций $h1^{i}_{k+i,l+j}(s)$, $i,j\in\{0,1\}$ вида

$$\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}\frac{\partial}{\partial s}\left(A1^{i,j}_{k,l,\mu,\nu}(s)\frac{dh1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)}{ds}\right)-$$

$$-\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}B1^{i,j}_{k,l,\mu,\nu}(s)\,h1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)-$$

$$-F1^{i,j}_{k,l}(s)=0, \tag{8}$$

где

$$A1^{i,j}_{k,l,\mu,\nu}(s)=C_{k+\mu,l+\nu}C_{k+i,l+j}\frac{\Delta 2_l}{\Delta 1_k}\cdot$$

$$\cdot\int_0^1\left(p1_{k,l}(s,t)\,h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)\,h2^{j}_{k+i,l+j}(t)\right)dt,$$

$$B1^{i,j}_{k,l,\mu,\nu}(s)=\left[\frac{\Delta 1_k}{\Delta 2_l}\int_0^1\left(p2_{k,l}(s,t)\frac{dh2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)}{dt}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\cdot\frac{dh2^{j}_{k+i,l+j}(t)}{dt}\right)dt-\Delta 1_k\Delta 2_l\cdot$$

$$\left.\cdot\int_0^1\left(q_{k,l}(s,t)\,h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)\,h2^{j}_{k+i,l+j}(t)\right)dt\right]\cdot$$

$$\cdot C_{k+\mu,l+\nu}C_{k+i,l+j},$$

$$F1^{i,j}_{k,l}(s)=C_{k+i,l+j}\Delta 1_k\Delta 2_l\int_0^1 f_{k,l}(s,t)\,h2^{j}_{k+i,l+j}(t)\,dt.$$

Доказательство. Для нахождения вариации функционала $J_{k,l}$ по функции $h1^{i}_{k+i,l+j}(s)$, $i,j\in$ $\in\{0,1\}$ отметим, что этот функционал может быть записан в виде

$$J_{k,l}=\int_0^1\Phi 1_{k,l}\left(h1^{i}_{k+i,l+j}(s),\ \frac{dh1^{i}_{k+i,l+j}(s)}{ds},\ldots,s\right)ds,$$

где

$$\Phi 1_{k,l}\left(h1^{i}_{k+i,l+j}(s),\frac{dh1^{i}_{k+i,l+j}(s)}{ds},\ldots,s\right)=$$

$$=\int_0^1\left[p1_{k,l}(s,t)\left(\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial s}\right)^2\Delta 1_k^{-2}+\right.$$

$$+p2_{k,l}(s,t)\left(\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial t}\right)^2\Delta 2_k^{-2}+q_{k,l}(s,t)\,w^2_{k,l}(s,t)-$$

$$\left.-2f_{k,l}(s,t)\,w_{k,l}(s,t)\right]\Delta 1_k\Delta 2_l\,dt.$$

Согласно основным утверждениям вариационного исчисления функция $h1^{i}_{k+i,l+j}(s)$, дающая минимум функционалу $J_{k,l}$, должна удовлетворять уравнению Эйлера. Уравнение Эйлера для этого функционала относительно функции $h1^{i}_{k+i,l+j}(s)$ имеет вид

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial\Phi 1_{k,l}}{\partial\left(h1^{i}_{k+i,l+j}(s)\right)'}-\frac{\partial\Phi 1_{k,l}}{\partial h1^{i}_{k+i,l+j}(s)}=0. \tag{9}$$

Учитывая выражение для функции $\Phi 1_{k,l}$, а также детальные выражения для производных

$$\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial s}=\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}C_{k+\mu,l+\nu}\frac{dh1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)}{ds}h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t);$$

$$\frac{\partial}{\partial\left(dh1^{i}_{k+i,l+j}(s)/ds\right)}\left(\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial s}\right)=C_{k+i,l+j}h2^{j}_{k+i,l+j}(t);$$

$$\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial t}=\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}C_{k+\mu,l+\nu}h1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)\frac{dh2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)}{dt};$$

$$\frac{\partial}{\partial h1^{i}_{k+i,l+j}(s)}\left(\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial t}\right)=C_{k+i,l+j}\ \frac{dh2^{j}_{k+i,l+j}(t)}{dt}.$$

Можем записать уравнение Эйлера (9) в следующей форме:

$$\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(p1_{k,l}(s,t)\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial s}\frac{\partial}{\partial\left(dh1^{i}_{k+i,l+j}(s)/ds\right)}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial s}\right)\Delta 1_k^{-2}\right)-p2_{k,l}(s,t)\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial t}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial h1^{i}_{k+i,l+j}(s)}\left(\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial s}\right)\Delta 2_l^{-2}-$$

$$-g_{k,l}(s,t)\,w_{k,l}(s,t)\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial h1^{i}_{k+i,l+j}(s)}-$$

$$\left.-f_{k,l}(s,t)\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial h1^{i}_{k+i,l+j}(s)}\right)\Delta 1_k\Delta 2_l\,dt=0$$

или

$$\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(p1_{k,l}(s,t)\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial s}C_{k+i,l+j}h2^{j}_{k+i,l+j}(t)\Delta 1_k^{-2}\right)-\right.$$

$$-p2_{k,l}(s,t)\frac{\partial w_{k,l}(s,t)}{\partial t}C_{k+i,l+j}\;\frac{dh2^j_{k+i,l+j}(t)}{dt}\Delta 2_l^{-2}-$$

$$-g_{k,l}(s,t)\,w_{k,l}(s,t)\,C_{k+i,l+j}h2^j_{k+i,l+j}(t)-$$

$$-f_{k,l}(s,t)\,C_{k+i,l+j}h2^j_{k+i,l+j}(t)\Big)\Delta 1_k\,\Delta 2_l\,dt=0.$$

В более детальной записи это уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\int_0^1\left(p1_{k,l}(s,t)\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}C_{k+\mu,l+\nu}\frac{dh1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)}{ds}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)\,C_{k+i,l+j}h2^j_{k+i,l+j}(t)\,\Delta 1_k^{-2}\right)\Delta 1_k\,\Delta 2_l\,dt\right)-$$

$$-\int_0^1\left(p2_{k,l}(s,t)\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}C_{k+\mu,l+\nu}h1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{dh2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)}{dt}C_{k+i,l+j}\;\frac{dh2^j_{k+i,l+j}(t)}{dt}\Delta 2_l^{-2}\right)\cdot$$

$$\cdot\Delta 1_k\,\Delta 2_l\,dt-\int_0^1\Big(g_{k,l}(s,t)\,C_{k+i,l+j}h2^j_{k+i,l+j}(t)\cdot$$

$$\left.\cdot\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}C_{k+\mu,l+\nu}h1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)\right)\Delta 1_k\,\Delta 2_l\,dt-$$

$$-\int_0^1 f_{k,l}(s,t)\,C_{k+i,l+j}h2^j_{k+i,l+j}(t)\Delta 1_k\,\Delta 2_l\,dt=0.$$

Если учесть введенные выше обозначения, то это уравнение можно записать в виде (8). **Теорема 1 доказана**.

Теорема 2. Функция $h1^i_{k+i,l}(s)$ входит в функционалы $J_{k,l}$, $J_{k,l-1}$. Поэтому учитывая, что $J_{\Omega}(u)=\sum\limits_{\Pi_{k,l}\subset\Omega}J_{k,l}$ – уравнение Эйлера для функционала J_{Ω} относительно функции $h1^i_{k+i,l}(s)$, $i=0,1$, будет иметь вид

$$\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}\frac{\partial}{\partial s}\left(\left(A1^{i,0}_{k,l,\mu,\nu}(s)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+A1^{i,1}_{k,l-1,\mu,\nu}(s)\right)\frac{dh1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)}{ds}\right)-$$

$$-\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}\left(B1^{i,0}_{k,l,\mu,\nu}(s)+B1^{i,1}_{k,l-1,\mu,\nu}(s)\right)\times$$

$$\times h1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)-F1^{i,0}_{k,l}(s)-F1^{i,1}_{k,l-1}(s)=0,\qquad(10)$$

где

$$A1^{i,0}_{k,l,\mu,\nu}(s)=C_{k+\mu,l+\nu}C_{k+i,l}\frac{\Delta 2_l}{\Delta 1_k}\cdot$$

$$\cdot\int_0^1\left(p1_{k,l}(s,t)\,h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)\,h2^0_{k+i,l}(t)\right)dt,$$

$$A1^{i,1}_{k,l-1,\mu,\nu}(s)=C_{k+\mu,l+\nu}C_{k+i,l}\frac{\Delta 2_{l-1}}{\Delta 1_k}\cdot$$

$$\cdot\int_0^1\left(p1_{k,l-1}(s,t)\,h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)\,h2^1_{k+i,l}(t)\right)dt,$$

$$B1^{i,0}_{k,l,\mu,\nu}(s)=\left[\frac{\Delta 1_k}{\Delta 2_l}\int_0^1\left(p2_{k,l}(s,t)\frac{dh2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)}{dt}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\cdot\frac{dh2^0_{k+i,l}(t)}{dt}\right)dt-\Delta 1_k\,\Delta 2_l\cdot$$

$$\left.\cdot\int_0^1\left(q_{k,l}(s,t)\,h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)\,h2^0_{k+i,l}(t)\right)dt\right]C_{k+\mu,l+\nu}C_{k+i,l},$$

$$B1^{i,1}_{k,l-1,\mu,\nu}(s)=\left[\frac{\Delta 1_k}{\Delta 2_{l-1}}\int_0^1\left(p2_{k,l-1}(s,t)\frac{dh2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)}{dt}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\cdot\frac{dh2^1_{k+i,l}(t)}{dt}\right)dt-\Delta 1_k\,\Delta 2_{l-1}\cdot$$

$$\left.\cdot\int_0^1\left(q_{k,l-1}(s,t)\,h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)\,h2^1_{k+i,l}(t)\right)dt\right]C_{k+\mu,l+\nu}C_{k+i,l},$$

$$F1^{i,0}_{k,l}(s)=C_{k+i,l}\Delta 1_k\,\Delta 2_l\int_0^1 f_{k,l}(s,t)\,h2^0_{k+i,l}(t)\,dt,$$

$$F1^{i,1}_{k,l-1}(s)=C_{k+i,l}\Delta 1_k\,\Delta 2_{l-1}\int_0^1 f_{k,l-1}(s,t)\,h2^1_{k+i,l}(t)\,dt.$$

Доказательство. Теорема 1 доказана при условии, что функции $h1^i_{k+i,l}(s)$, $(i=0,1)$ входят лишь в один элемент $\Pi_{k,l}$. В сумме $\sum\limits_{\Pi_{k,l}\subset\Omega}J_{k,l}$ два слагаемых $J_{k,l}$ и $J_{k,l-1}$ зависят от функций $h1^i_{k+i,l}(s)$. Таким образом, уравнение Эйлера относительно этих функций для $\sum\limits_{\Pi_{k,l}\subset\Omega}J_{k,l}$ будет суммой двух уравнений типа (8) со значением индексов l и $l-1$, а также при условии, что в уравнении, полученном в результате минимизации $J_{k,l}$, положено $j=0$, а в уравнении, полученном в результате минимизации $J_{k,l-1}$, положено $j=1$.

Записывая эти уравнения в детальной форме, получим доказательство теоремы 2.

Замечание. Аналогичную систему уравнений можно получить при минимизации функционала J_Ω по функциям $h2^j_{k,l+j}(t)$, $j=0,1$.

$$\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(A2^{0,j}_{k,l,\mu,\nu}(t)+A2^{1,j}_{k-1,l,\mu,\nu}(t)\right)\cdot\frac{dh2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)}{dt}\right)-$$

$$-\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}\left(B2^{0,j}_{k,l,\mu,\nu}(t)+B2^{1,j}_{k-1,l,\mu,\nu}(t)\right)\times$$

$$\times h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)-F2^{0,j}_{k,l}(t)-F2^{1,j}_{k-1,l}(t)=0, \qquad (11)$$

где

$$A2^{0,j}_{k,l,\mu,\nu}(t)=C_{k+\mu,l+\nu}C_{k,l+j}\frac{\Delta 2_l}{\Delta 1_k}\cdot\int_0^1\left(p1_{k,l}(s,t)h1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)h1^{0}_{k,l+j}(s)\right)ds,$$

$$A2^{1,j}_{k-1,l,\mu,\nu}(t)=C_{k+\mu,l+\nu}C_{k,l+j}\frac{\Delta 2_l}{\Delta 1_{k-1}}\cdot\int_0^1\left(p1_{k-1,l}(s,t)h1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)h1^{1}_{k,l+j}(s)\right)ds,$$

$$B2^{0,j}_{k,l,\mu,\nu}(t)=\left[\frac{\Delta 1_k}{\Delta 2_l}\int_0^1\left(p2_{k,l}(s,t)\frac{dh1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)}{ds}\cdot\frac{dh1^{0}_{k,l+j}(s)}{ds}\right)ds-\Delta 1_k\Delta 2_l\cdot\int_0^1\left(q_{k,l}(s,t)h1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)h1^{0}_{k,l+j}(s)\right)ds\right]C_{k+\mu,l+\nu}C_{k,l+j},$$

$$B2^{1,j}_{k-1,l,\mu,\nu}(t)=\left[\frac{\Delta 1_{k-1}}{\Delta 2_l}\int_0^1\left(p2_{k-1,l}(s,t)\frac{dh1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)}{ds}\cdot\frac{dh1^{1}_{k,l+j}(s)}{ds}\right)ds-\Delta 1_{k-1}\Delta 2_l\cdot\int_0^1\left(q_{k-1,l}(s,t)h1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)h1^{1}_{k,l+j}(s)\right)ds\right]C_{k+\mu,l+\nu}C_{k,l+j},$$

$$F2^{0,j}_{k,l}(t)=C_{k,l+j}\Delta 1_k\Delta 2_l\int_0^1 f_{k,l}(s,t)h1^{0}_{k,l+j}(s)ds,$$

$$F2^{1,j}_{k-1,l}(t)=C_{k,l+j}\Delta 1_{k-1}\Delta 2_l\int_0^1 f_{k-1,l}(s,t)h1^{1}_{k,l+j}(s)ds\,.$$

Доказательство этой формулы аналогично доказательству теоремы 2.

Системы (10), (11) представляют собой систему интегро-дифференциальных уравнений со следующим свойством: система (10) – система дифференциальных уравнений, коэффициенты которой $A1$, $B1$ зависят от функций $h2^{\nu}_{k+\mu,l+\nu}(t)$ и наоборот, система (11) – система дифференциальных уравнений, коэффициенты которой $A2$, $B2$ зависят от функций $h1^{\mu}_{k+\mu,l+\nu}(s)$. Это свойство лежит в основе предложенного метода приближенного решения поставленной оптимизационной задачи.

Теорема 3. Если приближенное решение задачи (1), (2) искать в виде $\tilde{u}(x,y)$, то для нахождения неизвестных параметров $C_{k,l}$ получим систему Ритца:

$$\sum_{(x_k,y_l)\in\Omega}\gamma_{m,n,k,l}C_{k,l}=\beta_{m,n}\,,\ (x_m,y_n)\in\Omega\,, \qquad (12)$$

где

$$\gamma_{m,n,k,l}=\left[h1_{k,l}(x)h2_{k,l}(y),\,h1_{m,n}(x)h2_{m,n}(y)\right];$$

$$\left[\varphi(x,y),\psi(x,y)\right]:=\iint_\Omega\left[p1(x,y)\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}+p2(x,y)\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}+g(x,y)\varphi(x,y)\psi(x,y)\right]dxdy,$$

$$\beta_{m,n}=\iint_\Omega f(x,y)h1_{m,n}(x)h2_{m,n}(y)dxdy\,.$$

Для нахождения неизвестных функций $h1_{k,l}(x)$, $h2_{k,l}(y)$ необходимо решить систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\delta_{h1^{\mu}_{k,l}}J_\Omega(\tilde{u})=0,\ \ \delta_{h2^{\nu}_{k,l}}J_\Omega(\tilde{u})=0,$$

$$\forall(k,l):(x_k,y_l)\in\Omega,\ \ 0\le\mu,\ \nu\le 1. \qquad (13)$$

А для оптимального выбора узлов $\left(x_k, y_l\right)$ решить задачу

$$J_\Omega\left(\tilde{u}\right) \to \min_{\left(x_k, y_l\right)\in\Omega}, \qquad (14)$$

где минимизация функционала проводится при условии, что функции $h1^{\mu}_{k,l}$, $h2^{\nu}_{k,l}$ определены.

Доказательство. Как следует из определения (5), функционал $J_\Omega\left(\tilde{u}\right)$ зависит от $\left\{C_{k,l}\right\}$, $\left\{h1^{i}_{k+i,l+j}\left(x\right)\right\}$, $\left\{h2^{j}_{k+i,l+j}\left(y\right)\right\}$ и узлов $\left\{\left(x_k, y_l\right)\right\}$. Поэтому экстремум такого функционала достигается только при условии, что по каждому из приведенных выше наборов параметров и функций функционал $J_\Omega\left(\tilde{u}\right)$ принимает наименьшее значение.

Минимизация по постоянным $C_{k,l}$ приводит к системе Ритца:

$$\frac{\partial J_\Omega\left(\tilde{u}\right)}{\partial C_{m,n}} = 0,\ \left(x_m, y_n\right)\in\Omega.$$

Экстремум функционала по функциям $h1^{\mu}_{k,l}\left(s\right), h2^{\nu}_{k,l}\left(t\right)$ ведет к уравнениям (13), которые получаются приравниванием к нулю вариаций функционала $J_\Omega\left(\tilde{u}\right)$ по функциям $h1^{\mu}_{k,l}\left(s\right), h2^{\nu}_{k,l}\left(t\right)$.

Соотношение (14) автоматически следует из общей постановки задачи

$$J_\Omega\left(\tilde{u}\right) \to \min_{\left\{C_{k,l}\right\},\left\{h1^{\mu}_{k,l}\right\},\left\{h2^{\nu}_{k,l}\right\},\left\{\left(x_k, y_l\right)\right\}}.$$

Теорема 3 доказана.

Алгоритм численного решения оптимизационной задачи (12) – (14)

Минимизация функционала $J_\Omega\left(\tilde{u}\right)$ по постоянным $C_{k,l}$, функциям $h1^{\mu}_{k,l}\left(s\right)$, $h2^{\nu}_{k,l}\left(t\right)$ и узлами $\left(x_k, y_l\right)$ должна проводиться одновременно, но с учетом практики удобен итерационный процесс, представленный по шагам далее.

Ш а г 1. Задаем начальное разбиение области Ω на прямоугольные элементы $\Pi_{k,l}$ прямыми $x = x_k$, $(k = \overline{1, m1})$ и $y = y_l$, $(l = \overline{1, m2})$. На практике, если позволяет геометрия задачи, самым простым разбиением будет равномерное разбиение. Полученные узлы (x_k, y_l) считаем начальным приближением системы узлов, и обозначим $\left(x_k^{\langle 0\rangle}, y_l^{\langle 0\rangle}\right)$.

Ш а г 2. Задаем начальные базисные функции $h1^{\mu\langle 0\rangle}_{k,l}\left(s\right)$, $h2^{\nu\langle 0\rangle}_{k,l}\left(t\right)$ в виде произвольных функций со свойствами (4).

Например, $h1^{0}_{k,l}\left(s\right) = 1 - s$, $h1^{1}_{k,l}\left(s\right) = s$, $h2^{0}_{k,l}\left(t\right) = 1 - t$, $h2^{1}_{k,l}\left(t\right) = t \ \ \forall k,l$

или $h1^{0}_{k,l}\left(s\right) = \cos^2\left(\dfrac{\pi s}{2}\right)$, $h1^{1}_{k,l}\left(s\right) = \sin^2\left(\dfrac{\pi s}{2}\right)$, $h2^{0}_{k,l}\left(t\right) = \cos^2\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$, $h2^{1}_{k,l}\left(t\right) = \sin^2\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$.

Ш а г 3. Находим начальное приближение $C^{\langle 0\rangle}_{k,l}$ для неизвестных параметров $C_{k,l}$ путем решения соответствующей системы Ритца (12).

Ш а г 4. Находим оптимальные значения $\left(x_k^{\langle 1\rangle}, y_l^{\langle 1\rangle}\right)$, соответствующее базисным функциям $h1^{\mu\langle 0\rangle}_{k,l}\left(s\right)$, $h2^{\nu\langle 0\rangle}_{k,l}\left(t\right)$, из условия $J_\Omega\left(u_{k,l}\right) \to \min\limits_{\left(x_k, y_l\right)\in\Omega}$, если $C_{k,l}$ изменяется на каждой итерации, т.е. на каждой итерации $C_{k,l}$ находится путем решения соответствующей системы Ритца.

Шаги 1–4 завершают блок, который условно можно назвать блоком оптимального выбора узлов $\left(x_k, y_l\right)$ при известных базисных функциях $h1^{\mu\langle 0\rangle}_{k,l}\left(s\right)$, $h2^{\nu\langle 0\rangle}_{k,l}\left(t\right)$. Следующий блок условно можно назвать блоком оптимального выбора базисных функций $h1^{\mu}_{k,l}\left(s\right)$, $h2^{\nu}_{k,l}\left(t\right)$ при заданной сетке разбиения с узлами (x_k, y_l).

Ш а г 5. Подставляем в функционал $J_\Omega\left(u_{k,l}\right)$ найденные значения $C^{\langle 1\rangle}_{k,l}$, узлы $\left(x_k^{\langle 1\rangle}, y_l^{\langle 1\rangle}\right)$ и начальное приближение к функциям $h2^{\nu\langle 0\rangle}_{k,l}\left(t\right)$. В результате $J_\Omega\left(\tilde{u}\right)$ будет функционалом, зависящим лишь от неизвестных функций $h1_{k,l}\left(s\right)$, $h1'_{k,l}\left(s\right)$ и от переменной s, т.е. $J_\Omega\left(\tilde{u}\right) = J1\left(h1_{k,l}\left(s\right),\ h1'_{k,l}\left(s\right),\ s\right)$.

Находим эти функции из условия минимума функционала $J_{\Omega}(\tilde{u})$, решая соответствующую систему дифференциальных уравнений (10), коэффициенты которой зависят от функций $h2_{k,l}^{\nu\langle 0\rangle}(t)$. Найденные $h1_{k,l}(s)$ обозначим как $h1_{k,l}^{\mu\langle 1\rangle}(s)$ и подставим их в систему (11). Из этой системы находим $h2_{k,l}(t)$ и обозначаем $h2_{k,l}^{\nu\langle 1\rangle}(t)$.

Шаг 5 позволяет повторить шаги 1–4, т.е. выбрать оптимальную сетку при условии, что базисные функции $h1_{k,l}^{\mu}(s)$, $h2_{k,l}^{\nu}(t)$ найдены оптимально на шаге 5.

Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не будет выполняться одно из условий:

1) $\left|J_{\Omega}^{\langle r\rangle}(\tilde{u})-J_{\Omega}^{\langle r-1\rangle}(\tilde{u})\right|<\varepsilon$;

2) $\left|x_k^{\langle r\rangle}-x_k^{\langle r-1\rangle}\right|<\varepsilon 1$, $\left|y_l^{\langle r\rangle}-y_l^{\langle r-1\rangle}\right|<\varepsilon 1$, где ε и $\varepsilon 1$ – заданные исследователем числа.

Заключение. Впервые предложен общий метод построения схем МКЭ с оптимальным выбором узловых параметров, базисных функций и координат узлов элементов. Таким образом, в работе предлагается находить все параметры и функции, входящие в структуру приближенного решения из условия минимума функционала, соответствующего данной краевой задаче, т.е. не задавать их, а находить из классической минимизационной задачи вариационного исчисления.

1. *A posteriori* error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part I – Error analysis / D.W. Kelly, J.P. de S.R. Gago, O.C. Zienkiewicz et al. // Int. J. for numer. methods in Eng. – 1983. – **19**. – P. 1593–1619.
2. *A posterior* error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part II – Adaptive mesh refinement / D.W. Kelly, J.P. de S.R. Gago, O.C. Zienkiewicz et al. // Ibid. – 1983. – **19**. – P. 1621–1656.
3. *Лигун А.А.*, *Сторчай В.Ф.* О наилучшем выборе узлов при интерполировании функций эрмитовыми сплайнами // Analysis math. – 1976. – № 2, 3. – С. 267–275.
4. *Альшина Е.А.*, *Калиткин Н.Н.*, *Корякин П.В.* Диагностика особенностей точного решения методом сгущения сеток // Докл. РАН. – 2005. – Т. 404. – № 3. – С. 295–299.
5. *Литвин О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи: Навч. посіб. – К.: Наук. думка, 2005. – 344 с.

Поступила 20.11.2009

Тел. для справок: (057) 771-0545, (Харьков)
E-mail: *academ@kharkov.ua*

●