

И.П. Атаманюк

Полиномиальный стохастический алгоритм распознавания реализации случайной последовательности на базе аппарата канонических разложений

Разработан алгоритм распознавания реализации случайной последовательности, базирующийся на полиномиальном каноническом разложении. Получено решение проще общего байесовского подхода путем перехода от многомерных плотностей распределения к произведению одномерных плотностей.

An algorithm of the recognition of the realization of a casual sequence which is based on the polynomial canonical decomposition is developed. The obtained decision is essentially simpler than the general Bayes approach due to the transition from the multivariate density of the distribution to the product of one-dimensional densities.

Розроблено алгоритм розпізнавання реалізації випадкової послідовності, що базується на поліноміальному канонічному розкладі. Отримане розв'язання є суттєво простішим за загальний байєсівський підхід завдяки переходу від багатомірних щільностей розподілу до добутку одномірних щільностей.

Введение. Задачу распознавания образов представляет построение на основе теоретических и экспериментальных исследований эффективных вычислительных средств (объединяемых в понятие «системы распознавания») для отнесения описаний с объектов, явлений, процессов к соответствующим классам.

К ним относятся решение задач технической и медицинской диагностики, геологического прогнозирования, прогнозирования свойств химических соединений, распознавания свойств динамических и статических объектов в сложной фоновой обстановке и при наличии активных и пассивных помех, прогнозирования урожая, обнаружения лесных пожаров, управления производственными процессами и т.д. Процесс изменения значений параметров реальных физических объектов в силу воздействия различных случайных факторов является стохастическим и, следовательно, для принятия решения о принадлежности объекта некоторому классу необходимо использовать вероятностные методы анализа.

Постановка задачи

Предположим, что для некоторого контролируемого параметра X заданы две различающиеся между собой случайные последовательности $X^{(1)}(i)$ и $X^{(2)}(i), i = \overline{1, I}$, описывающие реализации параметра X в моменты времени $t_i, i = \overline{1, I}$. В результате получена некоторая последовательность значений $x(i), i = \overline{1, I}$, о кото-

рой априорно известно, что она порождена одной из случайных последовательностей $X^{(1)}(i)$ и $X^{(2)}(i), i = \overline{1, I}$. Требуется определить к какой именно из этих последовательностей (к какому из двух классов) относится данная реализация. Предполагается, что каждая из случайных последовательностей полностью задана своей дискретизированной моментной функцией

$$M[X^\lambda(v)X^h(i)], \lambda, h = \overline{1, N}, v, i = \overline{1, I}.$$

Решение

Сформулированная таким образом задача распознавания полностью сводится к стандартной байесовской постановке [1].

Апостериорная вероятность принадлежности I -мерного вектора $\vec{x} = \{x(1), x(2), \dots, x(I)\}$ каждому из классов может быть вычислена как

$$P\{j/\vec{x}\} = \frac{f_I(\vec{x}/j)P_j}{f_I(\vec{x})}, j = \overline{1, 2}, \quad (1)$$

$$f_I(\vec{x}/j) = \sum_{j=1}^2 f_I(\vec{x}/j)P_j, \quad (2)$$

где $P_j, j = \overline{1, 2}$ – априорная вероятность появления реализации, принадлежащей данному классу; $f_I(\vec{x}/j), j = \overline{1, 2}$ – условная плотность распределения признаков \vec{x} при условии, что реализация принадлежит данному классу.

Номер класса j^* выбирается с помощью решающего правила, минимизирующего вероятность ошибки:

$$j^* = \arg \max_j P\{j/\bar{x}\} = \arg \max_j \{f_1(\bar{x}/j)P_j\}. \quad (3)$$

Задача распознавания реализации случайной последовательности сводится к определению принадлежности реализации \bar{x} случайного вектора \bar{X} к одному из двух заданных распределений $f(\bar{x}/1), f(\bar{x}/2)$.

Таким образом, следующий этап – оценка неизвестных плотностей $f_1(\bar{x}/j), j = \overline{1,2}$, что в свою очередь, учитывая большое количество результатов наблюдения $x(i), i = \overline{1, I}$, является достаточно сложной и трудоемкой процедурой. Данная задача в рамках линейных связей существенно упрощается [2] при переходе от последовательности $x(i), i = \overline{1, I}$ к анализу набора некоррелированных значений $v_i, i = \overline{1, I}$, определяющихся из соотношений [3, 4]:

$$v_i = x(i) - M[X(i)] - \sum_{v=1}^{i-1} V_v \varphi_v(i), i = \overline{1, I}, \quad (4)$$

$$\varphi_v(i) = \frac{1}{D_v} \{M[X(v)X(i)] - M[X(v)] \times \\ \times M[X(i)] - \sum_{j=1}^{v-1} D_j \varphi_j(v) \varphi_j(i)\}, v = \overline{1, I}, i = \overline{v, I}. \quad (5)$$

$$D_i = M[X^2(i)] - \{M[X(i)]\}^2 - \\ - \sum_{v=1}^{i-1} D_v \varphi_v^2(i), i = \overline{1, I}, \quad (6)$$

где $\varphi_v(i), v, i = \overline{1, I}$ – неслучайная координатная функция: $\varphi_v(v) = 1, \varphi_v(i) = 0$, если $v > i$; $D_v = M[V_v^2]$ – дисперсия случайных коэффициентов $V_v, i = \overline{1, I}$: $M[V_v] = 0; M[V_v V_\mu] = 0, v \neq \mu$.

В этом случае замена \bar{x} на вектор \vec{v} с учетом $f_1(\vec{v}/j) = \prod_{i=1}^I f_1(v_i/j), j = \overline{1,2}$ приводит к последовательной аппроксимации I одномерных плотностей распределения.

Снятие ограничения о нормальном распределении случайных последовательностей $X^{(1)}(i)$ и $X^{(2)}(i), i = \overline{1, I}$ возможно в результате исполь-

зования соответствующего нелинейного канонического разложения [5–7]:

$$V_i^{(\lambda)} = X^\lambda(i) - M[X^\lambda(i)] - \sum_{v=1}^{i-1} \sum_{j=1}^{N-1} V_v^{(j)} \beta_{\lambda v}^{(j)}(i) - \\ - \sum_{j=1}^{\lambda-1} V_i^{(j)} \beta_{\lambda i}^{(j)}(i), i = \overline{1, I}; \quad (7)$$

$$D_\lambda(i) = M\left[\left\{V_i^{(\lambda)}\right\}^2\right] = M[X^{2\lambda}(i)] - M^2[X^\lambda(i)] - \\ - \sum_{\mu=1}^{i-1} \sum_{j=1}^{N-1} D_j(\mu) \left\{\beta_{\lambda \mu}^{(j)}(i)\right\}^2 - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(i) \left\{\beta_{\lambda i}^{(j)}(i)\right\}^2, \quad (8)$$

$$i = \overline{1, I};$$

$$\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i) = \frac{M\left[V_\nu^{(\lambda)}\left(X^h(i) - M[X^h(i)]\right)\right]}{M\left[\left\{V_\nu^{(\lambda)}\right\}^2\right]} = \\ = \frac{1}{D_\lambda(\nu)} \left(M[X^\lambda(\nu)X^h(i)] - M[X^\lambda(\nu)]M[X^h(i)] - \right. \\ \left. - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{j=1}^{N-1} D_j(\mu) \beta_{\lambda \mu}^{(j)}(\nu) \beta_{h\mu}^{(j)}(i) - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(\nu) \beta_{\lambda \nu}^{(j)}(\nu) \beta_{h\nu}^{(j)}(i) \right), \lambda = \overline{1, N}, \nu = \overline{1, i}. \quad (9)$$

Рассматриваемые случайные последовательности с помощью (7)–(9) могут быть представлены с помощью массива некоррелированных случайных коэффициентов $V_i^{(\lambda)}, i = \overline{1, I}, \lambda = \overline{1, N}$, каждый из которых содержит информацию о соответствующем значении $X^\lambda(i), \lambda = \overline{1, N}, i = \overline{1, I}$, а координатные функции $\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i), \lambda, h = \overline{1, N}, \nu, i = \overline{1, I}$ описывают вероятностные связи порядка $\lambda + h$ между сечениями t_ν и $t_i, \nu, i = \overline{1, I}$. Учитывая различные свойства $X^{(1)}(i)$ и $X^{(2)}(i), i = \overline{1, I}$, параметры канонического разложения (7)–(9) – уникальны для исследуемых последовательностей. Преимущество использования разложения (7)–(9) заключается в том, что из некоррелированности $V_i^{(N)}, i = \overline{1, I}$ следует их независимость, так как все стохастические свя-

зи более низких порядков из данных коэффициентов удалены. Таким образом, также как и в предыдущем случае, перевод задачи распознавания из I -мерного пространства признаков $\{X(1), \dots, X(I)\}$ в пространство признаков $\{V_1^{(N)}, \dots, V_I^{(N)}\}$ такой же размерности упрощает процедуру оценки плотностей распределения

$$f_i(v_1^{(N)}, \dots, v_i^{(N)} / j) = \prod_{i=1}^I f_i(v_i^{(N)} / j), \quad j = \overline{1, 2},$$

которая сводится к аппроксимации I одномерных плотностей распределения. Поскольку нет никаких предположений о виде плотностей распределения $f_i(v_i^{(N)} / j)$, $j = \overline{1, 2}$, $i = \overline{1, I}$, возникает необходимость применения непараметрических методов.

Наиболее простое и эффективное решение задачи оценивания неизвестной одномерной плотности распределения – использование непараметрических оценок парзеновского типа [8]. При этом оценка искомой плотности распределения $f_1(v_i^{(N)})$ случайной величины $V_i^{(N)}$ по L ее реализациям $v_{i,l}^{(N)}$, $l = \overline{1, L}$ представляется в виде

$$f_L(v_i^{(N)}) = \frac{1}{dL} \sum_{l=1}^L g(u_l), \quad (10)$$

где $u_l = d^{-1}(v_i^{(N)} - v_{i,l}^{(N)})$, $g(u_l)$ – некоторая весовая функция (ядро); d – константа (коэффициент размытости).

Оценка (10) во всех точках области определения получается несмещенной, состоятельной и равномерно сходится к искомой плотности распределения $f_1(v_i^{(N)})$ с вероятностью единица, если весовая функция удовлетворяет условиям [8]:

$$\begin{aligned} g(u) \geq 0; \quad \sup_u |g(u)| < \infty; \quad \lim_{u \rightarrow \pm\infty} |ug(u)| = 0; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) du = 1, \end{aligned} \quad (11)$$

а константа d выбирается в зависимости от числа наблюдений с соблюдением условий:

$$d > 0; \quad \lim_{L \rightarrow +\infty} d(L) = 0; \quad \lim_{L \rightarrow +\infty} d(L)L = \infty. \quad (12)$$

При дополнительном условии симметричности функции ядра $g(u) = g(-u)$ его оптимальная структура по критерию минимума интегральной среднеквадратической ошибки аппроксимации имеет параболический вид [9,10]:

$$g(u) = \begin{cases} a - bu, & |u| \leq \gamma; \\ 0, & |u| > \gamma; \end{cases} \quad (13)$$

где a , b и γ – некоторые константы.

Выбор в качестве функции ядра $g(u)$ равномерной плотности распределения [11] максимально упрощает процедуру аппроксимации неизвестной плотности распределения $f_1(v_i^{(N)})$. В данном случае коэффициент размытости определяется из соотношения

$$d = 0,5 \sup_l |v_{i,l}^{(N)} - v_{i,l-1}^{(N)}|, \quad v_{i,l}^{(N)} > v_{i,l-1}^{(N)}, \quad l = \overline{2, L}. \quad (14)$$

С использованием (14) ядро приобретает вид:

$$g_l(v_i^{(N)}) = d^{-1} \begin{cases} 0,5, & v_{i,l}^{(N)} - d \leq v_i^{(N)} \leq v_{i,l}^{(N)} + d, \\ 0, & |v_i^{(N)} - v_{i,l}^{(N)}| > d, \end{cases} \quad (15)$$

$l = \overline{1, L}$.

Оценка плотности распределения $f_1(v_i^{(N)})$ запишется как

$$f_L(v_i^{(N)}) = L^{-1} \sum_{l=1}^L g_l(v_i^{(N)}). \quad (16)$$

Заключение. Таким образом, получен стохастический алгоритм распознавания реализации случайной последовательности на базе аппарата канонических разложений, который существенно проще общего байесовского решения за счет перехода от обобщенных I -мерных плотностей распределения к произведению I одномерных плотностей, каждая из которых описывает поведение исследуемой последовательности в соответствующий момент измерения контролируемого параметра.

Данное решение задачи распознавания может быть обобщено на случай векторных случайных последовательностей при числе классов больше двух.

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 2. – М.: Сов. радио, 1968. – 503 с.

Окончание на стр. 75

2. Васильев Б.В. Прогнозирование надежности и эффективности радиоэлектронных устройств. – М.: Сов. радио, 1970. – 335 с.
3. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение. – М.: Физматгиз, 1962. – 720 с.
4. Кудрицкий В.Д. Прогнозирующий контроль радиоэлектронных устройств. – Киев: Техніка, 1982. – 168 с.
5. Атаманюк И.П. Алгоритм реализации нелинейной случайной последовательности на базе ее канонического разложения // Электронное моделирование. – 2001. – № 5. – С. 38–46.
6. Атаманюк И.П. Полиномиальный алгоритм оптимальной экстраполяции параметров стохастических систем. // УСиМ. – 2002. – № 1. – С. 16–19.
7. Атаманюк И.П. Алгоритм экстраполяции нелинейного случайного процесса на базе его канонического разложения // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 2. – С. 131–138.
8. Parzen E. On the estimation of probability density function and the mode // Ann. Math. Stat. – 1962. – 33. – P. 1065–1076.
9. Епанечников В.А. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятностей и ее применение. – 1969. – № 1. – С. 156–161.
10. Рубан А.И. Непараметрические процедуры сглаживания результатов эксперимента // Сб.: Системы управления, вып. 2. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1977. – С. 46–54.
11. Кудрицкий В.Д. Фильтрация, экстраполяция и распознавание реализаций случайных функций. – К.: ФАДА, ЛТД, 2001. – 176 с.

Поступила 25.10.2009

Тел. для справок: (0512) 218-303, (098) 797-1234 (Николаев)

E-mail: atamanyuk_igor@mail.ru

© И.П. Атаманюк, 2009

