УДК 519.21, 519.713

А.С. Бычков, Е.В. Иванов

Существование согласованного κ-аддитивного продолжения мер в теории возможностей

Рассмотрено существование согласованного продолжения мер возможности и необходимости. Доказано существование продолжения обобщенного отрицания и согласованного продолжения меры возможности и необходимости с алгебры множеств на минимальную сигма-алгебру.

The existence of the consistent extension of measures of the possibility and the necessity is considered. The existence of the continuation of the generalised k-additive negation and of the coordinated continuation of the measure of the possibility and necessity from the set algebra to the minimal sigma-algebra is proved.

Розглянуто існування узгодженого продовження мір можливості і необхідності. Доведено існування продовження узагальненого заперечення та узгодженого продовження міри можливості і необхідності з алгебри множин на мінімальну сигма-алгебру.

Введение. Теория возможностей, предложенная Л. Заде [1], – удобный математический формализм для описания субъективных суждений и неопределенной неточной информации. В дальнейшем эту теорию развивали разные школы математиков, отметим [1–3].Один из фундаментальных результатов теории возможностей – теорема о продолжении меры возможности из одного класса событий на более широкий класс событий. Дуальной к ней является теорема о продолжении меры необходимости. В то же время можно считать, что возможность и необходимость связаны соотношением типа «отрицание возможности дополнения события является утверждением о необходимости события». В связи с этим возникает необходимость в исследовании условий существования продолжения пары подобным образом связанных мер возможности и необходимости.

Цель статьи – получение условий существования согласованного продолжения мер возможности и необходимости из алгебры событий на порожденную ею сигма-алгебру.

Основной результат

Пусть X – не пустое множество (элементарные события), **A** – класс подмножеств X, который содержит $\varnothing$, X (составные события).

Пусть κ обозначает кардинальное число и $\kappa \ge \aleph_0$.

Ключевые слова: нечеткая логика, теория возможностей, мера возможности, мера необходимости, κ-аддитивное продолжение мер.

Введем некоторые определения.

Определение 1. κ-аддитивная мера возможности на **A** определяется как функция $P:\mathbf{A}\to L$, удовлетворяющая условию

$$P\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)=\sup_{t\in T} P\left(A_t\right),$$

если $\{A_t \mid t\in T\}$ – семейство множеств из **A** такие, что $|T|\le\kappa$, $\bigcup_{t\in T} A_t\in\mathbf{A}$.

Определение 2. κ-внешняя мера возможности, построенная по κ-аддитивной мере возможности P на **A**, определяется равенством

$$\forall B\in 2^X : P^*(B)=\inf_{\{E_t \mid t\in T\}}\sup_{t\in T} P(E_t),$$

где инфимум берется по системам $\{E_t \mid t\in T\}$ подмножеств **A**, для которых $|T|\le\kappa$ и $\bigcup_{t\in T} A_t\supseteq B$.

Определение 3. κ-мультипликативная мера необходимости на **A** определяется как функция $N:\mathbf{A}\to L$, которая удовлетворяет условию

$$N\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)=\inf_{t\in T} N(A_t),$$

если $\{A_t \mid t\in T\}$ – семейство множеств из **A** такие, что $|T|\le\kappa$, $\bigcap_{t\in T} A_t\in\mathbf{A}$.

Определение 4. κ-внутренняя мера необходимости, построенная по κ-мультипликативной мере необходимости N на **A,** определяется равенством

$$\forall B\in 2^X : N_*(B)=\sup_{\{E_t \mid t\in T\}}\inf_{t\in T} N(E_t),$$

где супремум берется по системам $\{E_t \mid t \in T\}$ подмножеств **A**, для которых $|T| \leq \kappa$ и $\bigcap_{t\in T} A_t \subseteq B$.

Определение 5. к-обобщенное отрицание на **A** определяется как функция $\theta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, которая удовлетворяет условиям:

- если $\{A_t \mid t \in T\}$ – семейство множеств из **A**, $|T| \leq \kappa$, $\bigcup_{t\in T} A_t \in \mathbf{A}$, то $\bigcap_{t\in T} \theta(A_t) \in \mathbf{A}$ и выполняется равенство $\theta\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) = \bigcap_{t\in T} \theta(A_t)$.
- $\forall A \in \mathbf{A} : \theta(\theta(A)) = A$.

Определение 6. Мера возможности P называется нормированной, если $P(X) = 1,\ P(\varnothing) = 0$. Мера необходимости N называется нормированной, если $N(X) = 1,\ N(\varnothing) = 0$.

В дальнейшем все меры возможности и необходимости будут считаться нормированными.

Определение 7. P-моделью теории возможностей назовем тройку $(X, \mathbf{A}, P)$, где P – к-аддитивная мера возможности на **A** для некоторого $\kappa \geq \aleph_0$.

Определение 8. PN-моделью теории возможностей назовем четверку $(X, \mathbf{A}, P, N)$, где P является к-аддитивной мерой возможности на **A**, N – к-мультипликативной мерой необходимости на A для некоторого $\kappa \geq \aleph_0$.

Определение 9. PN-модель называется согласованной, если существует обобщенное отрицание θ и непрерывная убывающая биекция $\theta_L^N : [0,1] \to [0,1]$ такие, что $\forall A \in \mathbf{A} : P(\theta(A)) = \theta_L^N(N(A))$.

Согласованная PN-модель сопоставляет каждому событию значения возможности и необходимости, причем эти значения связаны с помощью обобщенного отрицания.

Отрицание не всегда является дополнением. P-модель предоставляет формализацию лишь понятию возможности и может рассматриваться как упрощение PN-модели.

Обозначим буквой **A** класс подмножеств X, замкнутый относительно конечных объединений и пересечений, содержащий $\varnothing$ и X.

Введем обозначения:

$$\mathrm{O}_A = \{\{E_t\} : E_t \in \mathbf{A},\ t \in T,\ A \subseteq \bigcup_{t\in T} E_t\},$$

$$\mathrm{O}_B = \{\{E_t\} : E_t \in \mathbf{A},\ t \in T,\ B \subseteq \bigcup_{t\in T} E_t\}.$$

Лемма 1**.** Внешняя мера возможности $P^*(\cdot)$ – монотонная, т.е. для $\forall A, B \subseteq X$ таких, что $A \subseteq B$ будем иметь $P^*(A) \leq P^*(B)$.

Доказательство. Множества O_A, O_B являются множествами внешних покрытий A и B соответственно. Тогда $O_A \supseteq O_B$. Отсюда следует, что $P^*(A) \leq P^*(B)$.

Лемма 2**.** Если P – κ-мера возможности на **A**, P^* – κ-внешняя мера возможности, построенная по P, то для произвольного множества $A \in \mathbf{B}$ выполняется $P^*(A) = P(A)$.

Доказательство. Выберем семейство $\{E_t\}$ таким образом, чтобы $T = \{1\}$, $E_1 = A$. Получим, что $A = \bigcup_{t\in T} E_t$, и соответственно, $\inf_{\{E_t\}\in O_A} \sup_{t\in T} P(E_t) \leq P(A)$.

Таким образом $P^*(A) \leq P(A)$.

По определению точной нижней грани для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \{E_t\}, t \in T : E_t \in \mathbf{A}$ такое, что

$$\sup_{t\in T} P(E_t) = P(\bigcup_{t\in T} E_t) < P^*(A) + \varepsilon.$$

Поскольку $A = A \cap (\bigcup_{t\in T} E_t) = \bigcup_{t\in T} (A \cap E_t)$, тогда $P(A) = P(\bigcup_{t\in T} (A \cap E_t)) = \sup_{t\in T} P(A \bigcap E_t) \leq \leq \sup_{t\in T} P(E_t)$, при $A \in \mathbf{A}$.

Теорема 1. Пусть P – к-аддитивная мера возможности на **A**, P^* – к-внешняя мера возможности, построенная по мере возможности P. Тогда P^* – к-аддитивная мера возможности на булеане X, являющаяся продолжением меры P.

Доказательство. P^* – продолжение P по лемме 2. Покажем к-аддитивность P^* на булеане X, т.е. покажем выполнение равенства $P^*(\bigcup_{t\in T} A_t) = \sup_{t\in T} P^*(A_t)$ для $|T| \leq \kappa, \forall t \in \in T : A_t \subseteq X$.

Сначала докажем выполнение неравенства

$$P^*(\bigcup_{t\in T} A_t) \le \sup_{t\in T} P^*(A_t).$$

Для множества $\bigcup_{t\in T} A_t$ имеем

$$P^*(\bigcup_{t\in T} A_t) = \inf_{\{E_{t\in T}\}} \sup_{t\in T} P(A_t).$$

Соответственно, для каждого из множеств A_t выполняется

$$P^*(A_t) = \inf_{\{E_{tp}\}\in O_{A_t}} \sup_{p\in T}(E_{tp}) \cdot \qquad (1)$$

Семейство множеств $\{E_{jk}\}$ является одним из внешних покрытий множества $\bigcup_{t\in T} A_t$, причем его мощность не превышает $\kappa^2 = \kappa$. Так как нижняя грань множества не больше любого его члена, то выполняется неравенство:

$$P^*(\bigcup_{t\in T} A_t) = \inf_{\{E_{t\in T}\}} \sup_{t\in T} P(A_t) \le$$
$$\le \sup_{\substack{t\in T\\ p\in T}} P(E_{tp}) = \sup_{t\in T}\sup_{p\in T} P(E_{tp}). \qquad (2)$$

Из (1) следует, что для каждого $t \in T$ можно подобрать такое внешнее покрытие $\{E_{tp}\}_{p\in T}$, для которого выполняется $P^*(A_t) \ge \sup_{p\in T} P(E_{tp}) - \varepsilon$. Подставив это выражение в (2), получаем, что $P^*\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) \le \sup_{t\in T} P^*(A_t) + \varepsilon$. Однако ε может быть как угодно малым положительным числом, очевидно, тогда

$$P^*\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) \le \sup_{t\in T} P^*(A_t).$$

Докажем неравенство:

$$P^*(\bigcup_{t\in T} A_t) \ge \sup_{t\in T} P^*(A_t). \qquad (3)$$

Из монотонности κ-внешней возможности и включения $\forall s \in T \ \bigcup_{t\in T} A_t \supseteq A_s$ следует, что $P^*\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) \ge P^*(A_s)$, откуда, переходя к супремуму, получим неравенство (3).

Таким образом, $P^*\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) = \sup_{t\in T} P^*(A_t)$. Итак, $P^*(\cdot)$ – по определению, мера возможности, что и доказывает теорему.

Следствие. Пусть P – κ-аддитивная мера возможности на $\mathbf{A}$; $\mathbf{B}$ – класс подмножеств X такой, что $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$; P^* – κ-внешняя мера возможности, построенная по мере возможности P. Тогда $P^*\big|_{\mathbf{B}}$ – κ-аддитивная мера возможности на $\mathbf{B}$, которая является продолжением меры P. В дальнейшем будем её называть *стандартным* κ-*продолжением* P из $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$.

Аналогично можно доказать продолжаемость меры необходимости.

Теорема 2. Пусть N – κ-мультипликативная мера необходимости на $\mathbf{A}$, N_* – κ-внутренняя мера необходимости, построенная по N. Тогда N_* – κ-мультипликативная мера необходимости на булеане X, которая является продолжением N.

Следствие. Пусть N – κ-мультипликативная мера необходимости на $\mathbf{A}$; $\mathbf{B}$ – класс подмножеств X такой, что $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. N_* – κ-внутренняя мера необходимости, построенная по N. Тогда $N_*\big|_{\mathbf{B}}$ – κ-мультипликативная мера необходимости на $\mathbf{B}$, являющаяся продолжением N. В дальнейшем будем называть ее *стандартным* κ*-продолжением* N из $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$.

Лемма 3 (Транзитивность продолжений). Пусть P – κ-аддитивная мера возможности на $\mathbf{A}$; $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ – классы подмножеств X, замкнутые относительно конечных объединений и пересечений, для которых выполняется $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$ и пусть Q – стандартное κ-продолжение P из $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$, R – стандартное κ-продолжение Q из $\mathbf{B}$ на $\mathbf{C}$, H – стандартное κ-продолжение P из $\mathbf{A}$ на $\mathbf{C}$. Тогда $H = R$.

Доказательство. Будем обозначать через E_t подмножества $\mathbf{A}$, F_t – подмножества $\mathbf{B}$. Пусть $A \in \mathbf{C}$:

$$R(A)=\inf\{\sup_{t\in T}Q(F_t)\,|\,\left|\{F_t,t\in T\}\right|\le\kappa,\bigcup_{t\in T}F_t\supseteq A\}=$$
$$=\inf_{\{F_t,t\in T\}:\bigcup F_t\supseteq A}\ \sup_{t\in T}P^*(F_t)\ .$$

По теореме о продолжении и из монотонности внешней меры имеем

$$R(A)=\inf_{\{F_t,t\in T\}:\bigcup F_t\supseteq A}P^*\left(\bigcup_{t\in T}F_t\right)\ge P^*(A)=H(A)\ .$$

С другой стороны, учитывая, что $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$, получаем:

$$R(A)=\inf_{\{F_t,t\in T\}:\bigcup F_t\supseteq A}\ \sup_{t\in T}Q(F_t)\le$$
$$\le\inf_{\{E_t,t\in T\}:\bigcup E_t\supseteq A}\ \sup_{t\in T}Q(E_t)\ =$$
$$=\inf_{\{E_t,t\in T\}:\bigcup E_t\supseteq A}\ \sup_{t\in T}P(E_t)=H(A)\ .$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $\mathbf{B}$ – класс подмножеств X, замкнутый относительно κ-объединений и пересечений (как и $\mathbf{A}$) $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$. Пусть на $\mathbf{A}$ задано κ-аддитивную меру возможности P, κ-мультипликативную меру необходимости N и κ-обобщенное отрицание θ. Пусть существует продолжение θ до κ-обобщенного отрицания θ_1 на $\mathbf{B}$ и существует функция $\theta_L^N:L\to L$ – непрерывная и строго убывающая биекция, такая, что $\forall A\in\mathbf{A}:P(\theta(A))=\theta_L^N(N(A))$. Пусть P_1, N_1 – стандартные κ-продолжения соответственно P и N из $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$. Тогда $\forall A\in\mathbf{B}$: $P_1(\theta_1(A))=$ $=\theta_L^N(N_1(A))$.

Доказательство. Имеем

$$\theta_L^N(N_1(\theta_1(A)))=$$
$$=\theta_L^N\left(\sup_{\{E_t,t\in T\}:\bigcap E_t\subseteq\theta_1(A)}\ \inf_{t\in T}N(E_t)\right)=$$
$$=\inf_{\{E_t,t\in T\}:\bigcap E_t\subseteq\theta_1(A)}\ \sup_{t\in T}\theta_L^N(N(E_t))\ =$$
$$=\inf_{\{E_t,t\in T\}:\bigcup\theta_1(E_t)\supseteq A}\ \sup_{t\in T}\theta_L^N(N(E_t))=(\text{замена}$$
$$F_t=\theta(E_t)\,)=\inf_{\{F_t,t\in T\}:\bigcup F_t\supseteq A}\ \sup_{t\in T}\theta_L^N(N(\theta(F_t)))\ =$$
$$=\inf_{\{F_t,t\in T\}:\bigcup F_t\supseteq A}\ \sup_{t\in T}P(F_t)=P_1(A)\ .$$

Лемма доказана.

Согласно лемме 4, для существования согласованного продолжения мер возможности и необходимости, достаточно существования продолжения обобщенного отрицания. Исследуем условия возможности такого продолжения.

Назовем $\aleph_0$–обобщенное отрицание для удобства σ-обобщенным отрицанием.

Лемма 5. Пусть $\mathbf{A}$ – алгебра подмножеств X. Функция $\theta:\mathbf{A}\to\mathbf{A}$ является σ-обобщенным отрицанием на $\mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда функция $\varphi=\neg\theta$ удовлетворяет условиям:

- $\forall A,B\in\mathbf{A}$: $\varphi(\varnothing)=\varnothing$, $\varphi(\neg A)=\neg\varphi(A)$; $\varphi(A\cup B)=\varphi(A)\cup\varphi(B)$;
- $\forall A\in\mathbf{A}$ $\varphi(\varphi(A))=A$;
- $\lim\varphi(A_n)=\varphi(A)$ для произвольной последовательности $A_n\in\mathbf{A}$ такой, что $\lim A_n=A\in\mathbf{A}$.

Доказательство. Докажем необходимость.

$$\forall A,B\in\mathbf{A}:\theta(\theta(A)\cup\theta(B))=\theta(\theta(A))\cap\theta(\theta(B))=$$
$$=A\cap B\Rightarrow\theta(A\cap B)=\theta(A)\cup\theta(B),$$
$$\varphi(A\cup B)=\neg\theta(A\cup B)=\neg(\theta(A)\cap\theta(B))=$$
$$=\neg(\neg\varphi(A)\cap\neg\varphi(B))=\varphi(A)\cup\varphi(B),$$
$$\varphi(A\cap B)=\neg\theta(A\cap B)=\neg(\theta(A)\cup\theta(B))=$$
$$=\neg(\neg\varphi(A)\cup\neg\varphi(B))=\varphi(A)\cap\varphi(B).$$

Тогда

$$A\subseteq B\Rightarrow\theta(B)=\theta(A\cup B)=$$
$$\theta(A)\cap\theta(B)\Rightarrow\theta(A)\supseteq\theta(B);$$
$$\varnothing\subseteq\theta(X)\Rightarrow\theta(\varnothing)\supseteq\theta(\theta(X))=$$
$$=X\Rightarrow\theta(\varnothing)=X\Rightarrow\varphi(\varnothing)=\varnothing;$$
$$X\supseteq\theta(\varnothing)\Rightarrow\theta(X)\subseteq\theta(\theta(\varnothing))=$$
$$=\varnothing\Rightarrow\theta(X)=\varnothing\Rightarrow\varphi(X)=X;$$
$$\left.\begin{array}{l}\varphi(A)\cup\varphi(\neg A)=\varphi(X)=X=\neg(\neg\varphi(A)\setminus\varphi(\neg A))\\ \varphi(A)\cap\varphi(\neg A)=\varphi(\varnothing)=\varnothing=\varphi(\neg A)\setminus\neg\varphi(A)\end{array}\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\varphi(\neg A)=\neg\varphi(A).$$

Таким образом, выполняется первое свойство. Второе следует из равенства

$$\varphi(\varphi(A))=\varphi(\neg\theta(A))=\neg\varphi(\theta(A))=\theta(\theta(A))=A\ .$$

Пусть $C_n\in\mathbf{A}$, $\lim C_n=\varnothing$. Тогда для произвольной подпоследовательности C_{n_k} такой, что $\bigcap_{k\ge1}C_{n_k}=\varnothing$, имеем:

$$\varphi\left(\bigcap_{k\geq1}C_{n_k}\right)=\neg\theta\left(\bigcap_{k\geq1}C_{n_k}\right)=$$
$$=\neg\bigcup_{k\geq1}\theta(C_{n_k})=\bigcap_{k\geq1}\varphi(C_{n_k})=\varnothing,$$

т.е. нет точек, которые бы принадлежали бесконечно многим множествам последовательности $\varphi(C_n)$. Отсюда следует, что $\lim\varphi(C_n)=\varnothing$.

Пусть $\lim A_n = A$, $A, A_n \in \mathbf{A}$. Тогда $\lim(A_n \setminus A) = = \lim(A \setminus A_n) = \varnothing$, и поэтому $\lim\varphi(A_n \setminus A) = == \lim\varphi(A \setminus A_n) = \varnothing$. Тогда последовательность

$$\varphi(A_n \setminus A)\cup\varphi(A)\setminus\varphi(A\setminus A_n)=$$
$$=\varphi((A_n\setminus A)\cup A\setminus(A\setminus A_n))=$$
$$=\varphi(A_n\setminus A\cup A_nA)=\varphi(A_n)=$$
$$=\varphi((A_n\setminus A)\cup A\setminus(A\setminus A_n))=$$
$$=\varphi(A_n\setminus A\cup A_nA)=\varphi(A_n)$$

является сходящейся и $\lim\varphi(A_n)=\varphi(A)$. **Необходимость доказана**.

Докажем достаточность. Пусть $A, B \in \mathbf{A}$. Тогда

$$\theta(A\cup B)=\neg\varphi(A\cup B)=$$
$$=\neg(\varphi(A)\cup\varphi(B))=\theta(A)\cap\theta(B).$$

Пусть A_n – последовательность элементов **A** и $A=\bigcup_{n\geq1}A_n\in\mathbf{A}$.

Тогда $B_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ – тоже последовательность элементов **A**.

Однако $\lim B_n = A$, из чего следует

$$\varphi(A)=\lim\varphi(B_n)=\lim\varphi\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=$$
$$=\lim\bigcup_{k=1}^{n}\varphi(A_k)=\bigcup_{n\geq1}\varphi(A_n).$$

Поэтому

$$\bigcap_{n\geq1}\theta(A_n)=\bigcap_{n\geq1}\neg\varphi(A_n)=\neg\bigcup_{n\geq1}\varphi(A_n)=\neg\varphi(A)=\theta(A).$$

Таким образом, для θ выполняется первое условие из определения обобщенного отрицания. Инволютивность θ следует из равенства $\theta(\theta(A))=\neg\varphi(\theta(A))=\varphi(\neg\theta(A))=\varphi(\varphi(A))=A$.

Лемма доказана.

Лемма 6**.** Пусть θ является σ-обобщенным отрицанием на алгебре множеств **A** и $\varphi=\neg\theta$. Тогда система множеств $\mathbf{B}=\{\lim A_n \mid (A_n)$ –сходящаяся последовательность элементов $\mathbf{A}\}$, является алгеброй множеств и существует продолжение θ до σ-обобщенного отрицания θ_1 на **B**.

Доказательство. Обозначим последовательности элементов **A** как A_n, B_n. Тогда из того, что $A_0=\lim A_n\in\mathbf{A}$, $B_0=\lim B_n\in\mathbf{B}$ следует, что $A_0\cup B_0=\lim(A_n\cup B_n)\in\mathbf{B}$, $\neg A_0=\lim(\neg A_n)\in\mathbf{B}$, $X\in\mathbf{B}$ и, таким образом, **B** является алгеброй множеств (расширением **A**).

Пусть $\exists\lim A_n=\lim B_n$. По предыдущей лемме, последовательности $\varphi(A_n)$ и $\varphi(B_n)$ сходятся и $\lim\varphi(A_n)=\lim\varphi(B_n)$.

Таким образом, функция φ_1, определенная как $\varphi_1(\lim A_n)=\lim\varphi(A_n)$, является определенной на **B,** причем φ_1 – продолжение φ, поскольку $\varphi_1(\lim A)=\lim\varphi(A)=\varphi(A), A\in\mathbf{A}$.

Покажем, что она является дополнением σ-обобщенного отрицания, т.е. удовлетворяет условиям леммы 5. Имеем:

- $\varphi_1(\lim A_n\cup\lim B_n)=\varphi_1(\lim(A_n\cup B_n))=$
$$=\lim(\varphi(A_n)\cup\varphi(B_n))=$$
$$=\lim\varphi(A_n)\cup\lim\varphi(B_n)=\varphi_1(\lim A_n)\cup\varphi_1(\lim B_n);$$
- $\varphi_1(\neg\lim A_n)=\varphi_1(\lim\neg A_n)=\lim\varphi(\neg A_n)=$
$$=\neg\lim\varphi(A_n)=\neg\varphi_1(\lim A_n);$$
- $\varphi_1(\varphi_1(\lim A_n))=\varphi_1(\lim\varphi(A_n))=$
$$=\lim\varphi(\varphi(A_n))=\lim A_n;$$
- пусть $C_{m,n}$ – элементы **A**, $\lim\limits_m\lim\limits_n C_{m,n}=\varnothing$,

и предположим, что $\exists z\in\overline{\lim\limits_m}\lim\limits_n\varphi(C_{m,n})$.

Тогда существует последовательность индексов m_k такая, что для всех k выполняется $z\in\lim\limits_n\varphi(C_{m_k,n})$. Отсюда следует, что существует последовательность N_k такая, что для $n\geq N_k$ выполняется $z\in\varphi(C_{m_k,n})$, а поэтому $z\in\bigcap_{k\geq1,n\geq N_k}\varphi(C_{m_k,n})$ – счетное пересечение, откуда

$\bigcap\limits_{k\ge 1, n\ge N_k} C_{m_k,n} \ne \varnothing$ и получили, что $\exists t: \forall k(n \ge N_k \Rightarrow \Rightarrow t \in C_{m_k,n})$. Отсюда следует, что $\forall k\, t \in \in \underline{\lim\limits_n} C_{m_k,n}$, учитывая, что последовательность $C_{m_k,n}$ является сходящейся для произвольного k, получаем, что для всех $\forall k$ имеет место $t \in \lim\limits_n C_{m_k,n}$, т.е. получили противоречие $\overline{\lim\limits_m} \lim\limits_n C_{m,n} = \lim\limits_m \lim\limits_n C_{m,n} \ne \varnothing$.

Таким образом, выполняется

$\lim\limits_m \lim\limits_n \varphi(C_{m,n}) = \varnothing$.

Рассмотрим $A_{m,n}, C_p$ – элементы **A** такие, что $\lim\limits_m \lim\limits_n A_{m,n} = \lim C_m$. Тогда

$$\lim_m \lim_n \varphi(A_{m,n}) =$$
$$= \lim_m \lim_n \varphi((A_{m,n} \setminus C_m) \cup C_m \setminus (C_m \setminus A_{m,n})) =$$
$$= \lim_m \lim_n (\varphi(A_{m,n} \setminus C_m) \cup \varphi(C_m) \setminus \varphi(C_m \setminus A_{m,n})).$$

Поскольку

$$\lim_m \lim_n (A_{m,n} \setminus C_m) = \lim_m \lim_n (C_m \setminus A_{m,n}) = \varnothing,$$

исходя из доказанного, получаем

$$\lim_m \lim_n \varphi(A_{m,n} \setminus C_m) = \lim_m \lim_n \varphi(C_m \setminus A_{m,n}) = \varnothing.$$

Тогда выполняется

$$\lim_m \lim_n (\varphi(A_{m,n} \setminus C_m) \cup \varphi(C_m) \setminus \varphi(C_m \setminus A_{m,n})) =$$
$$= \lim_m \lim_n \varphi(A_{m,n} \setminus C_m) \cup$$
$$\cup \lim \varphi(C_m) \setminus \lim_m \lim_n \varphi(C_m \setminus A_{m,n}) = \lim \varphi(C_m).$$

Из последнего свойства и следует непрерывность φ_1.

Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть на алгебре множеств **A** задано σ-обобщенное отрицание θ. Тогда существует продолжение θ до σ-обобщенного отрицания θ^* на **S** – σ-алгебру, порожденную алгеброй **A**.

Доказательство (По трансфинитной индукции). Пусть *On* – класс порядковых чисел. Определим функцию $\mathbf{A}(\cdot): On \to 2^X$ следующим образом:

- $\mathbf{A}(0) = \mathbf{A}$;
- для $\gamma > 0$ положим $\mathbf{A}(\gamma)$ – расширение $\mathbf{A}(\gamma_0)$, построенное как в лемме 5, если γ имеет предшественника γ_0;
- $\mathbf{A}(\gamma) = \bigcup\limits_{\nu<\gamma} \mathbf{A}(\nu)$, если γ не имеет предшественника.

Заметим, что $\alpha \le \beta \Rightarrow \mathbf{A}(\alpha) \subseteq \mathbf{A}(\beta)$ и $\forall\alpha$ $\mathbf{A}(\alpha)$ является алгеброй подмножеств X.

Поскольку X является множеством, то $\exists \alpha^* < \beta^*: \mathbf{A}(\alpha^*) = \mathbf{A}(\beta^*) \Rightarrow \mathbf{A}(\alpha^*) = \mathbf{A}(\alpha^*+1)$, т.е. $\mathbf{A}(\alpha^*)$ замкнута относительно взятия предела последовательности, а поскольку она содержит **A**, то содержит и монотонный класс, порожденный **A,** и соответственно σ-алгебру, порожденную **A**.

Определим продолжение θ_γ функции θ на каждую алгебру $\mathbf{A}(\gamma)$.

Для $\gamma = 0$ положим $\theta_0 = \theta$.

Предположим, что $\forall \nu < \gamma$ определено θ_ν. Тогда:

- если γ имеет предшественника γ_0, то определим θ_γ как продолжение θ_{γ_0}, построенное в лемме 5.
- если γ не имеет предшественника, то на заданном множестве $A \in \mathbf{A}(\gamma)$ таком, что $A \in \mathbf{A}(\nu)$, $\nu < \gamma$, определим $\theta_\gamma(A) = \theta_\nu(A)$. Очевидно $\theta_\gamma(A)$ определена однозначно.

Таким образом, искомое продолжение существует.

Теорема доказана.

Структуру полностью аддитивного обобщенного отрицания описывает следующая теорема (в предположении справедливости аксиомы выбора).

Теорема 4. Пусть φ – полностью аддитивная инволюция на булеане X, $|X|>1$.

Тогда существует разбиение X на множества M, N, K и биекция $f: M \to N$ такая, что

$$\forall A \subseteq X: \varphi(A) = (A \cap K) \cup$$
$$\cup f(A \cap M) \cup f^{-1}(A \cap N).$$

Доказательство. Пусть $S = \{\{z\} \mid z \in X\}$, $S_1 = \varphi^{-1}(S)$. Так как $|X| > 1$, то $\varnothing \notin S_1$. Возьмем $A \in S_1 : \varphi(A) = \bigcup_{t \in A} \varphi(\{t\}) = \{z\}$ для некоторого $z \in A$. Если $|A| > 1$, то среди $\varphi(\{t\})$ есть одинаковые, что противоречит биективности φ, поэтому $A \in S$ и $S_1 \subseteq S$. Поскольку $\varphi \equiv \varphi^{-1}$, то $S = S_1$ и сужение φ на S является биекцией.

Согласно аксиоме выбора, возьмем из каждого множества класса $\{\{x, y\} \mid x, y \in X, x \neq y, \varphi(\{x\}) = \{y\}\}$ по элементу и образуем множество *M*; положим $N = X \setminus K \setminus M$, $f(z) = \varphi(\{z\})$. Тогда

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap K) \cup \varphi(A \cap M) \cup \varphi(A \cap N) =$$
$$= (A \cap K) \cup f(A \cap M) \cup f^{-1}(A \cap N).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим *PN* – модель $(X, \mathbf{A}, P, N)$, где **A** – алгебра множеств. Пусть **B** – алгебра множеств, которая является расширением **A**.

Определение 10. Если меры *P* и *N* согласованы посредством обобщенного отрицания θ, то пару функций P_1, N_1 назовем *согласованным продолжением* мер *P* и *N* из **A** на **B**, если P_1 – продолжение *P* до меры возможности на **B**, N_1 – продолжение *N* до меры необходимости на **B** и, кроме того, существует продолжение θ до обобщенного отрицания θ_1 на **B** такое, что меры P_1 и N_1 – согласованы обобщенным отрицанием θ_1.

Теорема 5. Пусть на алгебре множеств **A** задано κ-аддитивную меру возможности *P* и κ-мультипликативную меру необходимости *N*, которые согласованы κ-обобщенным отрицанием θ. Тогда существует согласованное κ-аддитивное продолжение мер *P* и *N* из **A** на σ-алгебру, порожденную алгеброй **A**.

Доказательство. Поскольку $\kappa \geq \aleph_0$, то по теореме 3 существует продолжение обобщенного отрицания θ до обобщенного отрицания θ^* на σ-алгебру, порожденную алгеброй **A**.

Далее существование согласованного продолжения мер *P* и *N* на σ-алгебру, порожденную алгеброй **A**, следует непосредственно из леммы 4.

Теорема доказана.

Заключение. В статье изучен вопрос существования согласованного продолжения мер возможности и необходимости из алгебры событий на порожденную ею сигма-алгебру. Доказано (теорема 5), что κ-аддитивное согласованное продолжение κ-аддитивных мер существует для произвольного кардинального числа $\kappa \geq \aleph_0$.

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований; проект № Ф.28.1/003.

1. *Пытьев Ю.П.* Возможность. Элементы теории и применение – М.: УРСС, 2000, – 190 с.
2. Бичков О.С., *Колесніков К.С.* Побудова (*PN*)-моделі теорії можливостей // Вісник Київського університету, Сер.: фіз.-мат. науки. – 2007. – № 1. – С. 134–138.
3. *Бычков А.С.* Об одном развитии теории возможностей // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 5. – С. 67–72.
4. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. – 1978. – N 1. – P. 3–28.
5. *Дюбуа Д.*, *Прад А.* Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.

Поступила 02.03.2009

Тел. для справок: (044) 259-0530, 450-3212, 463-8760, (Киев)
E-mail: *bychkovtk@gmail.com*; *ivanov.eugen@gmail.com*