УДК 519.14+519.168

Н.К. Тимофієва

Лінійне цілочислове програмування та задачі комбінаторної оптимізації

Показано, что использование целочисленного линейного программирования для моделирования задач комбинаторной оптимизации не отражает их комбинаторной природы. Использование комбинаторных методов позволяет разрабатывать адекватные математические постановки этих задач. Доказано, что целевая функция в них зависит как от одной, так и от нескольких переменных, которыми являются комбинаторные конфигурации разных типов.

It is shown that the use of the integer linear programming for the modeling of problems of combinatory optimization does not display their combinatorial nature. The use of combinatorial methods allows to develop adequate mathematical statements of these problems. It is shown, that an objective function in the problems of combinatorial optimization can depend on one variable as well as on several variables which are combinatorial configurations of different types.

Показано, що використання цілочислового лінійного програмування для моделювання задач комбінаторної оптимізації не відтворює їхньої комбінаторної природи. Використання комбінаторних методів дозволяє розробляти адекватні математичні постановки цих задач. Доведено, що цільова функція в них залежить як від однієї, так і від кількох змінних, якими є комбінаторні конфігурації різних типів.

Вступ. Вибір ефективних способів розв'язання прикладних задач залежить від адекватно розробленої математичної моделі певної задачі. Для розробки математичних моделей задач комбінаторної оптимізації часто використовують цілочислове лінійне програмування. Ця задача полягає у знаходженні оптимального значення цільової функції на множині, яка задається системою лінійних рівнянь і нерівностей, причому на змінні накладаються умови цілочисельності [1–3]. У задачах комбінаторної оптимізації оптимальне значення цільової функції знаходиться на множині комбінаторного характеру. Із цих двох тверджень випливає, що задача цілочислового лінійного програмування полягає в знаходженні множини змінних, для якої досягається оптимальний розв’язок, і яка не є комбінаторною конфігурацією. В цьому разі вважають, що цільова функція залежить від багатьох змінних [3]. В комбінаторній оптимізації, як буде показано далі, цільова функція залежить як від однієї змінної, так і від кількох, якими є комбінаторні конфігурації різних типів, а змінні в моделі цілочислового лінійного програмування є вхідними даними.

В математичній літературі ще в 70-х роках минулого століття переважно вченими Радянського Союзу формальні постановки задач комбінаторної оптимізації розроблялися також і з урахуванням їхньої комбінаторної природи [4–8]. В цих постановках цільова функція залежить від однієї змінної, якою є комбінаторна конфігурація певного типу.

Задача комбінаторної оптимізації і математична модель лінійного цілочислового програмування

Задачі комбінаторної оптимізації, як правило, задаються на одній або кількох множинах, наприклад A і B, елементи яких мають будь-яку природу. Для багатьох задач кожну з цих множин можна подати у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{il} \in R$, яке називають *вагою* ребра; R – множина дійсних чисел. Для зручності вважатимемо, що між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких названо вагами і які задаються матрицями. Ці величини визначають значення цільової функції. Назвемо їх *вхідними* даними.

У загальному вигляді задача комбінаторної оптимізації формулюється так. Із елементів однієї із заданих множин, наприклад $a_i \in A$, $i \in (1, \dots$ $\dots, n)$, утворюється комбінаторна множина W – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент w^* множини W, для якого цільова функція $F(w)$ набуває екстремаль-

[*] **Ключові слова**: комбінаторна оптимізація, цільова функція, комбінаторна конфігурація, гібридні алгоритми, розпізнавання мовних сигналів.

ного значення при виконанні заданих обмежень, тобто $F(w^*) = \text{glob} \underset{w \in W^0 \subset W}{\text{extr}} F(w)$, де extr = = {min, max}, W^0 – підмножина, яка визначається обмеженнями задачі.

Математична модель задачі цілочислового лінійного програмування формулюється у такому вигляді. Знайти екстремум функції $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ за умов $\sum_{i=1}^{n} a_{il} x_i = b_l$, $l = \overline{1, m}$, $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, x_i – цілі для $i = \overline{1, p}$, $p \leq n$, де c_i, a_{il}, b_l – задані цілі числа, x_i – змінні.

Виходячи з цієї моделі вважають, що цільова функція в комбінаторній оптимізації залежить від багатьох змінних [3], а x_i є елементами комбінаторних конфігурацій $w = (w_1, \ldots, w_n)$, які перемножуються на задані числа c_i, a_{il}. Але це неможливо, оскільки w_i можуть мати будь-яку природу. Змінні x_i не є елементами w, а модель цілочислового лінійного програмування не відображає суті задач комбінаторної оптимізації. Цілочислове лінійне програмування розроблялося для економічних задач, для яких математична постановка формулюється так: задано одну множину A, елементи $a_i \in A$ якої не мають між собою зв'язків. Натомість кожен елемент $a_i \in A$, $i \in (1, \ldots, n)$, характеризується певною властивістю (вагою) x_i. Аргументом цільової функції у них, як правило, є вибірки (сполучення, розміщення), а вхідні дані – послідовність значень ваг $x_1, \ldots, x_n$ елементів a_i заданої множини A, кількість яких збігається з кількістю елементів у w. Звідси твердження, що аргументом цільової функції в цих задачах є послідовність вхідних даних $x_1, \ldots, x_n$, а не комбінаторна конфігурація $w = (w_1, \ldots, w_n)$. Відповідно вважають, що цільова функція в задачах комбінаторної оптимізації залежить від багатьох змінних. Послідовність $x_1, \ldots, x_n$ є вхідними даними певної задачі, а значення x_i неявно залежить від комбінаторної конфігурації w, тобто вираз $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ можна записати у такому вигляді: $F(w) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(w)$. Тоді постає проблема визначення цієї залежності в задачах комбінаторної оптимізації. Для цього необхідно розробляти формальні постановки цих задач з урахуванням їхньої комбінаторної природи [9].

Моделювання прикладних задач з використанням теорії комбінаторної оптимізації

На розглядуваних далі прикладах показано, що цільова функція для різних задач комбінаторної оптимізації залежить як від однієї змінної, так і від кількох, якими є різні типи комбінаторних конфігурацій, а не елементи послідовності, якою задаються вхідні дані.

Задача про сівозміну з агротехнічної системи описана в [10]. Задано m культур і n полів. Відомо, які культури були висаджені на кожному з полів у поточному році (тобто, для кожної культури відомі культури-попередники). На кожному полі може висіватися лише одна культура. При побудові сівозміни на наступний та інші роки необхідно ураховувати рекомендації щодо їхнього чергування, передбачити різні природно-кліматичні і погодні умови, що дозволяє одержати оптимальний урожай певних культур.

У цій задачі задано три базових множини: множина A, елементи якої відповідають певній культурі; множина B, елементи якої відповідають певному полю; множина параметрів P, що характеризують кліматичні та погодні умови. З елементів множини A (або B) утворюємо множину перестановок Ω. Варіант призначення l-ї культури на i-е поле залежить від перестановки $\omega \in \Omega$. Із елементів множини P утворимо множину сполучень без повторень M. Варіант вибору певних кліматичних та погодних умов для заданої перестановки ω^* є сполучення без повторень $\mu \in M$. Запишемо функціонал для цієї задачі: $F(\omega^*, \mu^*) = \underset{\substack{\omega \in \Omega \\ \mu \in M}}{\text{extr}} F(\omega, \mu)$.

Отже, цільова функція в поставленій задачі залежить від двох змінних, якими є перестановка і сполучення без повторень. У роботі [10] вона розв'язується комбінованим алгоритмом таким чином. Для фіксованої перестановки ω^*

розробленими процедурами знаходиться сполучення без повторень μ^*, для якого задана цільова функція набуває оптимального значення.

Задача проектування друкованих плат [8]. Нехай задано електричну схему, яку подамо графом G. Позначимо $\Phi(G)$ її функціональні характеристики. Множиною $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ задамо його вершини, кожній a_i з яких у відповідність поставлено певний базовий елемент. Розміщення компонент електричної схеми проводиться на платі, яка являє собою прямокутну поверхню з нанесеною на ній координатною сіткою. Вона може бути одно-, дво- та багатошаровою. Перенумеруємо комірки цієї сітки і їхню послідовну нумерацію подамо множиною $D=\{d_1,\ldots,d_\xi\}$. Із елементів a_i базової множини A, $i\in(1,\ldots,n)$, утворюємо комбінаторну множину W – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, розбиття тощо), а з елементів d_l базової множини D, $l\in(1,\ldots,\xi)$, утворюємо комбінаторну множину M – розміщення без повторень. На елементах w комбінаторної множини W і μ комбінаторної множини M уводиться цільова функція. Тоді задача проектування друкованих плат полягає у знаходженні такого розміщення компонент заданої електричної схеми на одному або декількох шарах і виборі для розміщення елементів комбінаторної конфігурації w елементів μ із множини M, щоб уведена цільова функція набувала оптимального значення. Тобто, необхідно знайти елемент w^* множини W і елемент μ^* множини M, для яких цільова функція набуває оптимального значення з необхідним виконанням умови $\Phi(G)=\widetilde{\Phi}(\widetilde{G})$, де $\widetilde{\Phi}(\widetilde{G})$ – функціональні характеристики електричної схеми $\widetilde{G}$, одержаної із G в процесі проектування.

Задача проектування друкованих плат розділяється на підзадачі, аргументом цільової функції в яких є комбінаторні конфігурації різних типів. Наприклад, аргумент цільової функції в задачі компоновки – розбиття n-елементної множини на підмножини, задачі розміщення різногабаритних модулів на поверхні друкованої плати і розподілення виводів модулів – перестановка, трасування друкованих плат – розміщення без повторень. Виходячи з цього, цільову функцію для поставленої задачі запишемо як $F(\rho^*,\ \mu^*,\omega^*)=\underset{\substack{\rho\in\Theta\\ \mu\in M\\ \omega\in\Omega}}{\operatorname{extr}}F(\rho,\mu,\omega)$, де ρ – розбиття n-елементної множини на підмножини, μ – розміщення без повторень, ω – перестановка, а Θ, M, Ω – їхні множини.

Ця задача розв'язується гібридним алгоритмом, у який вбудовано алгоритми, що працюють послідовно або в ітераційному режимі. Цільова функція в ній залежить від кількох змінних, якими є комбінаторні конфігурації різних типів.

Задача розпізнавання мовних сигналів. Розпізнавання мови – це процес автоматичної обробки мовного сигналу з метою визначення послідовності слів, яка передається цим сигналом [11]. Мовний сигнал описується послідовністю $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$, елемент x_i якої – значення сигналу у відліку i. Довжина n різних реалізацій сигналу певного слова – різна. Для розпізнавання з реалізацій X створюється словник еталонних слів. Еталон слова словника описується послідовністю $E_h=(e_{h_1},..,e_{q_h})$, де h – номер слова у словнику, q_h – довжина сигналу еталону слова, $h\in\{1,...,\widetilde{q}\}$, $\widetilde{q}$ – кількість еталонних сигналів у бібліотеці.

Задача розпізнавання мовних сигналів полягає у знаходженні для сигналу X найбільш правдоподібного еталона E_h з усіх можливих еталонних сигналів. Оскільки в цій задачі установлюється подібність сигналів, то в процесі обчислення інтегральної міри подібності знаходиться максимум

$$G_h(X)=\max_{v\in\tau_h(n)}G(X,vE_h), \tag{1}$$

де $v\in\tau_h(n)$ – нелінійне розтягання початкового сигналу, $\tau_h(n)$ – множина можливих перетворень $v=(v_1,v_2,\ldots,v_s,\ldots,v_{q_h})$ початкового еталону E_h, які приводять до утворення різних еталонних сигналів заданого слова, $G(X, vE_h)$ – інтегральна міра подібності, $G_h(X)$ –значення інтегральної міри подібності [11].

Задачу (1) розв'язують шляхом порівняння еталона E_h із сигналом X одним із методів направленого перебору, наприклад методом динамічного програмування [11]. Для знаходження сигналу за номером h з усіх еталонних, якому відповідає вхідний сигнал, розв'язується повним перебором задача

$$h(X) = \arg\max_h G_h(X). \qquad (2)$$

Аргументом цільової функції в цих задачах, згідно з [11], є вхідний сигнал.

Як видно з математичної моделі (1), (2), задача розпізнавання мовних сигналів досить природно розділяється на дві підзадачі: перебір еталонних сигналів і порівняння еталонного і вхідного сигналів. Оскільки тут маємо перебір варіантів, то вона належить до задач комбінаторної оптимізації.

Далі побудуємо математичну модель задачі розпізнавання як задачу комбінаторної оптимізації і визначимо комбінаторну конфігурацію, яка є аргументом цільової функції [12].

Розглянемо задачу порівняння еталонного і вхідного сигналів (задача (1)). Уведемо дві базові множини $A = \{a_1, ..., a_n\}$ і $B = \{b_1, ..., b_{\tilde{n}}\}$, де $a_i = x_i \in X$, $i = \overline{1, n}$, а $b_l = e_{h_l} \in E_h$, $l \in \{1, ..., \tilde{n}\}$, $\tilde{n} = q_h$. Вхідні дані, якими є ваги між елементами $a_i \in A$ і $b_l \in B$ задамо несиметричною матрицею $C = \| c_{il} \|_{n x \tilde{n}}$, номера стовпців якої збігаються з нумерацією елементів $a_i \in A$, а номера рядків – з нумерацією елементів $b_l \in B$. Аналогічне представлення вхідних даних подано розгорнутим графом слова в [11], де при поелементному розпізнаванні мовного сигналу для елемента $x_i \in X$ знаходиться йому подібний $e_{h_l} \in E_h$. Оскільки з кожної базової множини A і B вибирають по одному елементу в строгому порядку, то отримана комбінаторна конфігурація є розміщення без повторень. Позначимо її $\mu^k \in M$, де M – їхня всіляка множина. Для визначення елементів $a_i \in A$ і $b_l \in B$, що вибираються з базових множин на k-му варіанті розв'язання задачі, уведемо комбінаторну (0,1)-матрицю $Q(\mu^k) = \| g_{il}^k(\mu^k) \|_{nx\,\tilde{n}}$. Якщо $g_{il}^k(\mu^k) = 1$, то з множин A і B вибрано пару (a_i, b_l), в іншому разі – значення $g_{il}^k(\mu^k) = 0$. Для запису цільової функції в явному вигляді змоделюємо вхідні дані функціями натурального аргументу. Елементи матриці C подамо числовою функцією $\varphi(j)\,|_1^{n^*}$, а матриці $Q(\mu^k)$ – комбінаторною $\beta(f(j),\ \mu^k)\,|_1^{n^*}$, де $n^* = n \cdot \tilde{n}$. Кількість одиниць в комбінаторній функції дорівнює $q' = \min(n,\ \tilde{n})$.

Задача порівняння еталонного і вхідного мовних сигналів полягає в знаходженні такого розміщення без повторень $\mu^{k*} = (\mu_1^{k*}, ..., \mu_{q'}^{k*})$, для якого функціонал

$$F(\mu^{k*}) = \max_{\mu^k \in M} \sum_{j=1}^{n^*} \varphi(j)\,\beta_j\,(f(j), \mu^k), \qquad (3)$$

де $\sum_{j=1}^{n^*} \varphi(j)\,\beta_j\,(f(j), \mu^k)$ – інтегральна міра подібності, а $\varphi(j) = g_j'(a_i, b_l)$ – елементарна міра подібності, яка визначає подібність між елементами еталонного і вхідного сигналів. Аргументом цільової функції задачі (1) є розміщення без повторень. Розглянемо задачу (2).

Позначимо A і $\tilde{B} = \{B_1, ..., B_{\tilde{q}}\}$, базові множини, де $A = X$, а $B_l = E_{h_l}$. В цій задачі як ваги між еталонним і вхідним сигналами виступають значення інтегральних мір подібності, одержаних за виразом (3), числове значення яких подано матрицею C'. Номера стовпців цієї матриці збігаються з номерами еталонних сигналів, розміщених у бібліотеці. Рядок у ній один і відповідає номеру один вхідного сигналу. Оскільки при порівнянні вхідного і еталонного сигналів з базових множин A і B вибираються два елементи, то утворений об'єкт є сполученням без повторень. Позначимо його $\mu'^k \in M'$, де M' – їхня всіляка множина. Уведемо комбінаторну (0,1)–матрицю $Q(\mu'^k) = \| g_{1l}'^k(\mu'^k) \|_{1x\tilde{q}}$. Якщо $g_{1l}'^k(\mu'^k) = 1$, то з множин A і B вибрано пару (A, B_l), в іншому разі – значення $g_{1l}'^k(\mu'^k) = 0$. Елементи матриці C' подамо числовою функцією $\varphi'(j)|_1^{n-1}$, а матриці $Q(\mu'^k)$ – комбінаторною $\beta'(f'(j),\mu'^k)|_1^{n-1}$.

Задача пошуку еталонного сигналу, який відповідає вхідному, полягає у знаходженні такого сполучення без повторень $\mu'^{t*}=(A_1,\ B_l)$, для якого значення заданої цільової функції було б найбільшим, тобто

$$F(\mu'^{t*})=\max_{\mu'^k\in M}\sum_{j=1}^{n-1}\varphi'(j)\,\beta'_j\,(f'(j),\mu'^t),\quad (4)$$

де $\varphi'(j)=\sum_{j=1}^{n^*}\varphi(j)\,\beta_j\,(f(j),\mu^k)$.

Отже, задача розпізнавання мовних сигналів розділяється на дві підзадачі, аргументом цільової функції в одній є розміщення без повторень, а у другій – сполучення без повторень. Як видно з постановки задачі (2), пошук еталонного сигналу, подібного до вхідного, потребує повного перебору і вона є *NP*-повною (нерозв'язною). Для зведення цієї задачі до розв'язної за певними ознаками проведено структуризацію бібліотеки еталонних сигналів. Обчислювальну схему цього алгоритму описано у [13]. Аналогічну процедуру пошуку слова у словнику великих розмірностей описано у [14–16].

Структуризація бібліотеки еталонних сигналів

Упорядкуємо еталонні сигнали, що відповідають заданим словам, в алфавітному порядку за такою схемою.

• З кожного бібліотечного сигналу виділимо сегмент постійної довжини q'', який є початком сигналу еталонного слова, так, щоб він відповідав частині першої фонеми. Множину одержаних сегментів позначимо $A=\{a_1,\dots,a_n\}$, а множину слів у словнику – $B=\{b_1,\dots,b_n\}$. Елементу $a_l\in A$ відповідає сегмент частини першої фонеми слова, яке задається елементом b_l словника.

• Розв'язавши задачу розбиття множини A на підмножини (кластеризацію), об'єднаємо однорідні сегменти в одну підмножину $\rho_s^k\subset\rho^k$, якою позначимо підмножину слів словника $B=$ $=\{b_1,\dots,b_n\}$ з подібними початковими сегментами, що ізоморфна $\rho_s^k\subset\rho^k$, $s\in\{1,...,\eta^k\}$. Як і в задачі розпізнавання, в цьому випадку значення функції $\varphi(j)=\sum_{j=1}^{q''}g'_j(\tilde a_{jr},\ \tilde a_{jl})$ є інтегральною мірою подібності, а $g'_j(\tilde a_{jr},\tilde a_{jl})$ – елементарна міра подібності, яка встановлюється між сегментами $a_r, a_l\subset A$, $\tilde a_{jr}\in a_r$, $\tilde a_{jl}\in a_l$.

• Кожній одержаній підмножині $\rho_s^k\subset\rho^k$ поставимо у відповідність еталон сегмента a'_j, який відповідає частині першої фонеми слова, що входить до $\rho_s'^k\subset\rho'^k$. Одержану множину сегментів позначимо $A'=\{a'_1,...,a'_{\tilde\eta}\}$. Аналогічно можна структурувати бібліотеку еталонних сигналів по другій, третій фонемам, використавши як еталони множину сегментів $A=\{a_1,\dots,a_n\}$.

Маючи еталони сегментів $a'_l\in A'$, упорядкованих в алфавітному порядку, підзадачі (3)–(4) розв'язуються таким чином. При пошуку еталонного сигналу в бібліотеці вирізаємо сегмент вхідного сигналу X довжиною q'', що відповідає частині першої фонеми. Задачу (3) розв'язуємо з використанням відомих методів, наприклад методу динамічного програмування [11]. При цьому порівнюється сегмент вхідного сигналу довжиною q'' з еталонними сегментами $a'_j\in A'$ структурованої бібліотеки. Якщо значення функціоналу (3) є найбільшим для підмножини $\rho_s^k\subset\rho^k$, то пошук вхідного слова проводиться в цій підмножині словника B по другій, третій і наступних фонемах.

Отже, задача розпізнавання мовних сигналів розділяється на три підзадачі, аргументом цільової функції в яких є комбінаторні конфігурації різних типів. Ця задача полягає в знаходженні таких комбінаторних конфігурацій $\rho^{i*}\in\Theta$, $\mu^{t*}\in M$, $\mu'^{k*}\in M'$, для яких задана цільова функція набуває оптимального значення, тобто

$$F(\rho^{i*},\ \mu^{t*},\mu'^{k*})=\operatorname*{glob\,extr}_{\substack{\rho^i\in\Theta\\ \mu^t\in M\\ \mu'^k\in M'}}F(\rho^i,\ \mu^t,\mu'^k).$$

Структурування бібліотеки еталонних сигналів проводиться один раз. Для розпізнавання поточного вхідного сигналу організується ітераційний процес, на кожному кроці якого почергово розв'язуються підзадачі (3)–(4).

Висновок. Як видно з прикладів, цільова функція в описаних задачах залежить від кількох змінних, якими є комбінаторні конфігурації різних типів. Такі задачі досить природно розділяються на кілька підзадач. Для розв'язання кожної такої підзадачі розробляються незалежні алгоритми, які діють як вбудовані процедури послідовно або в ітераційному режимі. Отже, задачі комбінаторної оптимізації, цільова функція яких залежить від кількох змінних, якими є комбінаторні конфігурації різних типів, розділяються на підзадачі і потребують для розв’язання розроблення гібридних алгоритмів.

1. *Пападимитриу Х.*, *Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 510 с.
2. *Карманов В.Г.* Математическое программирование.– М.: Наука, 1986. – 286 с.
3. *Стоян Ю.Г.*, *Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – К.: Міносвіти України, Ін-т системних досліджень освіти, Полтавський інж.-буд. ін-т, 1993. – 188 с.
4. *Сергиенко И..В.*, *Каспшицкая М.Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – К.: Наук. думка, 1981. – 281 с.
5. *Бурков В.Н.*, *Рубинштейн М.И.* Комбинаторное программирование. Сер.: Матем. кибернетика. – М.: Знание, 1977. – № 8. – 64 с.
6. *Супруненко Д.А.* О значениях линейной формы на множестве перестановок // Кибернетика. – 1968. – № 2. – С. 59–63.
7. *Гуляницький Л.Ф.* Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях. Автореф. дис. ... докт. техн. наук / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. – К., 2005. – 32 с.
8. *Тимофеева Н.К.* Вопросы разработки алгоритмического и программного обеспечения, предназначенного для решения одного класса задач конструкторского проектирования цифровой аппаратуры: Автореф. дис... канд. физ-мат. наук / Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР. – К., 1984. – 24 с.
9. *Тимофеева Н.К.* О некоторых особенностях построения математических моделей задач комбинаторной оптимизации // УСиМ. – 2004. – № 5. – С. 38–45.
10. *Коваленко С.М.* Математичні моделі та методи розв’язання задач комбінаторної оптимізації в агротехнічній системі. Автореф. дис. ... канд. техн. наук / Харк. нац. ун-т радіоелектроніки. – Харків, 2008. – 20 с.
11. *Винцюк Т.К.* Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов. – К.: Наук. думка, 1987. – 262 с.
12. *Тимофієва Н.К.* Гібридний (комбінований) алгоритм розв'язання задачі розпізнавання мовних сигналів // Восьма Всеукр. міжнар. конф. «Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів». Київ, 28–31 серп. 2006 р. – К., 2006. – С. 87–90.
13. *Тимофієва Н.К.* Комбінаторика в розпізнаванні мовних сигналів // Матеріали десятої міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. – К.: НТУ України (КПІ). – 2004. – С. 528.
14. *Пилипенко В.В.* Распознавание дискретной и слитной речи из сверхбольших словарей на основе выборки информации из баз данных // Искусственный интеллект. – 2006. – № 3. – С. 548–558.
15. *Савенкова О.*, *Карпов О.* Моделі навчання і розпізнавання в інформаційній технології розпізнавання мовлення з великих словників // Дев’ята Всеукр. міжнар. конф. «Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів». Київ, 3–7 лист. 2008 р. – К., 2008. – С. 93–97.
16. *Разработка* средств языковой поддержки для систем билингвального декодирования речи со сверхбольшим словарем / Г.В. Дорохина, А.Л. Ронжин, И.А. Касиров и др. // Искусственный интеллект. – 2007. – № 4. – С. 352–356.

Поступила 29.01.2009

Тел. для справок: (044) 526-1578, 526-1175 (Киев)

●

Н.К. Тимофеева

Линейное целочисленное программирование и задачи комбинаторной оптимизации

Введение. Выбор эффективных способов решения прикладных задач зависит от их адекватно разработанных математических моделей. Для разработки математических моделей задач комбинаторной оптимизации часто используют целочисленное линейное программирование. Эта задача заключается в нахождении оптимального значения целевой функции на множестве, которое задается системой линейных уравнений и неравенств, причем на переменные налагаются условия целочисленности [1–3]. В задачах комбинаторной оптимизации оптимальное значение целевой функции определяется на множестве комбинаторного характера. Из этих двух утверждений следует, что задача целочисленного линейного программирования заключается в нахождении множества переменных, для которого достигается оптимальное решение и которое не является комбинаторной конфигурацией. В этом случае считается, что целевая функция зависит от многих переменных [3]. В комбинаторной оптимизации, как будет показано далее, целевая функция зависит как от одной, так и от нескольких переменных, которыми являются комбинаторные конфигурации разных типов, а переменные в модели целочисленного линейного программирования являются входными данными.

В математической литературе еще в 70-х годах прошлого века преимущественно учеными Советского Союза формальные постановки задач комбинаторной оптимизации разрабатывались также и с учетом их комбинаторной природы, например [4–8]. В этих постановках целевая функция зависит от одной переменной – комбинаторной конфигурации определенного типа.

Задача комбинаторной оптимизации и математическая модель линейного целочисленного программирования

Задачи комбинаторной оптимизации, как правило, задаются на одном или нескольких множествах, например A и B, элементы которых имеют любую природу. Для многих задач каждое из этих множеств можно представить в виде графа, вершинами которого являются его элементы, а каждому ребру поставлено в соответствие число $c_{il} \in R$, называемое *весом* ребра; R – множество вещественных чисел. Для удобства будем считать, что между элементами этих множеств существуют связи, числовое значение которых названо весами и которые задаются матрицами. Эти величины определяют значение целевой функции. Назовем их *входными* данными.

В общем виде задача комбинаторной оптимизации формулируется так. Из элементов одного из заданных множеств, например $a_i \in A$, $i \in (1,\dots \dots,n)$, образуется комбинаторное множество W – совокупность комбинаторных конфигураций определенного типа (перестановки, выборки разных типов, разбиения и др.). На элементах w комбинаторного множества W вводится целевая функция $F(w)$. Необходимо найти элемент w' множества W, для которого целевая функция $F(w)$ принимает экстремальное значение при выполнении заданных ограничений, т.е. $F(w^*) = \mathrm{glob} \operatorname*{extr}_{w \in W^0 \subset W} F(w)$, где extr = {min, max}, W^0 – подмножество, определяемое ограничениями задачи.

Математическая модель задачи целочисленного линейного программирования формулируется в таком виде. Найти экстремум функции $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ при условиях $\sum_{i=1}^{n} a_{il} x_i = b_l$, $l = \overline{1, m}$, $x_i \ge 0$, $i = \overline{1, n}$, x_i – целые для $i = \overline{1, p}$, $p \le n$, где c_i, a_{il}, b_l – заданные целые числа, x_i – переменные.

С учетом этой модели полагают, что целевая функция в комбинаторной оптимизации зависит от многих переменных [3], а x_i – элементы комбинаторных конфигураций $w = (w_1, \dots, w_n)$, которые перемножаются на заданные числа c_i, a_{il}. Но это невозможно, поскольку w_i могут иметь любую природу. Переменные x_i не являются элементами w, а модель целочисленного линейного программирования не отображает сути задач комбинаторной оптимизации.

Целочисленное линейное программирование разрабатывалось для экономических задач, для которых математическая постановка формулируется так: задано одно множество A, элементы $a_i \in A$ которого не имеют между собой связей. Вместо этого каждый элемент $a_i \in A$, $i \in \{1,\dots,n\}$, характеризуется определенным свойством (весом) x_i. Аргументом целевой функции в них, как правило, являются выборки (сочетание, размещение), а входные данные – последовательность значений весов $x_1,\dots,x_n$ элементов a_i заданного множества A, количество которых совпадает с количеством элементов в w. Отсюда утверждение, что аргументом целевой функции в этих задачах является последовательность входных данных $x_1, \dots$ $\dots, x_n$, а не комбинаторная конфигурация $w = (w_1,\dots,w_n)$. Соответственно полагают, что целевая функция в задачах комбинаторной оптимизации зависит от многих переменных. Последовательность $x_1,\dots,x_n$ является входными данными определенной задачи, а значение x_i неявно зависит от комбинаторной конфигурации w, т.е. выражение $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ можно записать в таком виде: $F(w) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(w)$. Тогда появляется проблема определения этой зависимости в задачах комбинаторной оптимизации. Для этого необходимо разрабатывать формальные постановки этих задач с учетом их комбинаторной природы [9].

Моделирование прикладных задач с использованием теории комбинаторной оптимизации

На примерах, приведенных далее, показано, что целевая функция для разных задач комбинаторной оптимизации зависит как от одной переменной, так и от нескольких, которыми являются разные типы комбинаторных конфигураций, а не элементы последовательности, которой задаются входные данные.

Задача о севообороте из агротехнической системы описана в [10]. Задано m культур и n полей. Известно, какие культуры были высажены на каждом из полей в текущем году (т.е., для каждой культуры известны культуры-предшественники). На каждом поле может высеваться лишь одна культура. При построении севооборота на следующий и последующие годы необходимо учитывать рекомендации относительно их очередности, предусмотреть различные климатические и погодные условия, что позволяет получить оптимальный урожай определенных культур.

В этой задаче заданы три базовых множества: множество A, элементы которого соответствуют определенной культуре; множество B, элементы которого соответствуют определенному полю; множество параметров P, которые характеризуют климатические и погодные условия. Из элементов множества A (или B) образуем множество перестановок Ω. Вариант назначения l-й культуры на i-е поле зависит от перестановки $\omega \in \Omega$. Из элементов множества P образуем множество сочетаний без повторения M. Вариант выбора определенных климатических и погодных условий для заданной перестановки ω^* являются сочетания без повторений $\mu \in M$. Запишем функционал для этой задачи:

$$F(\omega^*,\ \mu^*) = \operatorname*{extr}_{\substack{\omega\in\Omega \\ \mu\in M}} F(\omega,\ \mu) .$$

Следовательно, целевая функция в поставленной задаче зависит от двух переменных, которыми являются перестановка и сочетание без повторений. В [10] она решается комбинированным алгоритмом: для фиксированной перестановки ω^* разработанными процедурами находится сочетание без повторений μ^*, для которого заданная целевая функция приобретает оптимальное значение.

Задача проектирования печатных плат [8]. Пусть задана электрическая схема, которую представим графом G. Обозначим $\Phi(G)$ ее функциональные характеристики. Множеством $A = \{a_1,...,a_n\}$ зададим его вершины, каждой a_i из которых в соответствие поставлен определенный базовый элемент. Размещение компонент электрической схемы проводится на плате, представляющей собой прямоугольную поверхность с нанесенной на нее координатной сеткой. Она может быть одно-, двух- и многослойной. Перенумеруем ячейки этой сетки и их последовательную нумерацию представим множеством $D = \{d_1,...,d_\xi\}$. Из элементов a_i базового множества A, $i \in \{1,...,n\}$, образуем комбинаторное множество W – совокупность комбинаторных конфигураций определенного типа (перестановки, разбиения и др.), а из элементов d_l базового множества D, $l \in \{1,...,\xi\}$, образуем комбинаторное множество M – размещение без повторений. На элементах w комбинаторного множества W и μ комбинаторного множества M вводится целевая функция. Тогда задача проектирования печатных плат заключается в нахождении такого размещения компонент заданной электрической схемы на одном или нескольких слоях и выборе для размещения элементов комбинаторной конфигурации w элементов μ из множества M, чтобы введенная целевая функция принимала оптимальное значение. То есть, необходимо найти элемент w^* множества W и элемент μ^* множества M, для которых целевая функция принимает оптимальное значение с необходимым выполнением условия $\Phi(G) = \widetilde{\Phi}(\widetilde{G})$, где $\widetilde{\Phi}(\widetilde{G})$ – функциональные характеристики электрической схемы $\widetilde{G}$, полученной из G в процессе проектирования.

Задача проектирования печатных плат разбивается на подзадачи, аргумент целевой функции в которых – комбинаторные конфигурации разных типов. Например, аргумент целевой функции в задаче компоновка – разбиение n-элементного множества на подмножества, задачи размещения разногабаритных модулей на поверхности печатной платы и распределения выводов модулей – перестановка, трассировка печатных плат – размещение без повторений. Исходя из этого, целевую функцию для поставленной задачи запишем как

$$F(\rho^*,\mu^*,\omega^*) = \operatorname*{extr}_{\substack{\rho\in\Theta \\ \mu\in M \\ \omega\in\Omega}} F(\rho,\mu,\omega),$$

где ρ – разбиение n-элементного множества на подмножества, μ – размещение без повторений, ω – перестановка, а Θ, m, Ω – их множества.

Эта задача решается гибридным алгоритмом, в котором встроены алгоритмы, работающие последовательно или в итерационном режиме. Целевая функция в ней зависит от нескольких переменных, которыми являются комбинаторные конфигурации разных типов.

Задача распознавания речевых сигналов. Распознавание речи – это процесс автоматической обработки речевого сигнала с целью определения последовательности слов, которая передается этим сигналом [11]. Речевой сигнал описывается последовательностью $X = (x_1, ..., x_n)$, элемент x_i которой является значением сигнала в отсчете i. Длина n разных реализаций сигнала заданного слова – разная. Для распознавания из реализаций X создается словарь эталонных слов. Эталон слова словаря описывается последовательностью $E_h = (e_{h_1}, .., e_{q_h})$, где h – номер слова в словаре, q_h – длина сигнала эталона слова, $h \in \{1,...,\widetilde{q}\}$, $\widetilde{q}$ – количество эталонных сигналов в библиотеке.

Задача распознавания речевых сигналов заключается в нахождении для сигнала X наиболее правдоподобного эталона E_h из всех возможных эталонных сигналов. Поскольку в этой задаче устанавливается сходство сигналов, то в процессе вычисления интегральной меры сходства находится максимум

$$G_h(X) = \max_{v\in\tau_h(n)} G(X, vE_h)\ , \qquad (1)$$

где $v \in \tau_h(n)$ – нелинейное растягивание начального сигнала, $\tau_h(n)$ – множество возможных превращений $v = (v_1, v_2,..., v_s,..., v_{q_h})$ начального эталона E_h, которые приводят к образованию разных эталонных сигналов заданного слова, $G(X, vE_h)$ – интегральная мера сходства, $G_h(X)$ – значение интегральной меры сходства [11].

Задачу (1) решают путем сравнения эталона E_h с сигналом X одним из методов направленного перебора, например методом динамического программирования [11]. Для нахождения сигнала с номером h из всех эталонных, которому соответствует входной сигнал, решается полным перебором задача

$$h(X) = \arg\max_h G_h(X)\,. \qquad (2)$$

Аргументом целевой функции в этих задачах, согласно [11], есть входной сигнал.

Как видно из математической модели (1)–(2), задача распознавания речевых сигналов естественно разделяется на две подзадачи: перебор эталонных сигналов и сравнение эталонного и входного сигналов. Поскольку здесь наблюдается перебор вариантов, то она относится к задачам комбинаторной оптимизации.

Далее построим математическую модель задачи распознавания как задачу комбинаторной оптимизации и определим комбинаторную конфигурацию, которая является аргументом целевой функции [12].

Рассмотрим задачу сравнения эталонного и входного сигналов (задача (1)). Введем два базовых множества $A = \{a_1, ..., a_n\}$ и $B = \{b_1, ..., b_{\widetilde{n}}\}$, где $a_i = x_i \in X$, $i = \overline{1, n}$, а $b_l = e_{h_l} \in E_h$, $l \in \{1, ..., \widetilde{n}\}$, $\widetilde{n} = q_h$. Входные данные – веса между элементами $a_i \in A$ і $b_i \in B$ зададим несимметричной матрицей $C = \| c_{il} \|_{n\, x\, \widetilde{n}}$, номера столбцов которой совпадают с нумерацией элементов $a_i \in A$, а номера строк – с нумерацией элементов $b_i \in B$. Аналогичное представление входных данных показано развернутым графом слова в [11], где при поэлементном распознавании речевого сигнала для элемента $x_i \in X$ находится ему подобный $e_{h_l} \in E_h$. Поскольку из каждого базового множества A и B выбираются по два элемента в строгом порядке, то полученная комбинаторная конфигурация является размещением без повторений. Обозначим ее $\mu^k \in M$, где M – их всевозможное множество. Для определения элементов $a_i \in A$ и $b_i \in B$, которые выбираются из базовых множеств на k-м варианте решения задачи, введем комбинаторную (0,1)-матрицу $Q(\mu^k) = \| g_{il}^k(\mu^k) \|_{nx\widetilde{n}}$. Если $g_{il}^k(\mu^k) = 1$, то из множеств A и B выбрана пара (a_i, b_l), иначе – значение $g_{il}^k(\mu^k) = 0$. Для записи целевой функции в явном виде смоделируем входные данные функциями натурального аргумента. Элементы матрицы C представим числовой функцией $\varphi(\,j\,)\,|_1^{n^*}$, а матрицы $Q(\mu^k)$ – комбинаторной $\beta(\,f(\,j\,), \mu^{\,k})|_1^{n^*}$, где $n^* = J \cdot q_h$. Количество единиц в комбинаторной функции равно $q^{'} = \min(n, \widetilde{n})$.

Задача сравнения эталонного и входного речевых сигналов заключается в нахождении такого размещения без повторений $\mu^{k*} = (\mu_1^{k*}, ..., \mu_{q^{'}}^{k*})$, для которого функционал

$$F(\mu^{k*}) = \max_{\mu^k \in M} \sum_{j=1}^{n^*} \varphi(\,j\,)\,\beta_j\,(f\,(j), \mu^k)\,, \qquad (3)$$

где $\sum_{j=1}^{n^*} \varphi(\,j\,)\,\beta_j\,(f\,(j), \mu^k)$ – интегральная мера сходства, а $\varphi(j) = g_j^{'}(a_i, b_l)$ – элементарная мера сходства, определяющая подобие между элементами эталонного и входного сигналов. Аргументом целевой функции задачи (1) является размещение без повторений. Рассмотрим задачу (2).

Обозначим A и $\widetilde{B} = \{B_1, ..., B_{\widetilde{q}}\}$ базовые множества, где $A = X$, а $B_l = E_{h_l}$. В этой задаче в качестве весов между эталонным и входным сигналами выступают значения интегральных мер сходства, полученных по выражению (3), числовое значение которых представлено матрицей $C^{'}$. Номера столбцов этой матрицы совпадают с номерами эталонных сигналов, размещенных в библиотеке. Строка в ней одна и соответствует номеру один входного сигнала. Поскольку при сравнении входного и эталонного сигналов из базовых множеств A и B выбираются два элемента, то образованный объект является сочетанием без повторений. Обозначим его $\mu^{'k} \in M^{'}$, где $M^{'}$ – их всевозможное множество. Введем комбинаторную (0,1)-матрицу $Q(\mu^{'k}) = \| g_{1l}^{'k}(\mu^{'k}) \|_{1\,x\,n}$. Если $g_{1l}^{'k}(\mu^{'k}) = 1$, то из множеств A и B выбрана пара (A, B_l), иначе – значение $g_{1l}^{'k}(\mu^{'k}) = 0$. Элементы матрицы $C^{'}$ представим числовой функцией $\varphi^{'}(\,j\,)\,|_1^{n-1}$, а матрицы $Q(\mu^{'k})$ – комбинаторной $\beta^{'}(\,f^{'}(\,j\,), \mu^{\,'k})|_1^{n-1}$.

Задача поиска эталонного сигнала в библиотеке, соответствующего входному, заключается в нахождении такого сочетания без повторений $\mu^{'t*} = (A_1, B_l)$, для которого значение заданной целевой функции было бы наибольшим, т.е.

$$F(\mu^{'t*}) = \max_{\mu^{'k} \in M} \sum_{j=1}^{n-1} \varphi^{'}(\,j\,)\,\beta_j^{'}\,(f^{'}\,(j), \mu^{'t})\,, \qquad (4)$$

где $\varphi^{'}(j) = \sum_{j=1}^{n^*} \varphi(\,j\,)\,\beta_j\,(f\,(j), \mu^k)$.

Следовательно, задача распознавания речевых сигналов разделяется на две подзадачи, аргументом целевой функции в одной является размещение без повторений, а во второй – сочетание без повторений. Как видно из постановки задачи (4), поиск эталонного сигнала, подобного входному, нуждается в полном переборе и она является NP-полной (неразрешимой). Для сведения этой задачи к разрешимой по определенным признакам проведена структуризация библиотеки эталонных сигналов. Вычислительная схема этого алгоритма описана в [13]. Аналогичная процедура поиска слова в словаре больших размерностей описана в [14–16].

Структуризация библиотеки эталонных сигналов

Упорядочим эталонные сигналы, соответствующие заданным словам, в алфавитном порядке по такой схеме.

• Из каждого библиотечного сигнала выделим сегмент постоянной длины q'', который является началом сигнала эталонного слова, так, чтобы он соответствовал части первой фонемы. Множество полученных сегментов обозначим $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, а множество слов в словаре – $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Элементу $a_i \in A$ соответствует сегмент части первой фонемы слова, заданного элементом b_j словаря.

• Решив задачу разбиения множества A на подмножества (кластеризацию), объединим однородные сегменты в одно подмножество $\rho_s^k \subset \rho^k$, которым обозначим подмножество слов словаря $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ с подобными начальными сегментами, которое изоморфно $\rho_s^k \subset \rho^k$, $s \in \{1, \dots$ $\dots, \eta^k\}$. Как и в задаче распознавания, в этом случае значение функции $\varphi(j) = \sum_{j=1}^{q''} g_j'(\tilde{a}_{jr}, \tilde{a}_{jl})$ является интегральной мерой сходства, а $g_j'(\tilde{a}_{jr}, \tilde{a}_{jl})$ – элементарная мера сходства, устанавливаемая между сегментами a_r, $a_l \subset A$, $\tilde{a}_{jr} \in a_r$, $\tilde{a}_{jl} \in a_l$.

• Каждому полученному подмножеству $\rho_s^k \subset \rho^k$ поставим в соответствие эталон сегмента a_j', соответствующий части первой фонемы слова, входящей в $\rho_s'^k \subset \rho'^k$. Полученное множество сегментов обозначим $A' = \{a_1', \dots, a_{\eta}'\}$. Аналогично можно структурировать библиотеку эталонных сигналов по второй, третьей фонеме, использовав в качестве эталонов множество сегментов $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Имея эталоны сегментов $a_l' \in A'$, упорядоченных в алфавитном порядке, подзадачи (3)–(4) решаются таким образом. При поиске эталонного сигнала в библиотеке вырезаем сегмент входного сигнала X длиной q'', соответствующий части первой фонемы. Задачу (3) решаем с использованием известных методов, например метода динамического программирования [11]. При этом сравнивается сегмент входного сигнала длиной q'' с эталонными сегментами $a_j' \in A'$ структурированной библиотеки. Если значение функционала (3) наибольшее для подмножества $\rho_s^k \subset \rho^k$, то поиск входного слова проводится в этом подмножестве словаря B по второй, третьей и следующих фонемах.

Следовательно, задача распознавания речевых сигналов разделяется на три подзадачи, аргументом целевой функции в которых являются комбинаторные конфигурации разных типов. Эта задача заключается в нахождении таких комбинаторных конфигураций $\rho^{i*} \in \Theta$, $\mu^{t*} \in M$, $\mu'^{k*} \in M'$, для которых заданная целевая функция принимает оптимальное значение, т.е.

$$F(\rho^{i*}, \mu^{t*}, \mu'^{k*}) = \operatorname*{glob\,extr}_{\substack{\rho^i \in \Theta \\ \mu^t \in M \\ \mu'^k \in M'}} F(\rho^i, \mu^t, \mu'^k).$$

Структуризация библиотеки эталонных сигналов проводится один раз. Для распознавания текущего входного сигнала организуется итерационный процесс, на каждом шаге которого поочередно решаются подзадачи (3) –(4).

Заключение. Как следует из примеров, целевая функция в описанных задачах зависит от нескольких переменных – комбинаторных конфигураций разных типов. Такие задачи достаточно естественно разделяются на несколько подзадач. Для решения каждой такой подзадачи разрабатываются независимые алгоритмы, действующие как встроенные процедуры последовательно или в итерационном режиме. Таким образом, задачи комбинаторной оптимизации, целевая функция которых зависит от нескольких переменных – комбинаторных конфигураций разных типов, разделяются на подзадачи и требуют для решения разработки гибридных алгоритмов.

●