УДК 519.8

Л.Ф. Гуляницкий, А.О.Мелащенко, С.И. Сиренко

О математических и программных средствах моделирования и оптимизации внешнего государственного долга Украины

В виде модели комбинаторной оптимизации формализована проблема оптимального обслуживания внешнего государственного долга Украины с учетом показателей займов (объемов, сроков погашения и отсрочки выплат, процентных ставок и др.). Описаны реализованные приближенные алгоритмы ее решения. Проведен вычислительный эксперимент по сравнению реализованных алгоритмов.

A problem of the optimal service of the state's external debt of Ukraine taking into account a number of indicators of available loans (volumes, terms of repayment and a delay of payments, interest rates and etc.) is formalized in the form of the model of combinatorial optimization. A number of the implemented approximated algorithms of its solution is described. A computing experiment on the comparison of the implemented algorithms is performed.

У вигляді моделі комбінаторної оптимізації формалізовано проблему оптимального обслуговування зовнішнього державного боргу України з урахуванням показників позик (обсягів, термінів погашення та відтермінування виплат, процентних ставок та ін.). Описано реалізовані наближені алгоритми її вирішення. Проведено обчислювальний експеримент порівняння реалізованих алгоритмів.

Введение. Для эффективности управления обслуживанием внешнего государственного долга, его сокращения и уменьшения негативного влияния на бюджетный дефицит необходим государственный контроль за показателями долговой зависимости, определяемыми путем сопоставления объема задолженности и платежей с величиной ВВП и объемом экспорта. Отсутствие контроля за долговыми последствиями текущего привлечения средств может возникать недопустимо высокая концентрация долговых обязательств в определенные, хотя и достаточно короткие периоды времени. Поэтому контроль за привлечением текущих средств допускает выбор и выполнение таких условий их привлечения, которые в совокупности порождали бы минимально возможную неравномерность распределения долговых обязательств.

Несмотря на важность проблемы для управления экономикой Украины [1, 2], математическим вопросам ее моделирования посвящено мало работ [3, 4].

В данной статье формализована в виде модели комбинаторной оптимизации проблема оптимального обслуживания внешнего государственного долга Украины с учетом ряда показателей имеющихся займов (объемов, сроков погашения и отсрочки выплат, процентных ставок и др.). Описан ряд реализованных приближенных алгоритмов ее решения. Проведен вычислительный эксперимент по сравнению реализованных алгоритмов.

Постановка проблемы

Имеем займы (зарубежные кредиты), определяющие объемы выплат в каждый из будущих периодов, на которые разделяется весь срок планирования – горизонт планирования. Считаем известными (закрепленными законодательно или прогнозируемыми) объемы средств, которые Правительство может выделить в каждый период на погашение кредитов из собственных (бюджетных) ресурсов.

Накопление долгов по займам приводит к ситуации, когда объемы реальных выплат превышают возможности их погашения. Один из наиболее распространенных способов решения этой проблемы – новые займы. Существует несколько возможных типов внешних займов, каждый из которых имеет свои характеристики (возможный объем кредита, сроки предоставления и отсрочки первой уплаты, процентная ставка и т.п.). Задача состоит в таком выборе типов кредитов и определении их характеристик, при которых минимизируются определенные критерии и выполняется ряд ограничивающих условий.

Формализация модели

Пусть известны имеющиеся на данный момент типы возможных займов. Это – кредиты международных финансовых учреждений, правительств других стран или зарубежных коммерческих учреждений и банков. Обозначим K число возможных типов кредитов от зарубежных финансовых учреждений.

Обозначим T плановый горизонт, т.е. число месяцев (периодов), на которые осуществляется планирование; пусть L_t – множество номеров месяцев, которые относятся к году t, $t = 1, 2, \dots, P$, P – число календарных лет, месяцы которых входят в плановый горизонт. Таким образом предполагается, что планирование осуществляется на плановый горизонт, состоящий из одного или нескольких лет, причем первый и/или последний из них может быть неполным.

Каждый возможный тип кредита i, $i = 1, \dots, K$, можно охарактеризовать такими показателями: Q_i – объем кредита; T_i – продолжительность действия кредитного соглашения; τ_i – срок отсрочки его обслуживания; r_i – процентная ставка; $\varphi_{ij}(Q_i, T_i, r_i, \tau_i)$ – функция, определяющая распределение выплат в периоды погашения кредита $j, j = 1, \dots, T$.

Не исключаются случаи, когда указанные параметры определяются путем указания соответствующих минимально и максимально допустимых значений.

Считаются также известными:

- необходимые выплаты по взятым ранее кредитам: $v_1, \dots, v_T$;
- средства из госбюджета и других внутренних источников $w_1, \dots, w_T$, которые могут быть направлены Правительством на погашение долга (абсолютные величины; процент от ВВП; процент от экспорта);
- законодательно установленные ограничения на максимальный объем займов O_t, который разрешается сделать Правительству в год $t, t = 1, \dots, P$ (если некоторый календарный год не полностью входит в плановый горизонт, то соответствующая величина O_t перерассчитывается относительно лишь того числа месяцев года, которые включены в плановый горизонт).

Вариант решения задачи опишем в виде прямоугольной матрицы $x = (x_{ij})_{K \times T}$, где x_{ij} – объем средств по кредиту i, направляемый на погашение задолженности в период j, $i = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, T$.

Тогда компоненты целевой функции, определяющие степень эффективности займов, имеют вид:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{T} \varphi_{ij},$$

$$f_2(x) = \sum_{j=1}^{T} \left(\max\{v_j + u_j - w_j - \sum_{i=1}^{K} x_{ij} - \delta_j, 0\} \right)^2, \quad (1)$$

где u_j – объем фактических выплат по новым кредитам в период j, $u_j = \sum_{i=1}^{K} \varphi_{ij}(Q_i, T_i, r_i, \tau_i)$, а δ_j – недостаток/избыток средств, накопленных на период j, $\delta_1 = 0, \delta_j = \sum_{s=1}^{j-1} \left(\sum_{i=1}^{K} x_{is} + w_s - v_s - u_s \right), j > 1$.

Ограничительные условия запишем так:

$$\sum_{j=1}^{T} x_{ij} \le Q_i, i = 1, \dots, K; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{K} \sum_{j \in L_t} x_{ij} \le O_t, \quad t = 1, \dots, P; \quad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0, \; i = 1, \dots, K, \; j = 1, \dots, T. \quad (4)$$

Условия (2) означают, что объем запросов на заем не должен превосходить предложения. Неравенства (3) отражают условие не превышать в течение года законодательный уровень максимально возможного займа.

Пусть $X = \{x\}$ – это пространство вариантов решения задачи, тогда ограничения (2)–(4) определяют область допустимых вариантов $D \subseteq X$. Поскольку величина кредита (как и отдельных траншей) реально выражается в миллионах долларов, на практике целесообразно рассматривать изменения величин x_{ij} с определенным большим шагом. Поэтому, введя параметр b, определяющий минимально возможную вариацию указанных величин, можно считать, что X и D – это по сути конечные множества (см. условия (2)–(4)).

В итоге приходим к такой задаче комбинаторной оптимизации: найти

$$x_* = \arg\min\left\{\overline{f}\left(x\right), x \in D \subseteq X\right\}, \qquad (5)$$

$$\overline{f}(x) = f_1(x) + \lambda \cdot f_2(x), \qquad (6)$$

где функция $\overline{f}(x)$ – векторная целевая функция, построенная на основе частичных критериев (1), а $\lambda > 0$ – весовой коэффициент.

Основным критерием эффективности любого плана займов является минимизация их суммарной величины и стоимости обслуживания, что и отображает функция $f_1(x)$. Функция $f_2(x)$ штрафует решения с недостатком средств на обслуживание долга, а величина штрафа, прибавляемого к значению целевой функции, зависит от максимальной по всем периодам величины недостачи и от наличия такой недостачи в нескольких периодах одновременно. Функция $f_2(x)$ чувствительна не только к нехватке в нескольких периодах, но и накладывает дополнительный штраф на вариант решения, если распределение нехватки неравномерно. Таким образом, оптимизация функции (6) будет приводить к минимизации суммарной величины объемов новых кредитов вместе с минимизацией наибольшей величины нехватки средств по периодам.

На основе полученных значений величин x_{ij} определяются: число и объемы нужных займов с распределением по всем периодам планового горизонта; оптимальное время займов по каждому из выбранных кредитов; наиболее проблемные периоды относительно обслуживания займов.

Исследование сложности

Проблема оптимального обслуживания внешнего государственного долга Украины принадлежит к числу сложных задач комбинаторной оптимизации. Количество вариантов решения в случае, если опущены ограничения на объем заимствования в год, составляет:

$$|X| = \prod_{i=1}^{K}\left(\left\lfloor \frac{Q_i}{b} \right\rfloor \sum_{j=1}^{T} \min\{T_i, T - j + 1\}\right), \qquad (7)$$

где $\lfloor a \rfloor$ – наименьшее целое число, не превышающее a.

Например, когда все предложения имеют объем 100 единиц, срок действия по 10 месяцев, а параметр дискретизации $b = 1$, рассчитанная по (7) оценка времени полного перебора на ПК класса *Pentium*-IV 2.66 *GHz*, 1 *Gb RAM*, для описанных задач исчисляется годами (рис. 1).

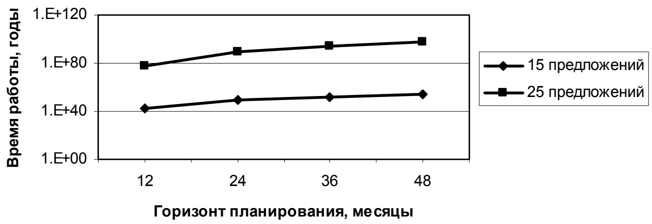

Рис. 1. Оценка времени работы метода полного перебора

Как видим, целевая функция (6) задачи (5) содержит минимакс (см. (2)), а размерность пространства X и ограничивающие условия (2)–(4) делают уместной разработку и применение специальных приближенных алгоритмов решения.

Алгоритмы решения

Для рассмотренной задачи управления внешним государственным долгом Украины разработаны и реализованы программно такие приближенные алгоритмы комбинаторной оптимизации:

- алгоритм детерминированного локального поиска;
- алгоритм поиска в пульсирующих окрестностях;
- алгоритм ускоренного вероятностного моделирования;
- специальный алгоритм на базе случайного локального поиска;
- алгоритм H-метода.

Алгоритм детерминированного локального поиска. Один из простейших универсальных приближенных методов – детерминированный локальный поиск [5]. При решении данной задачи использовались метрические окрестности единичного радиуса с метрикой, которая определена таким образом: $d_m(x,y)=\sum_{i=1}^{K}\left|x_{ij}-y_{ij}\right|\Big/ mb$, где b – параметр дискретизации, m – натуральное число. Размерность такой окрестности в общем случае составляет $2KT$. Непосредственно в алгоритме локального поиска для построения окрестностей использована метрика $d_1(x,y)$.

Алгоритм поиска в пульсирующих окрестностях. Одним из способов использовать преимущества больших окрестностей без затраты при этом значительных ресурсов, является применение одной системы окрестностей до нахождения локального минимума, после чего алгоритм несколько раз переходит к другой (обычно большей) системе окрестностей, что может позволить продолжить процесс поиска решения. В алгоритме поиска в пульсирующих окрестностях системы окрестностей изменяются в пределах заведомо заданного перечня $N_1, N_2, ..., N_s$ [6]. Завершение работы происходит при исчерпании окрестностей в перечне. Была реализована модификация алгоритма, в которой перечень окрестностей задавался таким образом: $N_i(x)=\{y\in X: d_{2^{p-i}}(x,y)=1\}$, $i=1, \ldots$ $\ldots, p$, где p – параметр алгоритма. Предварительный анализ показал, что ему целесообразно придавать значение 10.

Алгоритм ускоренного вероятностного моделирования. В схеме алгоритма ускоренного вероятностного моделирования [7] (G-алгоритма) осуществляется построение решений из окрестности текущего решения, и варианты с лучшим значением целевой функции принимаются всегда, а варианты, соответствующие ухудшению целевой функции, также могут быть выбраны с определенной вероятностью. Вероятность перехода к ухудшающему решению формируется на основе разности значений целевой функции текущего и построенного решения. Именно при возможности перехода к худшему (в понимании целевой функции) решению и обеспечивается выход из локального минимума для продолжения процесса решения и повышение таким образом эффективности алгоритма.

Для решения задачи реализован алгоритм стохастического локального поиска, состоящий в последовательном рестарте G-алгоритма из начальных решений, сгенерированных случайным образом.

Специализированный алгоритм на основе случайного локального поиска. Одним из простейших способов развить детерминированный локальный поиск, чтобы допустить ухудшающие шаги, является осуществление на отдельных итерациях выбора следующего решения случайным образом из окрестности текущего решения [5]. В частности это можно реализовать, введя пороговый параметр, определяющий тип перехода, осуществимый на данной итерации. В отличие от описанных алгоритмов на основе детерминированного локального поиска, в алгоритме случайного локального поиска выполнен переход к первому решению из окрестности с лучшим, чем у текущего решения, значением целевой функции.

В реализации этой задачи метод сначала работает в суженном пространстве решений $\hat{X}$, где средства можно перечислить лишь одним траншем:

$$\hat{X}=\{x\in X: x_{ij}=Q_i \vee x_{ij}=0, i=1,...,K, j=1,...,T\}.$$

Соответственно изменена используемая метрика:

$$\hat{d}_m(x,y)=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{T}(1-\delta_{xy}^{ij}), \delta_{xy}^{ij}=\begin{cases}1, & x_{ij}=y_{ij}\\ 0, & x_{ij}\neq y_{ij}\end{cases}.$$

По завершении алгоритма к найденному решению применен алгоритм детерминированного локального поиска, поскольку общая схема случайного локального поиска не гарантирует нахождения на последней итерации работы метода локального минимума. После нахождения локального оптимума в суженном пространстве к нему применяется процедура перераспределения траншей по периодам с учетом функции недостачи/излишка в стандартном пространстве задачи X: избыточные средства из транша по определенному кредитному соглашению в определенный период переносятся в транш на следующий период, если это не противоречит ограничениям задачи. При излишке средств в последний период горизонта планирования избыточные средства изымаются из предлагаемого варианта решения.

***H*-метод**. В ряде развитых алгоритмов во избежание концентрации поиска в ограниченной подобласти пространства решений задачи и повышения точности получаемых решений использованы процедуры возмущения или рекомбинации и мутации [6]. Отметим, что подобные процедуры порождают подмножества вариантов решений, не согласованных с топологией пространства X. Необходимое согласование обеспечивает H-метод [8]. Использование в нем специальных отрезков дает возможность синтезировать поиск в окрестностях с глобальным сканированием пространства решений X, причем процедура сканирования, в отличие от общих операторов возмущения или рекомбинации большинства других метаэвристических методов, определена конкретно. Детально H-метод рассмотрен в работе [8].

Экспериментальное сравнение реализованных алгоритмов

Проведен вычислительный эксперимент по сравнению времени работы реализованных алгоритмов для задач из 15 кредитных предложений. В эксперименте (рис. 2) вычислено среднее время работы алгоритмов на основе 100 запусков (кроме 10 запусков для H-метода). Здесь L – алгоритм детерминированного локального поиска; P – алгоритм поиска в пульсирующих окрестностях; G – алгоритм ускоренного вероятностного моделирования (G-алгоритм); S – специальный алгоритм на базе случайного локального поиска; H – алгоритм H-метода.

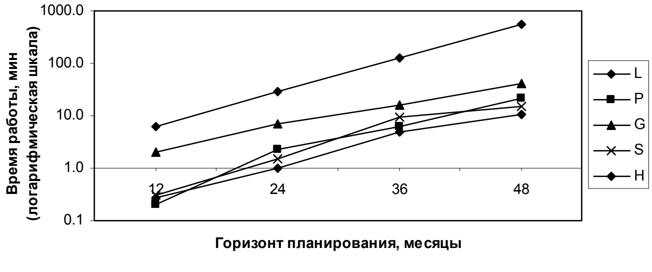

Рис. 2. Оценка времени работы реализованных алгоритмов для 15 предложений

Вычислительный эксперимент показал, что несмотря на приемлемое время работы приближенных алгоритмов на задачах небольшой размерности, характер его зависимости от размерности задачи – экспоненциальный. Это делает целесообразной разработку параллельных версий реализованных приближенных алгоритмов.

Программная реализация

Для решения задачи разработана концепция сценарного подхода к решению задачи оптимизации. Рассмотрим этот вопрос детальнее. Задача оптимизации внешних заимствований опирается на несколько матриц, изменение параметров которых может существенно повлиять на результат оптимизации, а при наличии фиксированных данных существуют временные ограничения для решения задачи. Использование приближенных методов комбинаторной оптимизации, даже специализированных, в общем случае дает решения разного качества.

Итак, можно варьировать большое количество данных и использовать разнообразные методы оптимизации. С учетом этого разработана концепция сценарного подхода, допускающая распараллеливание задачи оптимизации внешних заимствований.

На рис. 3 показана общая структура приложения, предусматривающая, что пользователь задает возможные допуски данных, разработчики программного продукта добавляют к справочнику алгоритмов оптимизации реализации алгоритмов и критерии данных, для которых целесообразно использовать алгоритмы.

Структура представляет собой базовую часть схемы параллельного механизма оптимизации с использованием разных алгоритмов и конфигураций данных. В свою очередь, алгоритмы оптимизации можно также распараллелить.

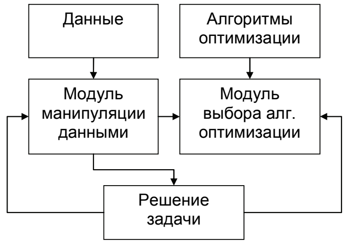

Рис. 3. Схема сценарного подхода

В силу реализации модулей манипулирования данными и выбора алгоритма оптимизации, пользователь может описать в удобной форме все множество имеющихся кредитных предложений, параметров обязательств, средств погашения долгов, схему расчета стоимости кредитных предложений, сформировав таким путем решаемую задачу оптимизации. Качество решения будет зависеть от количества процессоров и времени, отведенного на решение задачи оптимизации. Таким образом, пользователю не требуются глубокие знания комбинаторной оптимизации и он может не тратить время на модификацию входных параметров задачи оптимизации.

Система может накапливать статистическую информацию, способствующую улучшению результатов на основе предыдущих расчетов и использовании методик *knowledge discovery* [9].

Частично описанный подход к решению задачи оптимизации реализован в системе «Моделирование и оптимизация внешнего государственного долга» (на языке *Visual Basic for Application*). Конвейерная обработка данных помогает пользователю строить комбинированные алгоритмы решения. Задача решается в четыре этапа:

1. Анализ данных (рис. 4).
2. Формирование задачи (рис. 5).
3. Оптимизация (рис. 6).
4. Анализ результатов (рис. 7).

Этап 1. Для формирования задачи пользователю предоставлена возможность проанализировать ситуацию, т.е. увидеть базовые статистические показатели функционирования государства. Для этой цели разработан модуль анализа, который может оперировать такими общедоступными данным, как внутренний валовой продукт, экспорт, импорт, резервы НБУ и др. Существует возможность импортировать необходимые данные в статистическую базу данных (БД).

Фактическое построение графиков основано на выборе типа графика и периода, за который необходимо отобразить данные.

Этап 2. После анализа текущей ситуации пользователю предоставляется возможность загрузить или самостоятельно ввести данные, необходимые для формирования задачи оптимизации. На этом этапе предоставляется возможность загрузить с БД имеющиеся данные по кредитным предложениям, выплате по кредитам, годовым ограничениям на объем кредитов, обязательствам, средствам для выплаты обязательств.

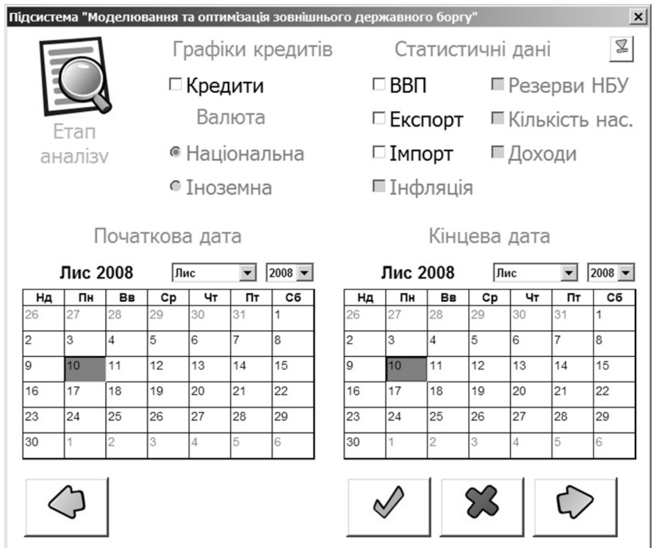

Рис. 4. Интерфейс модуля анализа

Рис. 5. Интерфейс модуля Формирования задачи

После загрузки пользователь может откорректировать данные.

Этап 3. Пользователь вводит необходимые параметры для оптимизации, выбирает соответствующий алгоритм и, опционально, проводит «тонкую» настройку параметров алгоритма.

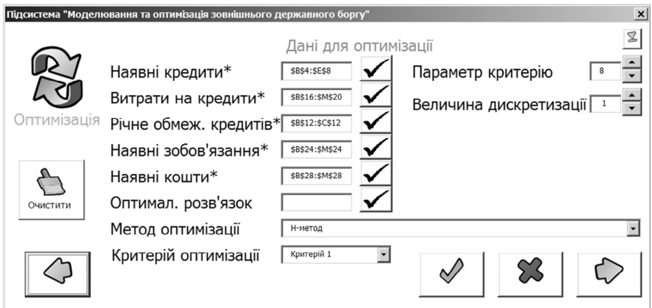

Рис. 6. Интерфейс модуля оптимизации

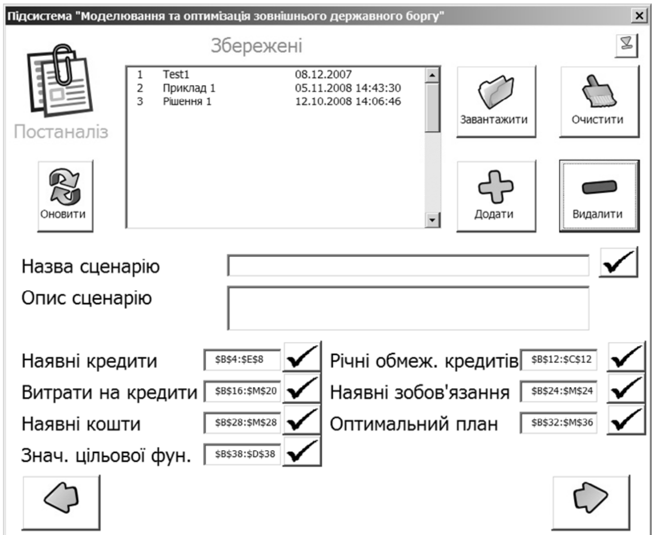

Рис. 7. Модуль анализа результатов

Результатом является оптимальная матрица заимствований в формате Кредит/Период, необходимых для покрытия разрывов между фактически имеющимися средствами и необходимыми выплатами по кредитам, а также значение целевой функции для наглядного сравнения результатов оптимизации.

Поскольку рассматриваемая проблема формируется в виде ЗКО, вероятно получение субоптимального решения. Для дальнейшего улучшения результатов есть возможность передать, как параметр алгоритма, значение предыдущего решения, и таким образом реализовать гибридный конвейер, т.е. постепенно улучшить результаты, используя разные алгоритмы оптимизации.

Этап 4. Назначение этапа: сохранить/загрузить рассчитанные сценарии задач, т.е. пользователь может сохранить и/или загрузить необходимые сценарии для дальнейшего сравнения.

Для реализации анализа использована методика отображения реляционных данных на объекты *VBA*. Для работы с БД использована технология *ADO DB* с предварительно скомпилированными запросами к БД, что существенно повысило скорость взаимодействия.

Заключение. Предложенную модель динамики погашения долговых обязательств и разработанные алгоритмические средства можно использовать для решения задачи стабилизации долговой нагрузки Украины, в частности, при разработке долгосрочной сбалансированной бюджетной политики и поиска оптимального плана погашения долгов, установления четких правил регулирования финансовых обязательств государства, действенного контроля за их соблюдением.

При соответствующей интерпретации понятий планового горизонта и периода разработанную модель можно использовать и для помесячного моделирования процесса управления внешними заимствованиями государства.

Трудоемкость задачи требует эффективной параллельной реализации приближенных методов решения.

1. *Харазішвілі Ю.М.* Теоретичні основи системного моделювання соціально-економічного розвитку України. – К.: ТОВ «ПоліграфКонсалтинг», 2007. – 324 с.
2. *Лук'яненко І.* Системне моделювання показників бюджетної системи України. – К.: ВД «Києво-Могилянська академія», 2004. – 542 с.
3. *Саух С.Е.* Особенности моделирования долговых обязательств Правительства Украины // Электронное моделирование. – 2000. – № 3. – С. 53–59.
4. *Гуляницький Л.Ф.* Моделювання та управління зовнішнім державним боргом України // Праці IV Міжнар. шк.-сем. «Теорія прийняття рішень» (Ужгород, 29 вер. – 4 жов. 2008 р.). – Ужгород: УжНУ, 2008. – С. 72–75.
5. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1984. – 512 с.
6. *Hoos H.H., Stützle T.* Stochastic Local Search: Foundations and Applications. – San-Francisco: Morgan Kaufmann Publ., 2005. – 658 p.

Окончание на стр. 83

7. *Гуляницкий Л.Ф.* Решение задач комбинаторной оптимизации алгоритмами ускоренного вероятностного моделирования // Компьютерная математика: Сб. науч. тр. – К.: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2004. – № 1. – С. 64–72.
8. *Гуляницкий Л.Ф., Сергиенко И.В.* Метаэвристический метод деформируемого многогранника в комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 6 . – С. 70–79.
9. *Kantardzic M.* Data mining : concepts, models, methods, and algorithms. – Hoboken, NJ: Wiley-Interscience : IEEE Press, 2003. – 345 p. – http://en.wikipedia.org/wiki/Knowledge_ Discovery_in_Databases

Поступила 02.06.2009
Тел. для справок: (044) 526-1589, 526-3603 (Киев)

●