УДК 08.00.10/ 01.01.05

Ю.А. Зак

Методы оценки риска в задачах выбора эффективного портфеля ценных бумаг. Принятие решений из конечного множества альтернатив

Рассмотрена задача формирования эффективного портфеля активов ценных бумаг в многокритериальной постановке и в условиях системы ограничений. Некоторые частные критерии эффективности и ограничения определены в виде вероятностей получения объемов прибыли не ниже заданного установленного уровня. Предложены методы решения сформулированных задач в условиях выбора наиболее эффективного решения из конечного множества альтернатив.

A problem of forming an efficient portfolio of securities is considered in a multiobgective formulation and in terms of a system of constraints. Some particular performance criteria and limitations specified in the form of the probability of obtaining some capital gains are not below a specified set level. The methods for solving the formulated problems in conditions of selecting the most efficient solution from a set of alternatives are suggested.

Розглянуто задачу формування ефективного портфеля активів цінних паперів у багатокритеріальній постановці та за умов системи обмежень. Певні критерії ефективності та обмеження визначені як імовірності отримання обсягів прибутків не менше заданого встановленого рівня. Запропоновано методи розв’язання сформульованих задач в умовах вибору найбільш ефективного розв’язання з кінцевої множини альтернатив.

Введение. Во всех инвестиционных проектах, например, покупке акций, никогда не существует некоторого твердо установленного (детерминированного) процента ожидаемого объема прибыли по каждому из возможных источников вложений капитала. Наряду с достаточно высокой вероятностью получения определенных объемов прибыли E всегда существует риск либо не получить ожидаемой прибыли, либо даже понести определенные потери. Этот риск связан с внешнеэкономическими и социологическими факторами, политическими событиями, эффективностью работы компаний, конъюнктурой рынка и др. Поведение многих факторов, оказывающих на это влияние, априори неизвестны. Поэтому проценты ожидаемой прибыли или потерь по каждому из направлений инвестиций на перспективу могут рассматриваться как случайные переменные с заданными математическими ожиданиями и моментами распределения более высоких порядков. Между этими случайными величинами, как правило, существуют определенные корреляционные зависимости, так как на результаты работы всех компаний оказывают влияние общие внешнеэкономические, социологические и политические факторы, компании зачастую связаны друг с другом хозяйственными связями, общими источниками поставок и сбыта.

Существенно ниже вероятность того, что экономические результаты работы всех (или сразу нескольких из выбранного множества компаний) будут отрицательны. Поэтому неудачное вложение в одно из направлений инвестиций может быть успешно компенсировано высокой эффективностью вложения в другие направления. С целью уменьшения вероятности риска и сокращения возможных объемов потерь экономические рекомендации и известные в литературе математические модели рекомендуют формировать так называемый *Portfolie* – т.е. оптимальный портфель инвестиций (акций), а значит распределить весь свой объем инвестиций на несколько слабо коррелированных друг с другом направлений с целью достижения желаемого соотношения объемов ожидаемой прибыли и уровнем допускаемого риска потерь. Такие подходы рассматривались многими авторами (модели *Markowitz*, *Asset Pricing Model von Sharpe und Lintner* и др.). Классическая модель формирования портфеля активов на фон-

Ключевые слова: эффективный портфель активов ценных бумаг, вероятностные ограничения, многокритериальная оптимизация, конечное множество альтернатив.

довом рынке (модель Марковица–Тобина) сводится, как известно [1, 2], к решению двухкритериальной оптимизационной задачи. Риск портфеля оценивается по известным формулам теории вероятности через вариации и ковариации этих активов. Эффективные *Portfolie* должны обеспечить максимальную величину математического ожидания прибыли при минимуме дисперсии отклонений от данного значения. Как правило, не существует таких *Portfolie,* которые при высоком математическом ожидании прибыли обеспечивают минимальные проценты риска. Поэтому при формировании оптимальных *Portfolie* должны использоваться определенные схемы компромисса.

Доминирующее определение риска как дисперсии доходности объясняется простотой этого измерителя и в какой-то степени традицией. Адекватность такого измерителя риска зачастую подвергается сомнению [6]. Основными из них являются следующие:

- дисперсия характеризует *все* отклонения доходности от своего математического ожидания, в то время как с термином «риск» для инвестора связаны только неблагоприятные для него отрицательные отклонения;
- дисперсия не раскрывает распределение (структуру) отклонений, т.е. одна ценная бумага с преобладанием положительных отклонений может иметь такую же дисперсию, как другая ценная бумага с преобладанием отрицательных отклонений от математического ожидания прибыли. При этом от инвестора будет скрыт больший риск потерь при покупке второй из них;
- значения математического ожидания и дисперсии прибыли не дают инвестору полной информации в понятных для него показателях о распределении вероятности ожидаемых объемов прибыли и возможных потерь, т.е. о степени риска при принятии решений.

В работах [3–9] рассматриваются следующие альтернативные измерители риска. В качестве таких показателей используются математическое ожидание величины отрицательных отклонений, вероятность получения дохода меньше ожидаемого значения, а также величины моментов отклонений более высоких порядков.

В статье предлагаются математические модели позволяющие устранить некоторые из отмеченных выше для инвестора неопределенностей. Задача формирования эффективного портфеля активов ценных бумаг рассматривается в многокритериальной постановке и в условиях системы ограничений, в которой некоторые частные критерии эффективности и ограничения определены в виде вероятностей получения объемов прибыли не ниже заданного установленного уровня и вероятностей того, что величины потерь инвестора более заданной установленной величины не превысят некоторых допустимых значений лицом, принимающим решение. Предлагаются методы решения сформулированных задач в условиях выбора наиболее эффективного решения из конечного множества альтернатив. Предлагаемые математические модели и алгоритмы иллюстрируются числовым примером.

Постановка и математическая модель задачи

Рассмотрим задачу в более формальной постановке.

Весь объем инвестиций A может быть распределен по K направлениям (источникам финансирования). Пусть α_k – доля общего объема, направленная в k-й источник вложения активов, где

$$\sum_{k=1}^{K}\alpha_k = 1,\ 0 \le \alpha_k \le 1,\ k = 1,..,K\,. \tag{1}$$

Тогда объем инвестиций, предлагаемый в k-е направление, равен $A_k = \alpha_k A$.

Для каждого направления известны m_k – математическое ожидание объема возможной прибыли на единицу вложенного капитала, $V_k = \sigma_k^2$ – дисперсия доли ожидаемой прибыли.

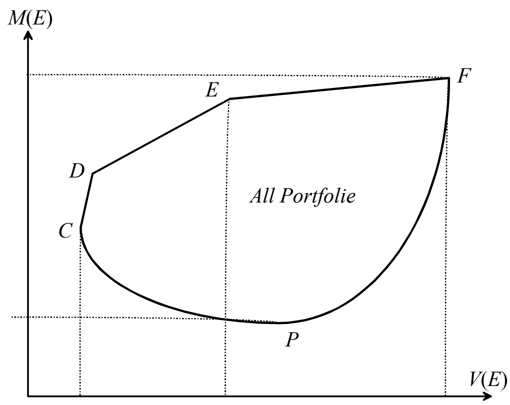
Пусть также известны коэффициенты корреляции случайных величин $0 \le \rho_{kl} \le 1$, где $\rho_{kk} = \sigma_k^2, \rho_{ll} = \sigma_l^2,\ k,\ l = 1,..,K$.

При данном распределении инвестиций математического ожидания дисперсия возможной прибыли сформированного *Portfolie* определяется выражением

$$M(E)=\sum_{k=1}^{K} m_k A_k\ , \qquad (2)$$

$$\sigma^2(E)=V(E)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K} A_k A_l \rho_{kl}\sigma_k\sigma_l\ . \qquad (3)$$

На рисунке показано множество возможных *Portfolie* в система координат $V(E)=\sigma^2(E)$ и $M(E)$ (кривая $CDEFP$). Точка C – определяет план инвестиций с минимальной долей риска, точка F – *Portfolie* с максимальным математическим ожиданием возможной прибыли, однако риск при этом максимален. Кривая $CDEF$ – это множество эффективных *Portfolie* – некоторый аналог множества Парето, т.е. для любой точки этой кривой увеличение математического ожидания объема полученной прибыли может быть достигнуто увеличением доли риска получения потерь. Область пространства, лежащая ниже кривой $CDEF$, не представляет особого интереса. Это связано с тем, что для любой из точек этой области существуют решения, позволяющие либо увеличить математическое ожидание объема полученной прибыли при данном или даже меньшем уровне риска, либо сократить риск (дисперсию) при том же или более высоком уровне ожидаемой прибыли.



Множество всех возможных *Portfolie*

Представляют интерес также моменты более высоких порядков случайной величины суммарного объема ожидаемой прибыли, определяемого *Portfolie,*

$$S(E)=M\left\{\frac{\left[E-M(E)\right]^3}{\sigma^3(E)}\right\}, \qquad (4)$$

который выявляет характер отклонений от математического ожидания. Если $S(E)>0$, то в распределении преобладают отклонения вверх от величины $M(E)$, если $S(E)<0$, то преобладают отклонения вниз от математического ожидания, $S(E)=0$ – распределение симметрично.

Наличие больших отклонений от величины математического ожидания (как вверх, так и вниз, если они намного существеннее, чем слабые отклонения) характеризуется четвертым моментом распределения

$$R(E)=M\left\{\frac{\left[E-M(E)\right]^4}{\sigma^4(E)}\right\}. \qquad (5)$$

Для нормального распределения $R(E)=3$, при $R(E)>3$ существует большая вероятность значительных по величине отклонений.

В строгой многокритериальной постановке задача выбора оптимального *Portfolie* представляется в виде:

$$F_1=\max_{\alpha_1,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_K} A\sum_{k=1}^{K}\alpha_k m_k\ , \qquad (6)$$

$$F_2=\min_{\alpha_1,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_K} A^2\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\sigma_k\alpha_l\sigma_l\rho_{kl}\ . \qquad (7)$$

В большинстве публикаций и в практических приложениях решение задачи осуществляется с помощью линейной свертки критериев

$$F_3=\max_{\alpha_1,\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_K}\left[A\sum_{k=1}^{K}\alpha_k m_k-\right.$$
$$\left.-\eta A^2\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\sigma_k\alpha_l\sigma_l\rho_{kl}\right], \qquad (8)$$

где $0,2\le\eta\le 0,3$ – некоторый весовой коэффициент.

Для лица, принимающего решение, в ряде случаев значение дисперсии распределения объема ожидаемой прибыли недостаточно ясно раскрывает картину степени его возможного риска. Было бы понятнее, если бы риск инвестиций был проиллюстрирован некоторой системой вероятностных показателей типа

$$p\left\{E \le B_{\xi}\right\} \le q_{\xi}, \ \xi = 1,...,n, \quad (9)$$

$$p\left\{E \ge D_{\omega}\right\} \ge g_{\omega}, \ \omega = 1,...,v. \quad (10)$$

Таким образом, вероятность того, что потери будут не выше некоторой заранее установленной величины B_ξ, должны быть больше значения q_ξ, а вероятности того, что прибыль будет больше или равна некоторой установленной величины D_ω, должна быть не меньше значения g_ω.

Для конкретных значений распределения инвестиций, т.е. для выбранных значений α_k, $k = 1, \dots, K$, значения вероятностей $p\{E \le B_\xi\}$ и $p\{E \ge D_\omega\}$ определяются методами имитационного моделирования. Если существует несколько относительно независимых друг от друга источников инвестирования, случайные величины показателей которых слабо коррелированы, то, в соответствии с предельной теоремой теории вероятностей, с достаточной степенью точности закон распределения суммы прибылей от нескольких источников финансирования может быть аппроксимирован нормальным законом распределения с математическим ожиданием и дисперсией, определяемыми выражениями (2) и (3). Значения вероятностей $p\{E \le B_\xi\}$ и $p\{E \ge D_\omega\}$ в этом случае могут быть легко вычислены для любых значений α_k, определяемых выражением (1).

Следовательно, в качестве альтернативной постановки задачи выбора оптимального *Portfolie* распределения объема инвестиций может быть предложена математическая модель многокритериальной оптимизации вида

$$\Phi_1 = \max_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_K} \left\{ \sum_{k=1}^{K} m_k[\alpha_k A] \right\}; \quad (11)$$

$$\Phi_2 = \min_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_K} \left\{ \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{K} [\alpha_k A][\alpha_l A]\rho_{kl}\sigma_k\sigma_l \right\}; (12)$$

$$\Phi_{3\xi} = \min_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_K} p\left\{E\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_K\right) \le B_\xi\right\}, \quad \xi = 1,...,n; \quad (14)$$

$$\Phi_{4w} = \max_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_K} \left[p\left\{E(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_K) \ge D_\omega\right\}\right], \quad \omega = 1,...,v. \quad (15)$$

Для фиксированных значений вероятностей β_t, $t = 1, \dots, T$, и π_w, $w = 1, \dots, W$, обеспечить

$$\Phi_{5t} = \max_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_K} \left[\overline{B_t} : p\left\{E(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_K) \le \overline{B_t}\right\} \le \beta_t\right], \quad t = 1, \dots, T; \quad (16)$$

$$\Phi_{6w} = \max_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_K} \left[\overline{D_w} : p\left\{E(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_K) \ge \overline{D_w}\right\} \ge \pi_w\right], \quad w = 1, \dots, W. \quad (17)$$

Таким образом, критерии Φ_{5t}, $t = 1, \dots, T$, минимизируют значение потерь или невысоких показателей достигаемой прибыли, которые при формируемом *Portfolie* могут наступить с вероятностью, не выше заданной β_t, а Φ_{6w}, $w =$ $= 1, \dots, W$, – максимизируют пороговое значение прибыли, получение которой гарантируется с вероятностью не ниже заданной π_w.

Задача выбора оптимального портфеля инвестиций может быть сформулирована также в виде многокритериальной задачи в условиях системы вероятностных ограничений, устанавливающих более жесткие требования на кривую распределения объема ожидаемой прибыли.

В качестве схемы компромисса решения сформулированной многокритериальной задачи о формировании оптимального *Portfolie* рассмотрим математическую модель с двумя критериями оптимальности (2) и (3), наложив на остальные показатели некоторые пороговые ограничения вида

$$p\left\{E(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_K) \le D_\omega\right\} \le P_\omega^1, \quad \omega = 1, \dots, v; \quad (18)$$

$$p\left\{E(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_K) \ge B_\xi\right\} \ge P_\xi^2 \quad \xi = 1, \dots, n; \quad (19)$$

$$\left\{\overline{D_w} \le S_w^1 : p\left\{E(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_K) \le \overline{D_w}\right\} \le P_w^3\right\}, \quad w = 1, \dots, W; \quad (20)$$

$$\left\{\overline{B_t} \ge S_t^2 : p\left\{E(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_K) \ge B_t\right\} \ge P_t^4\right\}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (21)$$

Применяя линейную свертку критериев (2) и (3) в виде (8), приходим к решению задачи многоэкстремальной математического программирования относительно переменных $0 \le \alpha_k \le 1$, $k = 1, \dots, K$, в условиях ограничений (1), (18)–(21).

Выбор наиболее эффективного решения из конечного множества альтернатив

Рассматриваются методы решения задачи (1)–(4) в условиях, когда выбор необходимо осуществить из конечного числа R_l, $l = 1, \ldots, L$, альтернатив.

Отсев неперспективных альтернатив

Для каждой из альтернатив определим значения левых частей ограничений (18)–(21), которые для дальнейшего упрощения изложения обозначим $f_i(X \mid R_l) \le v_i$, $i = 1, \ldots, m$, и всех рассматриваемых локальных критериев эффективности (11)–(17) –

$$\varphi_s(A \mid R_l) = \varphi_s(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_K \mid R_l),$$
$$s = 1, \ldots, S, \; l = 1, \ldots, L.$$

• Среди всего множества рассматриваемых альтернатив R_l, $l = 1, \ldots, L$, оставляем только такие $l = 1, \ldots, L_1 \le L$, которые удовлетворяют всем ограничениям задачи (18)–(21). Обозначим подмножество допустимых и рассматриваемых в дальнейшем альтернатив $\overline{\Lambda}$.

• Без ограничения общности можно рассматривать все локальные критерии эффективности как максимизирующие критерии, т.е.

$$\varphi_s(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_K) \to \max, \; s = 1, \ldots S.$$

При этом выражения для минимизирующих критериев рассматриваются со знаком « – ».

Правило доминирования 1

Если для двух альтернатив A_l и A_q справедливы условия

$$\varphi_s(A \mid R_l) \ge \varphi_s(A \mid R_q), \; s = 1, \ldots S, \; l \in \overline{\Lambda}, \; q \in \overline{\Lambda},$$

то альтернатива $A_l \succ A_q$, т.е альтернатива A_l доминирует над альтернативой A_q и альтернатива A_q может быть отброшена как неперспективная.

Оставшееся после исключения из рассмотрения подмножество альтернатив $\widetilde{\Lambda} \subseteq \overline{\Lambda}$ и составляет множество Парето. Среди этого подмножества альтернатив и проводится в дальнейшем поиск наиболее эффективной альтернативы.

***Правило доминирования* 2**

Если найдется некоторая альтернатива R_λ, что для всех остальных R_q, $q \in \overline{\Lambda}$, выполняются условия

$$\varphi_s(A \mid R_\lambda) \ge \varphi_s(A \mid R_q), \; s = 1, \ldots S,$$

то получено решение задачи и R_λ является решением задачи, т.е. наиболее эффективной из всего множества альтернатив.

В противном случае среди допустимого подмножества альтернатив $\widetilde{\Lambda}$, образующих множество Парето, находится наиболее эффективная, которая обеспечивает максимальное значение некоторого компромиссного критерия оптимальности, учитывающего предпочтения инвестора среди множества рассматриваемых локальных критериев.

Введение комплексного критерия эффективности и наиболее эффективной альтернативы

Для формирования компромиссного критерия эффективности в виде линейной свертки локальных критериев выполняем следующий объем вычислений:

• Среди подмножества допустимых альтернатив определим

$$\varphi_s^+(A) = \max_{\substack{1 \le l \le L_2, \\ l \in \tilde{\Lambda}}} \varphi_s(A \mid R_l), \; \varphi_s^+(A) = \min_{\substack{1 \le l \le L_2, \\ l \in \tilde{\Lambda}}} \varphi_s(A \mid R_l),$$
$$s = 1, \ldots, S.$$

Здесь L_2 – количество альтернатив в подмножестве $\widetilde{\Lambda}$.

• Выполним нормировку локальных критериев оптимальности каждой из допустимых альтернатив, например, в соответствии с выражениями

$$\overline{\varphi}_s(A \mid R_l) = \frac{\varphi_s(A \mid R_l) - \varphi_s^-(A)}{\varphi_s^+(A) - \varphi_s^-(A)}, \; l \in \widetilde{\Lambda}, \; s = 1, \ldots S.$$

При таком виде нормировки значения $\overline{\varphi}_s(A \mid R_l)$ для всех альтернатив лежат в пределах

$$0 \le \overline{\varphi}_s(A \mid R_l) \le 1.0.$$

Значение обобщенного компромиссного критерия эффективности выбираем в виде линейной свертки локальных нормированных критериев в виде

$$F(A \mid R_l) = \sum_{s=1}^{S} \beta_s \overline{\varphi}_s(A \mid R_l),$$

где $0 \le \beta_s \le 1$, $s = 1, \ldots S$, $\sum_{s=1}^{S} \beta_s = 1$, – весовые коэффициенты, значение которых выбирает инвестор и эксперты на основе предпочтений конкретной прикладной задачи.

Для каждой альтернативы вычисляется значение выбранного компромиссного критерия эффективности $F(A\,|\,R_l)$. В качестве наиболее эффективной альтернативы выбирается такая, значение компромиссного критерия эффективности для которой достигает максимального значения

$$\max_{l\in\tilde{\Lambda}} F(A\,|\,R_l) = \max_{l\in\tilde{\Lambda}} \sum_{s=1}^{S} \beta_s \overline{\varphi}_s(A\,|\,R_l)\,.$$

Выбор эффективного решения сформулированных задач может осуществляться как из конечного множества альтернатив, так и как результат решения многоэкстремальной задачи математического программирования, в которой вектор переменных задачи может принимать как конечное множество, так и бесконечное множество значений, принадлежащих n-мерному параллелепипеду $0 \le \alpha_k \le 1,\ k = 1,..,K$.

Иллюстративный пример

Рассмотрим следующую постановку задачи оптимального распределения денежных средств в различные проекты с целью получения через определенный период времени наилучшего показателя эффективности, которая по своей математической формулировке несколько отличается от рассматриваемых в литературе постановок задач *Portfolie* или *Risikomanagement*.

Инвестор может вложить в сумме $A = 1$ млн € в каждый из четырех проектов. Первый проект – это срочный вклад денежных средств в банк с гарантированной прибылью g_1 = 5%, p_1 = 1,0, от вложенных средств в год. Проекты 2–4 связаны с некоторым риском потерь вложенных средств, но могут принести значительно больший процент прибыли. Возможные доли прибыли по второму проекту и вероятности их получения сведены в табл. 1.

Возможные доли прибыли по проектам 3 и 4 приведены в табл. 2.

Вероятности различных исходов по проектам 3 и 4 взаимозависимы и представлены двухмерным дискретным распределением вероятностей, приведенным в табл. 3.

Выбор требуется осуществить из 12-ти возможных альтернатив R_l, $l = 1, \ldots, 12$, R_l вложения средств в различные проекты, показатели которых сведены в табл. 4.

В качестве ограничений приемлемости альтернатив рассматриваются следующие.

Вероятность того, что объем прибыли будет больше или равен 50000 €, должна быть не меньше 0,65, и вероятность того, что будет отрицательная прибыль, т.е. убытки, должна быть меньше или равна 0,1. Значит

$$\varphi_1(R_l) =: p\{(E\,|\,R_l) \ge 50000\} \ge 0{,}65\,,$$

$$\varphi_2(R_l) =: p\{(E\,|\,R_l) < 0\} \le 0{,}1\,,\ l = 1,...,12\,.$$

В качестве частных критериев эффективности рассматриваются следующие три показателя:

– максимум математического ожидания получения прибыли

$$f_1(E\,|\,R_\lambda) = \max_{1\le l\le 12} m(E\,|\,R_l)\,;$$

– максимальное значение вероятности того, что объем прибыли будет больше или равен 80 тыс. €,

$$f_2(E\,|\,R_\nu) = \max_{1\le l\le 12} p\{(E\,|\,R_l) \ge 80000\}\,;$$

– минимальное значение вероятности того, что вложение средств в проекты принесет убытки (отрицательное значение прибыли),

$$f_3(E\,|\,R_\nu) = \min_{1\le l\le 12} p\{(E\,|\,R_l) < 0\}\,.$$

Значение комплексного компромиссного критерия эффективности определим в виде

$$F(E\,|\,\overline{R}) = \max_{1\le s\le 12}[\beta_1\overline{\varphi}_1(E\,|\,R_s) +$$
$$+\beta_2\overline{\varphi}_2(E\,|\,R_s) - \beta_3\overline{\varphi}_3(E\,|\,R_s)].$$

В качестве примера в приложении 1 приведены расчетные формулы вычисления всех вероятностных показателей для 1-й альтернативы.

Математическое ожидание полученной прибыли для альтернативы 1 определяется выражением

$$m\{E\,|\,R_1\} = A_1^1 + A_1^2 \sum_{\varsigma=1}^{7} g_2^\varsigma p_2^\varsigma +$$
$$+\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{6} (A_1^3 g_3^i + A_1^4 g_4^j)\, p_{34}^{ij} = 63230.$$

Т а б л и ц а 1. Возможные доли прибыли по второму проекту и вероятности их получения

	Возможные варианты получения прибыли или потерь (в долях от объемов вложенных в проект средств) при вложении денежных средств во 2-й проект						
Варианты	1	2	3	4	5	6	7
Доля прибыли (потерь)	$g_2^1 = –0{,}05$	$g_2^2 = –0{,}03$	$g_{23}^1 = 0{,}01$	$g_2^4 = 0{,}05$	$g_2^5 = 0{,}08$	$g_2^6 = 0{,}1$	$g_2^7 = 0{,}15$
Вероятность	$p_2^1 = 0{,}06$	$p_2^2 = 0{,}09$	$p_2^3 = 0{,}12$	$p_2^4 = 0{,}13$	$p_2^5 = 0{,}2$	$p_2^6 = 0{,}2$	$p_2^7 = 0{,}15$

Т а б л и ц а 2. Возможные доли прибыли по проектам 3 и 4

Проекты	Ожидаемые объемы прибыли или убытков (в долях от объемов вложенных в проект средств)					
3	$g_3^1 = –0{,}05$	$g_3^2 = 0{,}01$	$g_3^3 = 0{,}05$	$g_3^4 = 0{,}08$	$g_3^5 = 0{,}12$	$g_3^6 = 0{,}16$
4	$g_4^1 = –0{,}06$	$g_4^2 = 0{,}02$	$g_4^3 = 0{,}06$	$g_4^4 = 0{,}12$	$g_4^5 = 0{,}18$	–

Т а б л и ц а 3. Вероятности различных исходов по проектам 3 и 4

Проекты вложений денежных средств	Двухмерное распределение вероятностей различных исходов по 3-му и 4-му проекту вложений денежных средств					
	1 (–0,05*A)	2 (0,01*A)	3 (0,05*A)	4 (0,08*A)	5 (0,12*A)	6 (0,18*A)
1 (–0,6*A)	$p_{34}^{11} = 0{,}03$	$p_{34}^{12} = 0{,}04$	$p_{34}^{13} = 0{,}02$	$p_{34}^{14} = 0{,}03$	$p_{34}^{15} = 0{,}02$	$p_{34}^{16} = 0{,}01$
2 (0,2*A)	$p_{34}^{21} = 0{,}04$	$p_{34}^{22} = 0{,}04$	$p_{34}^{23} = 0{,}03$	$p_{34}^{24} = 0{,}02$	$p_{34}^{25} = 0{,}04$	$p_{34}^{26} = 0{,}03$
3 (0,6*A)	$p_{34}^{31} = 0{,}05$	$p_{34}^{32} = 0{,}03$	$p_{34}^{33} = 0{,}04$	$p_{34}^{34} = 0{,}02$	$p_{34}^{35} = 0{,}06$	$p_{34}^{36} = 0{,}05$
4 (0,12*A)	$p_{34}^{41} = 0{,}02$	$p_{34}^{42} = 0{,}03$	$p_{34}^{43} = 0{,}03$	$p_{34}^{44} = 0{,}05$	$p_{34}^{45} = 0{,}04$	$p_{34}^{46} = 0{,}06$
5 (0,18*A)	$p_{34}^{51} = 0{,}01$	$p_{34}^{52} = 0{,}02$	$p_{34}^{53} = 0{,}03$	$p_{34}^{54} = 0{,}03$	$p_{34}^{55} = 0{,}03$	$p_{34}^{56} = 0{,}05$

Т а б л и ц а 4. Альтернативы вложений средств в различные проекты

Альтернативы вложений в проекты	Объемы вложений в различные проекты (в €)			
	1	2	3	4
1	200000	500000	100000	200000
2	300000	200000	400000	100000
3	400000	300000	100000	200000
4	100000	400000	250000	250000
5	–	600000	100000	300000
6	400000	600000	–	–
7	250000	250000	250000	250000
8	300000	400000	300000	–
9	100000	600000	200000	100000
10	200000	–	500000	300000
11	100000	500000	–	400000
12	–	900000	100000	

Значения всех показателей, определяющих правые части ограничений, и частных критериев эффективности для каждой из альтернатив, сведены в табл. 5.

Альтернативы 2 (так как $p\{(E\,|\,R_2) \geq 50000\} = 0{,}6385 < 0{,}65$), 4 (так как $p\{(E\,|\,R_4) \geq 50000\} = 0{,}6378 < 0{,}65$), 6 (так как $p\{(E\,|\,R_6) < 0\} = 0{,}15 > 0{,}1$), 9 (так как $p\{(E\,|\,R_9) < 0\} = 0{,}1095 > 0{,}1$) и 12 (так как $p\{(E\,|\,R_{12}) < 0\} = 0{,}15 > 0{,}1$) исключаются из дальнейшего рассмотрения как неудовлетворяющие системе предусмотренных ограничений.

В результате попарного сравнения оставшихся альтернатив приходим к следующим заключениям:

◊ сравнивая значения частных критериев эффективности 5-й и 8-й альтернативы, так как 0,06 < 0,0735, 0,4177 > 0,2816, 66600 > 61720 и, следовательно, альтернатива 5 превосходит альтернативу 8 по всем показателям, альтернатива 8 может быть отброшена как неперспективная;

◊ аналогично при сравнении альтернатив 5 и 10 – 0,06 < 0,09, 0,4177 > 0,4, 66600 > 64660 и альтернатива 10 может быть отброшена как неперспективная;

◊ аналогично при сравнении альтернатив 5 и 11 – $0{,}06 < 0{,}0705$, $0{,}4177 > 0{,}2985$, $66600 > 65030$ и альтернатива 11 может быть отброшена как неперспективная.

Для дальнейшего рассмотрения остаются 4 следующие альтернативы: 1, 3, 5, 7; значения частных критериев эффективности сведены в табл. 6.

Нормировку частных критериев эффективности выполним в соответствии с выражениями

$$\overline{\varphi}_i(E\,|\,R_s) = \min_{s\in\{1,3,5,7\}} \varphi_i(E\,|\,R_s) + \\ + \frac{\varphi_i(E\,|\,R_s)}{\max\limits_{s\in\{1,3,5,7\}} \varphi_i(E\,|\,R_s) - \min\limits_{s\in\{1,3,5,7\}} \varphi_i(E\,|\,R_s)},$$

$$i = 1,2,3\,;\; s = 1,3,5,7\,.$$

Нормированные значения частных критериев эффективности перспективных альтернатив и значения их комплексных показателей эффективности, вычисленные по формуле

$$F(E\,|\,R_s) = 0{,}5\overline{\varphi}_1(E\,|\,R_s) + 0{,}15\overline{\varphi}_2(E\,|\,R_s) - \\ - 0{,}35\overline{\varphi}_3(E\,|\,R_s), \quad s = 1, 3, 5, 7,$$

сведены в табл. 7.

Как показали результаты расчетов, наиболее предпочтительной оказалась 5-я альтернатива, которая, хотя и связана с наибольшим риском получения убытков, по комплексному показателю эффективности существенно превосходит все остальные альтернативы.

Заключение. При формировании эффективного портфеля активов ценных бумаг для лица, принимающего решение, в ряде случаев значение дисперсии распределения объема ожидаемой прибыли недостаточно ясно раскрывает картину степени его возможного риска. Формулируемые в работе система ограничений и локальных критериев эффективности в виде вероятностей получения объемов прибыли (не ниже заданного установленного уровня) и вероятности потерь (не более заданной установ-

Таблица 5. Показатели эффективности по каждой из альтернатив

Альтернативы вложений в проекты	Показатели эффективности по каждой из альтернатив			
	$p\{(E\,|\,R_s) \ge 50000\}$	$p\{(E\,|\,R_s) < 0\}$	$p\{(E\,|\,R_s) \ge 80000\}$	$m\{(E\,|\,R_s\}$
1	0,67	0,0534	0,3535	63230
2	0,6385	0,0339	0,3395	62220
3	0,6579	0,0069	0,3125	60150
4	0,6378	0,0339	0,3518	65350
5	0,6596	0,06	0,3518	66600
6	0,73	0,15	0,4	59300
7	0,6682	0,0213	0,2576	63025
8	0,687	0,0735	0,2816	61720
9	0,6605	0,105795	0,3959	64800
10	0,82	0,09	0,4	64660
11	0,6825	0,0705	0,2985	65030
12	0,6897	0,15	0,508	65790

Таблица 6. Значения частных критериев эффективности перспективных альтернатив

№ п.п.	№ альтернативы	Значения частных критериев эффективности		
		$m\{(E\,|\,R_s\}$	$p\{(E\,|\,R_s) \ge 80000\}$	$p\{(E\,|\,R_s) < 0\}$
1	1	63220	0,3535	0,0534
2	3	62220	0,3395	0,0339
3	5	66600	0,4177	0,06
4	7	63025	0,2576	0,0213

Таблица 7. Значения комплексных показателей эффективности перспективных альтернатив

№ п.п	№ альтернативы	Нормированные значения частных критериев эффективности			Значения комплексных показателей эффективности
		$m\{(E\,|\,R_s\}$	$p\left\{G \ge 80000\right\}$	$p\{(E\,|\,R_s) < 0\}$	
1	1	0,2283	0,599	0,823	–0,08405
2	3	0	0,5116	0,3256	–0,3792
3	**5**	**1,0**	**1,0**	**1,0**	**+0,3**
4	7	0,183	0	0	–0,09195

ленной инвестором величины) позволяют более объективно оценить эффективность принимаемого инвестором решения. Предложены методы решения сформулированных многоэкстремальных задач в условиях выбора наиболее эффективного решения из конечного множества альтернатив. Разработанные математические модели и алгоритмы проиллюстрированы числовым примером.

Приложение 1

Расчетные формулы вычисления вероятностных показателей для 1-й альтернативы.

$$p\{(E\,|\,R_1) \ge 50000\} = \sum_{\Omega_1} p_1 p_2^k p_{34}^{ij} = p_1[p_2^3(p_{34}^{36} + p_{34}^{45} + p_{34}^{46} + p_{34}^{55} + p_{34}^{56}) + p_2^4(p_{34}^{15} + p_{34}^{16} + \sum_{j=4}^{6} p_{34}^{2j} + \sum_{j=3}^{6} p_{34}^{3j} + \sum_{j=2}^{6} p_{34}^{4j} + \sum_{j=2}^{6} p_{34}^{5j}) + p_2^5(\sum_{j=3}^{6} p_{34}^{1j} + \sum_{j=2}^{6} p_{34}^{2j} + \sum_{j=2}^{6} p_{34}^{3j} + \sum_{j=1}^{6} p_{34}^{4j} + \sum_{j=1}^{6} p_{34}^{5j}) + p_2^6(\sum_{j=2}^{6} p_{34}^{1j} + \sum_{i=2}^{5}\sum_{j=1}^{6} p_{34}^{ij}) + p_2^7 \sum_{i=2}^{5}\sum_{j=1}^{6} p_{34}^{ij}] = 0,67,$$

т.е.

$$p\{(E\,|\,R_1) \ge 50000\} = \sum_{\Omega_1} p_1 p_2^k p_{34}^{ij} = p_1[p_2^3(p_{34}^{36} + p_{34}^{45} + p_{34}^{46} + p_{34}^{55} + p_{34}^{56}) + p_2^4(p_{34}^{15} + p_{34}^{16} + p_{34}^{24} + p_{34}^{25} + p_{34}^{26} + p_{34}^{33} + p_{34}^{35} + p_{34}^{36} + p_{34}^{42} + p_{34}^{43} + p_{34}^{44} + p_{34}^{45} + p_{34}^{46} + p_{34}^{52} + p_{34}^{53} + p_{34}^{54} + p_{34}^{55} + p_{34}^{56})] = 0,67,$$

где

$$\Omega_1 =: \{p_1;\, p_2^{\varsigma}, \varsigma = 1,2,..,7;\, p_{34}^{ij}, i = 1,2,..,5,\, j = 1,2,..,6\,|\,(A_1^1 g_1 + A_2^k g_2^k + A_3^i g_3^i + A_4^j g_4^j) \ge 50000\};$$

$$p\{(E\,|\,R_1) < 0\} = \sum_{\Omega_2} p_1 p_2^k p_{34}^{ij} = p_1[p_2^1(p_{34}^{11} + p_{34}^{12} + p_{34}^{13} + p_{34}^{14} + p_{34}^{21} + p_{34}^{22} + p_{34}^{23} + p_{34}^{31} + p_{34}^{32} + p_{34}^{41} + p_{34}^{42} + p_{34}^{51}) + p_2^2(p_{34}^{11} + p_{34}^{12} + p_{34}^{14} + p_{34}^{21} + p_{34}^{31}) + p_2^3 p_{34}^{11}] = 0,0534,$$

где

$$\Omega_2 =: \{p_1;\, p_2^{\varsigma}, \varsigma = 1,2,..,7;\, p_{34}^{ij}, i = 1,2,..,5,\, j = 1,2,..,6\,|\,(A_1^1 g_1 + A_2^k g_2^k + A_3^i g_3^i + A_4^j g_4^j) < 0\};$$

$$p\{(E\,|\,R_1) \ge 80000\} = \sum_{\Omega_3} p_1 p_2^k p_{34}^{ij} = p_1[p_2^4 p_{34}^{56} + p_2^5(p_{34}^{15} + p_{34}^{26} + p_{34}^{35} + p_{34}^{36} + p_{34}^{45} + p_{34}^{46} + p_{34}^{54} + p_{34}^{56}) + p_2^6(p_{34}^{16} + p_{34}^{25} + p_{34}^{26} + p_{34}^{34} + p_{34}^{35} + p_{34}^{36} + p_{34}^{44} + p_{34}^{45} + p_{34}^{46}) + p_2^7(\sum_{j=2}^{6} p_{34}^{1j} + \sum_{j=2}^{6} p_{34}^{2j} + \sum_{i=3}^{5}\sum_{j=1}^{6} p_{34}^{ij}] = 0,3535,$$

где

$$\Omega_3 =: \{p_1;\, p_2^{\varsigma}, \varsigma = 1,2,..,7;\, p_{34}^{ij}, i = 1,2,..,5,\, j = 1,2,..,6\,|\,(A_1^1 g_1 + A_2^k g_2^k + A_3^i g_3^i + A_4^j g_4^j) \ge 80000\}.$$

1. *Markowitz H.M*. Portfolio Selection // The Journal of Finance. – 1952. – **7** (1). – P. 77–91.
2. *Markowitz H.M*. The Elimination Form of the Inverse and Its Application to Linear Programming // Management Science. – 1957.– 3 (3). –P. 255–269.
3. *Markowitz H.M*., *E. van Dijk*. Single-Period Mean-Variance Analysis in a Changing World // Financial Analysts J. – 2003. – 59 (2). – P. 30–44.
4. *Markowitz*, *H.M.* Market Efficiency: A Theoretical Distinction and So What? // Ibid. – 2005. – 61 (5). – P. 17–30.
5. *Huang Chi-Fu*. Foundations for Financial Economics // Elsevier Sci. Publ. Co. – 1988. – 276 p.
6. *Шведов А.С.* Теория эффективных портфелей ценных бумаг. – М.: Изд-во ГУ ВШЭ, 1999. – 451 с.
7. *Первозванский А.А*., *Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. – М.: Инфра-М, 1994. – XX с.
8. *Уильям Ф. Шарп*, *Гордон Дж. Александер*, *Джеффри В. Бейли*. Инвестиции. – 1887. – Там же, 1997. – 217 с.
9. *Ковалев В.В*. Введение в финансовый менеджмент. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 768 с.

Поступила 12..03.2010

Тел. для справок: +49/(0)241-543255 (Aachen, Deutschland)

E-mail: *yuriy_zack@hotmail.com*

Сайт: *www.optimorum.de*