

Ю.А. Зак

Оптимизация планирования производства и раскроя бумажной продукции

Предложена интегрированная математическая модель планирования загрузки бумагоделательных машин и многоступенчатого раскроя бумажного полотна в виде задачи линейного программирования большого размера. Учтены все реальные ограничения, встречающиеся в производственной сфере. Разработаны алгоритмы построения оптимальных расписаний работы технологического оборудования.

An integrated mathematical model of planning the loading of paper making machines and the multi-step cutting of paper as a task of linear programming of a big size is suggested. All real restrictions in the production are taken into account. The algorithms of constructing the optimal time-tables of the technological equipment are singled out.

Запропоновано інтегровану математичну модель планування завантаження паперовиробничих машин та багатовступеневого розкрою паперового полотна у вигляді задачі лінійного програмування великого розміру. Враховано всі реальні обмеження, які трапляються у виробничій сфері. Розроблено алгоритми побудови оптимальних розкладів роботи технологічного обладнання.

Введение. Современное бумагоделательное и картоноделательное производство характеризуется высокой производительностью, широкой номенклатурой производимой продукции и большим ассортиментом размеров выпускаемой бумаги, соответствующей заказам потребителей. Бумагоделательные машины (БДМ) с шириной бумажного полотна до 12 м, работающие со скоростями до 35 м/сек., могут выпускать различные по потребительским характеристикам виды бумаги. Переход машины с выпуска одного вида бумаги на другой связан с материальными потерями, а также потерями времени на переналадки технологического процесса. Произведенное БДМ полотно на следующих стадиях технологического процесса подвергается раскрою на продольно-резательных станках (ПРС) с целью получения в соответствии с требованиями потребителей требуемого количества бумаги каждого размера в согласованные с заказчиками сроки. При выборе программ раскроя произведенного машинами бумажного полотна возникают непроизводительные потери на отходы продукции, так как суммарная ширина всех полученных при раскросе рулонов не может равняться ширине тамбура, произведенного БДМ. Во многих случаях, вследствие ограничений на количество установлен-

ных на ПРС ножей и на ширину рулона, установленных на данном станке, такой раскрой осуществляется в несколько этапов. Технологическая схема производства и раскроя бумаги представлена на рис. 1.

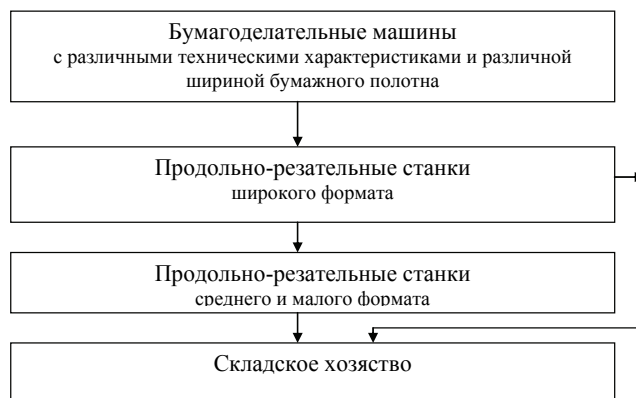


Рис. 1. Технологическая схема производства и раскроя бумаги

Постановка задачи

Производство на БДМ различается эффективностью (скорость, производительность, себестоимость, процент брака и т.п.). Несмотря на то что определенные БДМ более эффективны при производстве данного вида бумаги, требования потребителей по объемам и срокам поставки продукции зачастую приводят к необходимости работы их не в самом выгодном технологическом режиме.

Реализация различных программ раскроя на одном резательном станке также связана с потерями на переналадки оборудования. Поэтому при построении календарных графиков работы ПРС, наряду с ограничениями на сроки произ-

Ключевые слова: интегрированная математическая модель планирования, оптимальный раскрой бумажного полотна, продольно-резательные станки, оптимальные расписания работы оборудования.

водства рулонов заданного размера в определенном объеме, нужно минимизировать время непроизводительных потерь на переналадки оборудования. Все перечисленные выше факторы определяют сложность сформулированной проблемы оперативно-календарного планирования картонно-бумажного производства (КБП), процесс решения которой состоит из нескольких этапов, последовательность выполнения которых представлена на рис. 2.



Рис. 2. Последовательность решения задач оперативно-календарного планирования картонно-бумажного производства

Математические модели оптимального раскроя бумажного полотна в виде задач линейного программирования большой размерности достаточно часто и подробно рассматривались в литературе [1–4, 10, 11]. В настоящее время существенно увеличилась ширина производимого бумажного полотна, расширилась номенклатура и число заказываемых типоразмеров рулонов бумаги. В отличие от рассматриваемых в литературе моделей, в данной статье предлагается интегрированная математическая модель планирования загрузки бумагоделательных машин и многоступенчатого раскроя бумажного полотна, а также алгоритмы построения расписания работы оборудования, когда для получения рулонов требуемых размеров небольшой ширины необходимо последовательно разрезать рулоны больших размеров на нескольких ПРС. Кроме того, при построении математических моделей учитываются все ре-

альные ограничения, встречающиеся в производственной сфере и предусматривающие ограничения на различное число установленных на ПРС ножей, различную ширину имеющихся на предприятии ПРС, разные размеры тамбуров и количества бумажного полотна, произведенного несколькими БДМ, а также различные производительности и допустимое время использования каждого ПРС.

Математическая модель задачи объемного планирования распределения загрузки БДМ и раскроя бумаги

На K различных по техническим характеристикам (по ширине производимого полотна, производительности, потребности в сырьевых ресурсах) БДМ шириной тамбура L_k , $k=1, \dots, K$, каждая необходимо выпустить m различных видов бумажной продукции $i=1, \dots, m$. Произведенная каждой k -й машиной продукция шириной L_k должна поступать потребителям в рулонах меньших размеров, h_i^ξ , $\xi=1, \dots, S_i$, $i=1, \dots, m$. Пусть заданы суммарные количества каждого вида и типоразмера продукции, которая в соответствии с портфелем заказов на данный период должна быть произведена и отгружена потребителям: B_i^ξ , $\xi=1, \dots, S_i$, $i=1, \dots, m$.

Пусть $j=1, \dots, N$ – индексы различных ПРС, допускающие раскрой рулонов (тамбуров) бумажного полотна максимальной ширины H^j . Максимальное количество получаемых рулонов на данном станке равно $(\sigma_j + 1)$, а количество установленных ножей – σ_j .

Известны векторы суммарных часов работы каждой из БДМ T_k , $k=1, \dots, K$; θ_j , $j=1, \dots, N$, – количество суммарных часов работы каждого ПРС, а также матрицы производительности каждой БДМ по выпуску различных видов бумажной продукции $A = \|a_{ik}\|$, $i=1, \dots, m$, $k=1, \dots, K$. Здесь a_{ik} – вес бумажного полотна шириной L_k , выпускаемой k -й БДМ в единицу времени (технологическом режиме единичной интенсивности). Кроме того, известны матрицы удельных расходов различных видов сырья

и материалов, требуемых в единицу времени для выпуска k -й БМД i -го вида бумаги – $Q = \|q_{ik}^\omega\|$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, K$, $\omega = 1, \dots, W$. Здесь q_{ik}^ω – необходимое количество ω -го вида сырья или материала в режиме работы k -й БМД с единичной интенсивностью при выпуске i -го вида бумаги. Граничные значения по использованию различных видов материальных ресурсов в течение планового периода заданы вектором $D = |d^\omega|$, $\omega = 1, \dots, W$.

Пусть, кроме того, определены набор векторов различных возможных способов раскроя на j -м ПРС ширины бумажного полотна L_k или рулона шириной H^j на рулоны определенных заказами размеров $G_{jk} = \|g_{ijk}^{l\xi}\|$, $l = 1, \dots, R_{jk}$, $\bar{G}_j^j = \|\bar{g}_{ij}^{l\xi}\|$, $l = 1, \dots, R_j^j$; $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, m$. При этом $H^j > h_i^\xi$.

Здесь $g_{ijk}^{l\xi}$ и $\bar{g}_{ij}^{l\xi}$ – соответственно вес бумаги i -го вида в рулонах размера h_i^ξ , полученный при раскрое на j -м ПРС одной тонны бумажного полотна шириной L_k или одна тонна рулона шириной H^j l -м способом раскроя. Кроме того, для каждого из способов раскроя известно количество продукции, остающейся в виде отходов $\lambda_{ijk}^l \geq 0$, $\lambda_{ij}^{l\xi} \geq 0$. Обозначим соответственно \tilde{M}_{jk} , \tilde{M}_j^j – множество допустимых способов раскроя на j -м ПРС тамбура бумаги шириной L_k и рулона бумаги шириной H^j . Пусть t_{ijk}^l и $t_{ij}^{l\xi}$ – соответственно время работы j -го ПРС, необходимое для раскроя одной тонны бумаги данным способом.

Необходимо найти:

– объемный план работы всех бумагоделательных машин (интенсивности, т.е. времени работы по выпуску различных видов бумажной продукции $X = |x_{ik}|$, где $x_{ik} \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, K$);

– интенсивности различных способов раскроя (количество бумаги, подлежащее раскрою

данным способом – $Y_{jk} = \|y_{ijk}^l\|$, где $y_{ijk}^l \geq 0$, $l = 1, \dots, R_{jk}$, $k = 1, \dots, K$, $Z_j^j = \|z_{ij}^{l\xi}\|$, где $z_{ij}^{l\xi} \geq 0$, $l = 1, \dots, R_j^j$, $j = 1, \dots, M$, $i = 1, \dots, m$).

Полученное решение должно обеспечить выполнение плана по поставке продукции указанных типов и размеров B_i^ξ , $\xi = 1, \dots, S_i$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, K$, а также всех ограничений по использованию ресурсов рабочего времени БДМ – T_k , $k = 1, \dots, K$, ресурсных ограничений, связанных с наличием различных видов сырья и материалов, достигнув при этом наилучших технико-экономических показателей (наивысшей эффективности) работы производства.

В качестве критериев оптимальности могут быть определены минимальное средневзвешенное суммарное время работы БДМ, а также минимальные отходы бумажного полотна (в натуральном или стоимостном выражении) и затраты сырья и материалов, выполнение производственной программы БДМ в кратчайшие сроки и другие показатели.

Математическая модель задачи с учетом введенных обозначений представляет собой систему неравенств вида:

• Ограничения, связанные с заданным временем работы БДМ и ПРС,

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} \leq T_k, \quad k = 1, \dots, K; \quad (1)$$

$$\sum_{l \in \tilde{M}_j} (t_{ijk}^l y_{ijk}^l + t_{ij}^{l\xi} z_{ij}^{l\xi}) \leq \theta_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2)$$

• Условия выполнения плановых заданий по выпуску различных типов бумаги в соответствии с требованиями заказчиков в рулонах указанных размеров

$$\sum_{k=1}^K \sum_{l \in \tilde{M}_{jk}} y_{ijk}^l g_{ijk}^{l\xi} + \sum_{j=1}^N \sum_{\gamma=1}^{V_\gamma} \sum_{l \in \tilde{M}_j^\gamma} z_{ij}^{l\xi} \bar{g}_{ij}^{l\xi} \geq B_i^\xi, \quad \xi = 1, \dots, S_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

• Условия обеспечения соответствия количества раскраиваемого бумажного полотна объему продукции, выпускаемому каждой бумагоделательной машиной,

$$a_{ik}x_{ik} - \sum_{j=1}^N \sum_{l \in \bar{M}_{jk}} \left(y_{ijk}^{\xi} \left[\sum_{\xi=1}^{S_i} g_{ijk}^{l\xi} + \lambda_{ijk}^l \right] \right) \geq 0, \quad (4)$$

$k = 1, \dots, K; i = 1, \dots, m.$

• Количество каждого вида готовой продукции и полуфабрикатов шириной h^γ , $\gamma = 1, \dots, S_i$, должен обеспечить потребности всех других способов раскроя данной H^γ -й ширины бумажного полотна для производства рулонов бумаги меньших размеров и выпуск требуемого объема этого вида продукции в соответствии с требованиями потребителей

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N \sum_{l \in \bar{M}_{jk}} y_{ijk}^l g_{ijk}^{ly} - \sum_{j=1}^N \sum_{l \in \bar{M}_{ij}^\gamma} z_{ij}^{ly} \bar{g}_{ij}^{ly\xi} \geq B_i^\gamma, \quad (5)$$

$\gamma = 1, \dots, S_i, i = 1, \dots, m.$

• Ограничения по использованию различного вида материальных ресурсов

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K q_{ik}^\omega x_{ik} \leq d^\omega, \quad \omega = 1, \dots, W. \quad (6)$$

• Объемы отходов бумажного полотна не должны превышать установленных лимитов E_1

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N \sum_{l \in \bar{M}_{jk}} \left(\sum_{k=1}^K \lambda_{ijk}^l y_{ijk}^l + \sum_{\gamma=1}^{S_i} \lambda_{ij}^{ly} z_{ij}^{ly} \right) \leq E_1, \quad (7)$$

или в стоимостном выражении

$$\sum_{i=1}^m \bar{c}_i \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l \in \bar{M}_{jk}} \lambda_{ijk}^l y_{ijk}^l + \sum_{\gamma=1}^{S_i} \sum_{l \in \bar{M}_{ij}^\gamma} \lambda_{ij}^{ly} z_{ij}^{ly} \right] \leq E_2. \quad (8)$$

Здесь \bar{c}_i – стоимость одной тонны бумаги i -го вида.

Суммарные остатки рулонов бумаги размеров h^γ , $\gamma = 1, \dots, S_i$, $i = 1, \dots, m$, не отправленных потребителям, не должны превышать установленных лимитов:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\gamma=1}^{S_i} \left(\hat{c}_i^\gamma \left[\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N \sum_{l \in \bar{M}_{jk}} g_{ijk}^{ly} y_{ijk}^l - \sum_{\substack{\xi=1, \\ h_\xi > h_\gamma}}^S \sum_{j=1}^N \sum_{l \in \bar{M}_{ij}^\gamma} \bar{g}_{is}^{jy\xi} z_{ij}^{jy} - B_i^\gamma \right] \right) \leq E_3, \quad (9)$$

где \hat{c}_i^γ – стоимость одной тонны бумаги i -го вида в рулонах размером h^γ .

Остатки произведенного БДМ и нераскромленного бумажного полотна в стоимостном выражении тоже не должны превышать определенных пределов

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K \bar{c}_{ik} \left(a_{ik}x_{ik} - \sum_{j=1}^N \sum_{l \in \bar{M}_{jk}} \left[\sum_{\xi=1}^{S_i} g_{ijk}^{l\xi} + \lambda_{ijk}^l \right] y_{ijk}^l \right) \leq E_4, \quad (10)$$

где \bar{c}_{ik} – стоимость 1 т тамбура i -го вида бумажного полотна шириной L_k .

Рассмотрим различные критерии эффективности построения планов работы бумажного производства.

Критерий минимизации суммарного средневзвешенного времени работы всех БДМ, требуемого для выполнения производственной программы, определяется выражением

$$F_1 = \sum_{k=1}^K \alpha_k \sum_{i=1}^m x_{ik} \rightarrow \min. \quad (11)$$

Здесь $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, \dots, K$, – некоторые весовые коэффициенты, определяющие потребности наличия свободных временных ресурсов каждой БДМ. В частности, $\alpha_k = 1$, $k = 1, \dots, K$.

Введением дополнительной переменной и новых ограничений критерий выполнения производственной программы бумагоделательными машинами в кратчайшие сроки выражается в виде

$$F_2 = \eta \rightarrow \min \quad (12)$$

в условиях дополнительных ограничений вида

$$\eta \geq 0; \quad \eta - \sum_{i=1}^m x_{ik} \geq 0, \quad k = 1, \dots, K. \quad (13)$$

Введем следующие стоимостные показатели c_i^ξ – цена одной тонны рулона ξ -й ширины бумаги i -го вида, r^ω – цена ресурса единичной интенсивности ω -го вида (одна тонна сырья или материала, или заработной платы в единицу времени либо на одну тонну выпускаемой продукции).

Критерий максимальной прибыли определяется выражением

$$F_3 = \sum_{i=1}^m \sum_{\xi=1}^{S_i} \hat{c}_i^\xi \sum_{j=1}^N \sum_{l \in \bar{M}_{jk}} \left(y_{ijk}^{\xi} g_{ijk}^{l\xi} + \sum_{l \in \bar{M}_{ij}^\gamma} z_{ij}^{\xi} \bar{g}_{ij}^{l\xi} \right) - \sum_{\omega=1}^W r^\omega \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^m x_{ik} q_{ik}^\omega \rightarrow \max. \quad (14)$$

Тогда критерий минимизации суммы отходов в стоимостном выражении определяется выражением

$$F_4 = \sum_{i=1}^m \bar{c}_i \sum_{j=1}^N \left[\sum_{k=1}^K \sum_{l \in \bar{M}_{jk}} \lambda_{ijk}^l y_{ijk}^l + \sum_{\gamma=1}^{S_i} \sum_{l \in \bar{M}_j^\gamma} \lambda_{ij}^{l\gamma} z_{ij}^{l\gamma} \right] \rightarrow \min, \quad (15)$$

а в натуральном выражении –

$$F_5 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N \left[\sum_{k=1}^K \sum_{l \in \bar{M}_{jk}} \lambda_{ijk}^l y_{ijk}^l + \sum_{\gamma=1}^{S_i} \sum_{l \in \bar{M}_j^\gamma} \lambda_{ij}^{l\gamma} z_{ij}^{l\gamma} \right] \rightarrow \min. \quad (16)$$

Сформулированная оптимизационная задача с каждым из приведенных критериев эффективности – задача линейного программирования достаточно большого размера относительно переменных $x_{ik} \geq 0$, $y_{ijk}^l \geq 0$, $z_{ij}^{l\gamma} \geq 0$, и может быть решена стандартными пакетами прикладных программ получения точных или приближенных методов.

Алгоритмы автоматизации построения и компактного представления матриц допустимых способов раскроя описаны в работах автора [2, 12].

Отметим, что существует большое количество допустимых способов раскроя. Даже при небольших значениях S_i количество их может быть весьма значительным. При реальных значениях K , m и S_i сформулированная оптимизационная задача является задачей линейного программирования достаточно большого размера. Для уменьшения размерности задачи целесообразно так построить компактную модель задачи, чтобы минимально возможным способом векторов столбцов задать и представить все множество возможных способов раскроя. Это достигается введением так называемых векторов заменяемости одного вектора раскроя другими и описано в публикациях [3, 5, 12].

Построение оптимальных расписаний работы продольно-резательных станков

Пусть заданы $P^1, P^2, \dots, P^j, \dots, P^N$ различные программы раскроя, которые в течение

временного интервала длительностью T – $[0, T]$ должны быть реализованы на ПРС. Для каждой из этих программ P^j известны количество продукции B^j (в тоннах или км), которое должно быть раскроено данным способом, и план установки ножей. Кроме того, известно максимальное количество бумажного полотна в тамбуре \bar{B} , которое может быть установлено на данном резательном станке.

Без ограничения общности и для простоты изложения предположим, что на данном ПРС реализуются только способы раскроя тамбуров бумажного полотна, произведенных БДМ. Кроме того, при описании предлагаемых далее методов используются некоторые обозначения, отличные от предыдущих разделов.

Если программой раскроя P^j предусматривается раскрой количества бумаги $B^j > \bar{B}$, то реализация этой программы в полном объеме требует нескольких перестановок тамбура бумаги на станке, что связано с переналадками оборудования. Для построения математической модели задачи из данного способа раскроя образуем σ способов $P^{j_1}, \dots, P^{j_\sigma}$, где $\sigma = \left\lceil \frac{B^j}{\bar{B}} \right\rceil + 1$.

Здесь $\left\lceil \frac{B^j}{\bar{B}} \right\rceil$ – целая часть частного от деления этих величин.

После выполненных преобразований произведем переиндексацию всех способов раскроя $P^1, P^2, \dots, P^s, \dots, P^S$. Все множество программ раскроя, которые должны быть реализованы, обозначим \tilde{W} . Для каждого из вновь образуемых способов раскроя заданы длительность выполнения этой программы на резательном станке t^s , а также время завершения программы T^s . Отметим, что для всех способов раскроя $P^{j_1}, \dots, P^{j_\sigma}$ значение времени T^s одинаково. Кроме того, задана матрица потерь времени на переналадки ПРС $\bar{T} = \|\theta^{sj}\|$, элементами которой являются потери времени при переходе от s -й программы раскроя на j -ю. Все переналадки связаны с остановкой оборудования. Не-

которые переналадки трубуют перестановки различного количества ножей, некоторые – новой установки тамбура. Отдельные виды переналадок связаны с установкой нового тамбура и перестановкой ножей.

Необходимо найти последовательность выполнения всех программ раскроя, обеспечивающую завершение всех программ в указанные сроки T^s и выполнение всех плановых заданий в кратчайшие сроки, т.е. минимизирующую потери времени на переналадки оборудования.

Свойства допустимых и оптимальных планов

Упорядочим программы раскроя в порядке невозрастания значений их сроков завершения

$$T^{j_1} \leq T^{j_2} \leq \dots \leq T^{j_s} \leq T^{j_{s+1}} \leq \dots \leq T^{j_S}. \quad (17)$$

Выполним переиндексацию индексов программ раскроя в соответствии с данным ранжировочным рядом, т.е.

$$T^1 \leq T^2 \leq \dots \leq T^s \leq T^{s+1} \leq \dots \leq T^S. \quad (18)$$

Соответствующим образом осуществим перестановки строк и столбцов матрицы \bar{T} и корректировку индексов t^s .

Вновь сформированную матрицу $\bar{T} = \|\theta^{sj}\|$ преобразуем следующим образом:

- добавим в матрице нулевую строку θ^{0j} , $j = 1, \dots, S$, элементами которой являются потери времени на переналадки ПРС при переходе с текущего состояния в состояние, готовое для выполнения программы P^j . Вновь образованная матрица \bar{T}^1 содержит $(S+1)$ строк и S столбцов;

- из каждого элемента строки матрицы \bar{T}^1 вычтем минимальный элемент, равный

$$\theta^{s,\min} = \min_{1 \leq j \leq S} \theta^{sj}, \quad s = 0, 1, \dots, S. \quad (19)$$

Вновь образованную матрицу с элементами, равными

$$\bar{\theta}^{sj} = \theta^{sj} - \theta^{s,\min}, \quad s = 0, 1, \dots, S, \quad j = 1, \dots, S, \quad (20)$$

обозначим \bar{T}^2 . В каждой строке этой матрицы содержится, по крайней мере, один нулевой элемент;

- из каждого элемента столбца матрицы \bar{T}^2 вычтем минимальный элемент, равный

$$\bar{\theta}^{\min,j} = \min_{1 \leq s \leq S} \bar{\theta}^{sj}, \quad j = 1, \dots, S. \quad (21)$$

Вновь образованную матрицу с элементами, равными

$$\hat{\theta}^{sj} = \bar{\theta}^{sj} - \bar{\theta}^{\min,j}, \quad s = 0, 1, \dots, S, \quad j = 1, \dots, S, \quad (22)$$

обозначим \bar{T}^3 . В каждой строке и каждом столбце этой матрицы содержится, по крайней мере, один нулевой элемент.

Сумму значений

$$K = \sum_{j=1}^S \bar{\theta}^{\min,j} + \sum_{s=0}^S \theta^{s,\min} - \max_{1 \leq j \leq S} \theta^{sj} \quad (23)$$

назовем суммой приводящих констант, определяющих минимально возможные (граничные значения) суммарных потерь времени на переналадки оборудования.

Утверждение 1. Если не выполняется хотя бы одно из неравенств системы

$$\sum_{j=1}^s t^j \leq T^s, \quad s = 1, \dots, S, \quad (24)$$

$$\sum_{j=1}^s t^j + K \leq T^s, \quad (25)$$

то не существует допустимых расписаний, обеспечивающих выполнение всех заданий в установленные сроки.

Доказательство первого неравенства этого утверждения приведено в [6].

Упорядочим значения $\theta^{s,\min}$ и по невозрастанию значений величин

$$\theta^{j_1,\min} \leq \theta^{j_2,\min} \leq \dots \leq \theta^{j_s,\min} \leq \theta^{j_{s+1},\min} \leq \dots \leq \theta^{j_S,\min}, \quad (26)$$

$$\bar{\theta}^{\min,k_1} \leq \bar{\theta}^{\min,k_2} \leq \dots \leq \bar{\theta}^{\min,k_s} \leq \bar{\theta}^{\min,k_{s+1}} \leq \dots \leq \bar{\theta}^{\min,k_{S+1}}. \quad (27)$$

Условия утверждения могут быть ужесточены следующим образом.

Утверждение 2. Если не выполняется хотя бы одно из неравенств системы

$$\sum_{j=1}^s (t^j + \theta^{j_{s-1},\min}) + \theta^{j_0,\min} \leq T^s, \quad s = 1, \dots, S, \quad (28)$$

или не выполняется неравенство (25), то не существует допустимых расписаний, обеспечивающих выполнение всех заданий в установленные сроки.

Пусть на некотором этапе решения задачи определена частичная подпоследовательность выполнения различных программ раскроя (в дальнейшем будем называть их также заданиями) $W_1 = \{P^{l_1}, P^{l_2}, \dots, P^{l_q}\}$, и определено время завершения данного комплекса $H_1 = H^{l_q}$, включая суммарное время выполнения этого множества заданий и сумму времени переналадок. Обозначим соответственно \tilde{W}_1 и \hat{W}_1 подмножество заданий, входящих в подпоследовательность W_1 , и заданий, которые необходимо выполнить,

$$\begin{aligned} \hat{W}_1 &= \{P^{\lambda_1}, P^{\lambda_2}, \dots, P^{\lambda_g}\}, \quad \tilde{W}_1 \cap \hat{W}_1 = \emptyset, \\ \tilde{W}_1 \cup \hat{W}_1 &= \tilde{W}. \end{aligned} \quad (29)$$

Отметим, что если подпоследовательность выполнения заданий W_1 – часть допустимого расписания выполнения всего множества заданий и времени завершения выполнения каждого из этих заданий, равное H^{l_s} , то справедливы неравенства

$$H^{l_s} \leq T^{l_s}, \quad s = 1, \dots, q. \quad (30)$$

Упорядочим все задания, входящие в подмножество \hat{W}_1 , по невозрастанию заданного граничного времени их завершения

$$\{P^{\gamma_1}, P^{\gamma_2}, \dots, P^{\gamma_g}\}, \quad \text{где } t^{\gamma_1} \leq t^{\gamma_2} \leq \dots \leq t^{\gamma_g}. \quad (31)$$

Вычеркнем из матрицы \bar{T}_1^{-1} все столбцы, соответствующие заданиям, принадлежащим подмножеству \tilde{W}_1 , а также все строки, кроме строки λ_q задания, стоящего последним в подпоследовательности W_1 , соответствующие индексам заданий, принадлежащим подмножеству \tilde{W}_1 .

Вновь образованную матрицу обозначим \bar{T}_1^{-1} , а элементы этой матрицы $\theta_1^{j_s}$, $j = l_0, l_1, l_2, \dots, l_g$, $s = l_1, l_2, \dots, l_g$. Выполним преобразования этой матрицы, аналогичные преобразованиям матрицы \bar{T}_1^{-1} , таким образом, чтобы в каждой стро-

ке и каждом столбце вновь полученной матрицы \bar{T}_3^{-1} было, по крайней мере, по одному нулевому элементу. Соответствующие минимальные элементы каждой строки и каждого столбца матрицы \bar{T}_1^{-1} обозначим $\lambda_1^{j, \min}$, $\bar{\lambda}_1^{\min, j}$, $j = l_1, l_2, \dots, l_g$. Нулевой элемент строки, содержащий значение времени переналадок после выполнения последнего задания в подпоследовательности \tilde{W}_1 , т.е. строки $l_q = l_0$, обозначим $\hat{\lambda}_1^{l_0, \min}$. Пусть

$$K_1 = \sum_{i=1}^g (\lambda_1^{j_i, \min} + \bar{\lambda}_1^{\min, j_i}) - \max_{1 \leq l \leq g} \theta_1^{j_l} \quad (32)$$

нижняя оценка суммарного времени переналадок оборудования для подмножества заданий \hat{W}_1 .

Упорядочим величины $\lambda_1^{j, \min}$ и $\bar{\lambda}_1^{\min, j}$ по невозрастанию соответствующих значений

$$\begin{aligned} \lambda_1^{v_1, \min} &\leq \lambda_1^{v_2, \min} \leq \dots \leq \lambda_1^{v_g, \min}, \\ \bar{\lambda}_1^{\min, \mu_1} &\leq \bar{\lambda}_1^{\min, \mu_2} \leq \dots \leq \bar{\lambda}_1^{\min, \mu_g}. \end{aligned} \quad (33)$$

Утверждение 3. Если для подпоследовательности $\{P^{\gamma_1}, P^{\gamma_2}, \dots, P^{\gamma_g}\}$ не выполняется хотя бы одно из неравенств системы

$$\begin{aligned} H_1 + \sum_{j=1}^g (t^{\gamma_j} + \lambda^{\gamma_{j-1}, \min}) + \hat{\lambda}_1^{j_0, \min} &\leq T^j, \\ j &= 1, \dots, g \end{aligned} \quad (34)$$

либо

$$H_1 + \sum_{j=1}^g t^{\gamma_j} + K_1 - \max_{1 \leq k \leq g} \bar{\lambda}_1^{\min, j_k} \leq T^{j_g}, \quad (35)$$

то для данной подпоследовательности не существует допустимых расписаний, обеспечивающих выполнение всех оставшихся незавершенных заданий в установленные сроки.

Следовательно, данная подпоследовательность может быть отброшена как неперспективная.

Утверждение 4. Для каждой начальной подпоследовательности время завершения всего комплекса заданий не может быть меньше величины

$$\xi\{\tilde{P}_1\} = H_1 + \sum_{j=1}^g t^{\gamma_j} + K_1 - \max_{1 \leq k \leq g} \lambda_1^{j_k}. \quad (36)$$

Как следствие утверждения 4 справедливо утверждение 5.

Утверждение 5. Минимальное время завершения выполнения всего комплекса заданий не может быть меньше значения, определяемого выражением

$$\xi\{\tilde{P}\} = \sum_{j=1}^s t^j + K. \quad (37)$$

Методы решения задач построения оптимальных расписаний работы ПРС

Установленные свойства допустимых и оптимальных решений позволили предложить эффективные методы решения сформулированной задачи, обобщающие методы [7].

Рассматриваемые далее методы строят альтернативные допустимые подпоследовательности выполнения заданий в порядке их выполнения. На каждом этапе решения задачи эта подпоследовательность расширяется путем включения нового задания. При этом рассчитывается время начала и завершения выполнения этого задания и на основании утверждения 3 проверяется допустимость выполнения всех ограничений для этой подпоследовательности. Если установка выбираемого задания на соответствующее место в последовательности является недопустимой, то выбирается следующее альтернативное задание. В противном случае на основании утверждений 4, 5 вычисляется нижняя оценка времени выполнения расписания. В методе ветвей и границ [8] на каждом шаге алгоритма выбирается для развития подпоследовательность с наименьшей нижней границей (оценкой), в методе последовательного анализа вариантов [9] – конструируются и рассматриваются все допустимые подпоследовательности с заданным количеством заданий. Если соответствующая подпоследовательность является недопустимой, то значение нижней оценки полагается равным $\xi\{\tilde{P}_1\} = \infty$. В методе ветвей и границ факт несовместимости системы ограничений задачи устанавливается в случае, если для всех подпоследовательностей (вершин дерева) $\xi\{\tilde{P}_1\} = \infty$, а факт получения оптимального решения – если построена полная последо-

вательность выполнения всех заданий с временем завершения, не большим чем значения оценок для всех не построенных до конца подпоследовательностей.

В методах последовательного конструирования и анализа вариантов факт несовместимости системы ограничений устанавливается в том случае, если на каком-то расширении подпоследовательностей ни в какую из них не может быть добавлено ни одного нового задания. Для дальнейшего развития выбирается подпоследовательность с наименьшим временем завершения выполнения. Конструируются все допустимые варианты ее продолжения. Оптимальное решение задачи будет получено в том случае, если построена полная последовательность выполнения всех заданий с временем завершения не большим, чем времена завершения выполнения всех частичных подпоследовательностей.

Рассматриваются алгоритмы и в более формальном представлении.

Различные конструируемые подпоследовательности выполнения заданий обозначим $\tilde{P}_r(s)$, где $r = 0, 1, \dots, R$ – номер подпоследовательности, а s – индекс задания в матрице \bar{T}^{-1} , выполняемого в подпоследовательности \tilde{W}_1 последним. Пусть H_r – время завершения выполнения всех заданий подпоследовательности $\tilde{P}_r(s)$. Строка, соответствующая индексу задания, стоящего последним в $\tilde{P}_r(s)$, – нулевая строка в матрице \bar{T}_1^{-1} .

Обозначим $\tilde{P}_0(0)$ – подпоследовательность, не содержащая ни одного задания.

На начальном этапе этих методов упорядочим все задания в последовательности (17) и произведем переиндексацию всех заданий в соответствии (18). Выполним преобразование матрицы \bar{T}_1^{-1} , вычислим значения K по формуле (23), упорядочим нулевые элементы $\lambda^{j, \min}$ и $\bar{\lambda}^{\min, k}$ в соответствии с выражениями (26), (27). Если в соответствии с утверждением 2 система ограничений несовместна, то алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае вы-

числом нижнюю оценку времени завершения всего комплекса заданий $\xi\{\tilde{P}_0(0)\}$ по формуле (37) и переходим к шагу 1.

Метод «ветвей и границ»

Пусть на некотором этапе процесса построено R допустимых подпоследовательностей выполнения заданий $\tilde{P}_r(s)$, с граничными значениями времени завершения выполнения расписания $\xi\{\tilde{P}_r(s)\}$, $r = 0, 1, \dots, R$. Обозначим $\tilde{W}_r(s)$ – подмножество заданий, входящих в $\tilde{P}_r(s)$, $\hat{W}_r(s)$ – подмножество невыполненных заданий, т.е. заданий, которыми должна быть дополнена $\tilde{P}_r(s)$ для выполнения всего комплекса работ. Пусть \bar{T}_r^{-1} – матрица времени переналадок для подмножества заданий $\hat{W}_r(s)$, нулевой строкой которой является s -я строка матрицы \bar{T}_1 , где отсутствуют элементы, принадлежащие подмножеству столбцов $\tilde{W}_r(s)$.

Алгоритм решения представляет собой итеративный процесс, на каждой итерации которого выполняются следующие шаги.

Шаг 1. Среди всех непродолженных подпоследовательностей выбираем подпоследовательность с наименьшим значением нижней границы времени завершения расписания

$$\bar{\xi}\{\tilde{P}_p(s)\} = \min_{1 \leq r < R} \xi\{\tilde{P}_r(s)\}. \quad (38)$$

Если $\bar{\xi}\{\tilde{P}_p(s)\} = \infty$, то задача не имеет допустимых решений и алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае выбираем для дальнейшего развития подпоследовательность с номером $\tilde{P}_p(s)$.

Формируем подмножество невыполненных заданий $\hat{W}_p(s)$ и матрицу времени переналадок \bar{T}_p^{-1} . Если подмножество $\hat{W}_p(s) = \emptyset$, то $\tilde{P}_p(s)$ – оптимальное расписание выполнения заданий, и алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае в соответствии с описанными ранее правилами проводим преобразование матрицы \bar{T}_p^{-1} , строим матрицу \bar{T}_p^{-2} и переходим к шагу 2.

Шаг 2.

2.1. Преобразуем последовательности (17), (18), исключая из них элементы с индексами заданий, принадлежащими подмножеству $\tilde{W}_r(s)$. Проводим переиндексацию преобразованных последовательностей. Обозначим эти последовательности соответственно $\tilde{U}_p^1(s)$ и $\tilde{U}_p^2(s)$. Вычитаем из элементов вновь образуемых матриц значений времени переналадок минимальные элементы строк и столбцов.

2.2. Находим в нулевой строке матрицы \bar{T}_p^{-1} элемент, значение которого равно нулю. Пусть это будет элемент d -й столбец матрицы \bar{T}_p^{-1} с индексом подлежащего выполнению задания, равным k .

2.3. Вычисляем время завершения k -го задания

$$\tau^k = H_p + t^k + \theta_p^{0k}. \quad (39)$$

Если $\tau^k > T^k$, то полагаем значение $\theta_p^{0k} = \infty$ и переходим к шагу 3. В противном случае к п. 2.4.

2.4. Вычисляем нижние оценки времени завершения всех оставшихся заданий $j \in \{\hat{W}_p(s) / k\}$ в последовательности невозрастания граничного времени их завершения $\tilde{U}_p^1(s)$

$$\tau^{j_p} = \tau^k + \sum_{v=1}^p (t^{j_v} + \lambda_p^{v, \min}),$$

$$p = 1, \dots, (P_p - 1), \quad j_p \neq k, \quad (40)$$

где P_p – количество элементов в подмножестве $\hat{W}_p(s)$.

Если выполняется хотя бы одно из неравенств системы $\tau^{j_p} > T^{j_p}$, то установка задания k на данное место в последовательности недопустима, полагаем значение $\theta_p^{0k} = \infty$ и переходим к шагу 3. В противном случае переходим к п. 2.5.

2.5. Вычисляем нижнюю границу времени завершения расписания:

$$\xi\{\bar{P}_p | k\} = \tau^k + \sum_{\substack{p=1 \\ j_p \neq k}}^P t^{j_p} + K_p - \max_{\substack{1 \leq p \leq P \\ j_p \neq k}} \bar{\lambda}_1^{\min, j_p}. \quad (41)$$

Если $\xi\{\bar{P}_p | k\} > T_{j_p}$, то полагаем значение $\theta_p^{0k} = \infty$ и переходим к шагу 3. В противном случае, если $P > 1$, переходим к шагу 1.

Если $P = 1$, то получено оптимальное решение задачи: $\tilde{W}_p(s)$ – оптимальная последовательность выполнения всех заданий с временем завершения, равным $\xi\{\bar{P}_p\}$.

Для восстановления расписания выполнения работ переходим к шагу 4.

Шаг 3. Проводим поиск наименьшего значения в нулевой строке матрицы \bar{T}_p^1 . Если все элементы в этой строке равны ∞ , то подпоследовательность не содержит допустимых расписаний, полагаем $\xi\{\bar{P}_p\} = \infty$ и переходим к шагу 1. В противном случае полагаем значение $\lambda_p^{0, \min}$, равным этому значению, корректируем последовательности $\tilde{U}_p^1(s)$ и $\tilde{U}_p^2(s)$ и переходим к шагу 2.

Ясно, что через конечное число шагов либо будет установлен факт отсутствия допустимых расписаний, либо найдено оптимальное расписание выполнения всего множества заданий.

Шаг 4. Пусть $\tilde{W}_p(s) = \{j_1, j_2, \dots, j_s, \dots, j_S\}$ – оптимальная последовательность выполнения заданий. Тогда сроки начала и завершения выполнения каждого из заданий последовательности определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \tau_1^{j_1} &= \theta^{0j_1}, \quad \tau_2^{j_1} = \tau_1^{j_1} + t^{j_1}; \quad \tau_1^{j_2} = \tau_2^{j_1} + \theta^{j_1j_2}, \\ \tau_2^{j_2} &= \tau_1^{j_2} + t^{j_2}; \quad \dots; \\ \tau_1^{j_s} &= \tau_2^{j_{s-1}} + \theta^{j_{s-1}j_s}, \quad \tau_2^{j_s} = \tau_1^{j_s} + t^{j_s}; \quad \dots; \\ \tau_1^{j_S} &= \tau_2^{j_{S-1}} + \theta^{j_{S-1}j_S}, \quad \tau_2^{j_S} = \tau_1^{j_S} + t^{j_S}, \end{aligned}$$

где τ_1^j и τ_2^j – соответственно время начала и завершения выполнения заданий (различных программ раскроя).

Алгоритм конструирования и последовательного анализа вариантов

Алгоритм конструирования и последовательного анализа вариантов предусматривает пошаговое построение всех допустимых последовательностей выполнения расписания [9]. Все

расписания (анализируемые варианты) строятся в последовательности выполнения заданий. При включении каждого нового задания на основании утверждений 1–3 проверяется возможность выполнения данного и всех незавершенных заданий в установленные ограничениями сроки. Если эти условия не выполняются, то задание не включается на соответствующее место в данную подпоследовательность. На каждом шаге процесса развивается подпоследовательность с наименьшим сроком завершения выполнения включенных в нее заданий. Первая из построенных допустимых последовательностей, включающая все задания, со сроком завершения выполнения расписания меньшим чем сроки окончания выполнения всех уже ранее построенных или недостроенных до конца подпоследовательностей, является решением задачи. Факт несовместности заданной системы ограничений – отсутствие допустимых подпоследовательностей, которые могут быть продолжены включением в них на соответствующее место какого-либо нового задания.

Метка каждого из развиваемых вариантов (подпоследовательностей) E^p , $p = 0, 1, \dots, P$, имеет следующие составляющие:

\tilde{U}_1^p – подпоследовательность выполненных заданий,

\hat{U}_2^p – подпоследовательность оставшихся для выполнения заданий, в которой задания расположены в порядке невозрастания граничных значений сроков их завершения,

H^p – время завершения выполнения последнего задания подпоследовательности \tilde{U}_1^δ .

δ^p – признак того, содержит ли \tilde{U}_1^p все множество заданий ($\delta^p = 1$) или нет ($\delta^p = 0$).

Если для подпоследовательности \tilde{U}_1^p не существует допустимых продолжений, обеспечивающих всех ограничений задачи, то $H^p = \infty$. Процесс решения начинаем с варианта E^0 , для которого $\tilde{U}_1^0 = \{j_0\}$, $\hat{U}_2^0 = \{j_1, j_2, \dots, j_S\}$, H^0 – наиболее ранний допустимый срок начала выполнения работ, $\delta^0 = 0$. В подпоследовательности \hat{U}_2^0 задания расположены в порядке (17).

Каждая итерация алгоритма решения задачи состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Находим подпоследовательность с наименьшим значением величины H^p .

$H^p = \min_{1 \leq p \leq P} \{H^p\}$. Если $H^p = \infty$, то задача не имеет допустимых решений, и алгоритм завершает свою работу. В противном случае, если $\delta^p = 1$, то \tilde{U}_1^p – оптимальная последовательность выполнения заданий, и получено решение задачи. Переходим к шагу 4. В противном случае ($\delta^p = 0$) выбираем для дальнейшего развития подпоследовательность E^p и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Пусть i^p – последнее задание, стоящее в подпоследовательности \tilde{U}_1^p . Для каждого из заданий $j \in \hat{U}_2^p$ в порядке их расположения в подпоследовательности вычисляем

$$\tau^{p,j} = H^p + t^j + \theta^{i^p j}, \quad j \in \hat{U}_2^p. \quad (42)$$

Если $\tau^{p,j} > T^j$, то продолжение подпоследовательности в вершину j недопустимо. Переходим к следующему индексу задания. Если рассмотрены все задания подпоследовательности \hat{U}_2^p , то полагаем $H^p = \infty$ и переходим к шагу 3.

В противном случае, выполняя вычисления, аналогичные описанным в п.п. 2.2–2.4 шага 2, описанного алгоритма метода «ветвей и границ», вычисляем нижние оценки времени завершения оставшихся в последовательности \hat{U}_2^p всех заданий (за исключением задания $j \in \hat{U}_2^p$). Если выполняется хотя бы одно из неравенств системы $\tau^{j_p} > T^{j_p}$, то установка задания j на данное место в последовательности является недопустимой, и переходим к следующему индексу задания в \hat{U}_2^p . В противном случае образуем новую подпоследовательность $E^{(p+1)}$, для которой последовательность $\tilde{U}_1^{(p+1)}$ образуется добавлением на последнее место в подпоследовательность \tilde{U}_1^p задания j , $\hat{U}_2^{(p+1)}$ – исключением из \hat{U}_2^p задания j , а $H^{(p+1)} = \tau^{p,j}$.

Увеличиваем количество построенных подпоследовательностей, полагая $P = (P + 1)$. Если $\tilde{U}_1^{(P+1)}$ включает все множество заданий, полагаем $\delta^{(P+1)} = 1$, в противном случае – $\delta^{(P+1)} = 0$. Выбираем следующий индекс задания в \hat{U}_2^p .

Заключение. Итак, в статье решены следующие задачи:

- оперативно-календарного планирования производства и раскроя бумажного полотна, представленная в виде последовательности решения задач построения объемных планов распределения загрузки БДМ и выбора оптимальных способов многоступенчатого раскроя произведенной продукции на ПРС;

- объемного планирования производства и раскроя бумаги, сформулированная в виде задачи линейного программирования большого размера, имеющей блочную структуру, которая может быть решена разработанными пакетами программ получения точных и приближенных решений;

- построения календарных планов работы БДМ и ПРС, сформулированная в виде задачи построения оптимальной последовательности выполнения комплекса заданий с ограничениями на сроки завершения отдельных заданий и критерием оптимальности выполнения расписаний в минимальные сроки. Данная математическая формулировка обобщает, в некотором смысле, известную в литературе задачу коммивояжера. Исследованы свойства допустимых и оптимальных расписаний сформулированной задачи и предложены точные методы ее решения методами «ветвей и границ» и последовательного конструирования и анализа вариантов.

Предложенные подходы, математические модели и методы могут найти широкое применение при производстве и раскрое картона, полиэтиленовых пленок и других материалов.

1. Зак Ю.А., Рейдман Р.М., Рувинский А.А. Методы оптимизации и их применение в целлюлозно-бумажной промышленности. – М.: Лесная промышленность, 1973. – 248 с.
2. Рувинский А.А., Зак Ю.А., Рейдман Р.М. Математические модели и алгоритмы в системах управления

- картонно-бумажным производством. – М.: Лесная промышленность, 1971. – 232 с.
3. *Zack Ju.* Optimization paper and board industry operative planing // Труды ИФАК, Брюссель, 1971. – С. 81–91.
 4. *Зак Ю.А.* Принцип разложения и итеративные методы решения задачи линейного программирования большого размера // Автоматика и телемеханика, 1971. – № 12. – С. 143–150.
 5. *Истирян Г.П.* Методика построения компактной модели экономической задачи линейного программирования с заменяемыми продуктами // Экономическая кибернетика и исследование операций. – 1963. – 6. – С. 73–89.
 6. *Танаев В.С., Шкурба В.В.* Введение в теорию расписаний. – М.: Наука, Физматгиз, 1975. – 256 с.
 7. *Зак Ю.А.* Об одной задаче определения оптимальной последовательности переналадок оборудования // Кибернетика. – 1968. – № 6. – С. 86–92.
 8. *Lawler E.L., Wood D.E.* Branch-and-Bound Methods (of Survey) // Oper. Res. – 1966. – 4. – P. 252–260.

9. *Михалевич В.С., Шкурба В.В.* Последовательные схемы оптимизации в задачах упорядочения работ // Кибернетика. – 1966. – № 2. – С. 34–40.
10. *Harjunkoski I.* Qualitaetsbasierte Schnittplanoptimierung in der Papierindustrie // at Automatisierungstechnik. – 2008. – № 2. – P. 31–44.
11. *Schethauer G.* Zuschnitt und Packungsoptimierung. Problemstellungen, Modellierungs-techniken, Loesungsmethoden. – Wiesbaden: Verlag: Vieweg+Taubner, 2008. – 132 p.
12. *Зак Ю.А.* Математические модели многоступенчатого оптимального раскроя бумажного полотна // Автоматизация в промышленности. – 2010. – № 9. – (в печати).

Поступила 12.03.2010
 Тел. для справок: +49/(0)241-543255 (Aachen, Deutschland)
 E-mail: yuriy_zack@hotmail.com
 Сайт: www.optimorum.de
 © Ю.А. Зак, 2010

Окончание статьи О.А. Хорозова

Конфиденциальность финансовой отчетности требует электронной подписи документа. Образцами подписи служит криптографическая пара *закрытый–открытый ключ (private–public key pair)* сервиса доверия инфраструктуры открытых ключей (*Public Key Infrastructure*). Сфера употребления цифровой подписи (ЦП) – осуществление регистрационной процедуры, оформление документов для предоставления госучреждениям, электронные платежи и коммерция. Преимущество защищенного электронного документа – защита информации от искажения, несанкционированного ознакомления, а также неопровержимость в случае отказа от факта подписи документа.

Алгоритмы получения профиля сообщения и инфраструктуры открытых ключей действуют в соответствии с октетами сообщения и используются для вычисления значения профиля. Если сообщение будет модифицировано, то значение профиля можно использовать для выявления изменений. Следовательно, профиль является электронным способом обеспечения целостности информации.

Сервисы доверия создают и поддерживают криптографические пары – *закрытый–открытый ключ*. Генерацию секретного и открытого ключа ЦП выполняет программное обеспечение – генератор ключей, предоставляемый центром сертификации ключей. ЦП – это блок информации, прикрепляемый к файлу данных автором и защищающий файл от модификации. Ключи сохраняются в разных файлах: секретный (личный) ключ – у владельца подписи, а открытый ключ проверки – в специа-

лизированном справочнике. Политика сертификатов ЦП представляется идентификатором *OID*. Это значит, что в заглавии документа должны упоминаться соответствующие идентификаторы объектов.

Имея только доступ к открытому ключу, невозможно поставить цифровую подпись. Конфиденциальность закрытого ключа обеспечивает страховку от подделки подписи. Секретный ключ – собственность владельца подписи и не предоставляется никому другому (даже центру сертификации ключей). Используя открытый ключ, можно лишь проверить цифровую подпись.

Для подписания *XML*-документа сначала классифицируют *XML*-файл и синтезируют значение профиля. Затем подписывают с помощью закрытого ключа. Дополнение с подписанным сообщением подтверждает его достоверность и целостность с помощью открытого ключа.

Заключение. Язык *XBRL*, как формат представления данных, позволяет осуществлять платформенно-независимый обмен данными между абонентами. Данные моделируются как сообщение с разметкой *XML*, обрабатываются и экспортируются во внешнюю информационную систему.

Внедрение единого формата передачи данных с расширением таксономии *XBRL* на национальном уровне, обеспечит интеграцию информационных ресурсов для функционирования электронного документооборота предприятий, банков, аудиторов и контролирующих органов.