УДК 517.925

О.С. Бичков, Є.В. Іванов

Про існування розв'язків рівняння Ляпунова на конусі

Описаны условия существования квадратичной функции Ляпунова на конусе для применения в исследовании устойчивости линейных систем с переключением и гибридных автоматов.

The conditions for the existence of a quadratic Lyapunov function on a cone are described for the switched system and hybrid automata stability investigation.

Описано умови існування квадратичної функції Ляпунова на конусі для застосування в дослідженні на стійкість лінійних систем з перемиканням і гібридних автоматів.

Вступ. Одним з методів дослідження стійкості розв'язків диференціальних рівнянь є другий метод Ляпунова. Наведемо класичну теорему.

Теорема 1. Система диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) = Ax(t)\,, \qquad (1)$$

де A – матриця розмірності $N \times N$, $x(t) \in \mathbf{R}^N$ є асимптотично стійкою тоді і лише тоді, коли існує додатно визначений розв'язок H матричного рівняння Ляпунова $A^T H + HA = -C$ для будь-якої додатно визначеної матриці C.

В роботах [1–3] розглядається використання функцій Ляпунова для дослідження гібридних автоматів та систем із перемиканнями.

Будемо використовувати такі позначення:

- $\mathbf{0}$ – нуль-вектор, або нульова матриця;
- $\le, \ge$ – порівняння дійсних чисел або покомпонентне порівняння векторів чи матриць.

Нехай задано систему із перемиканням вигляду

$$\dot{x}(t) = A_i x(t)\,,\ C_i x \ge \mathbf{0}\,,\ x(t) \in \mathbf{R}^N, i = \overline{1,n}\,. \qquad (2)$$

Конуси $\{x \in \mathbf{R}^N \mid C_i x \ge \mathbf{0}\}$ не обов'язково покривають увесь фазовий простір. Необхідно дослідити на стійкість систему (2). В літературі представлено декілька підходів до дослідження стійкості. Один із них заснований на побудові квадратичної функції Ляпунова для кожного i шляхом знаходження для матриць A_i відповідного розв'язку матричного рівняння Ляпунова [4, 5]. Особливістю системи (2) порівняно з системою (1) є те, що для квадратичних функцій Ляпунова достатньо додатної визначеності тільки в межах конусів $\{x \in \mathbf{R}^N \mid C_i x \ge \mathbf{0}\}$. Щоб врахувати цю особливість, функції Ляпунова можна будувати у такий спосіб [4]: за допомогою простих перетворень задачу побудови квадратичної функції Ляпунова на i-му конусі для системи (2) можна звести до задачі побудови квадратичної функції Ляпунова на конусі вигляду $\{x \in \mathbf{R}^N \mid x \ge \mathbf{0}\}$. Після цього, якщо буде знайдена невироджена матриця $H \in \mathbf{S}^{n\times n}$, така, що $H > \mathbf{0}$ і $A^T H + HA < \mathbf{0}$, то можна побудувати шукану функцію Ляпунова як $x^T Hx$.

У зв'язку з описаним способом побудови функцій Ляпунова для лінійних систем з перемиканням (і гібридних автоматів), авторами отримано критерій існування розв'язків рівняння $A^T H + HA < \mathbf{0}$, таких, що $H \in \mathbf{S}^{n\times n}$ і $H > \mathbf{0}$. Крім того доведено, що якщо система (2) стійка, але для неї описаним способом не можуть бути побудовані функції Ляпунова, то система (2) може бути перетворена шляхом розбиття конусів $\{x \in \mathbf{R}^N \mid C_i x \ge \mathbf{0}\}$ за конструктивною процедурою у систему з перемиканням, що вже буде допускати побудову функцій Ляпунова описаним способом.

Основні результати

Введемо такі позначення: N – фіксоване натуральне число; $\|\cdot\|$ – евклідова норма в $\mathbf{R}^N$;

Ключові слова: стійкість за Ляпуновим, лінійні системи з перемиканням, лінійні гібридні автомати.

$\langle X \rangle$ – лінійна оболонка множини $X \subseteq \mathbf{R}^N$; $\dim L$ – розмірність векторного підпростору $L \subseteq \mathbf{R}^N$; $\mathbf{S}^{N\times N}$ – множина дійсних симетричних матриць порядку N; $S_N = \{x \in \mathbf{R}^N \mid \|x\| = 1\}$ – одинична сфера; $e_i = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$ – i-й орт в $\mathbf{R}^N$; E_N – одинична матриця порядку N.

Для кожної множини $X \subseteq \mathbf{R}^N$ введемо позначення:

- $\operatorname{int}^R X$ – відносна внутрішність множини X;
- clX – замикання множини X (у звичайній топології на $\mathbf{R}^N$).

Для довільної матриці $A \in \mathbf{R}^{N\times N}$ введемо позначення:

- $\operatorname{Im}_A X = \{Ax \mid x \in X\}$ – образ множини $X \subseteq \mathbf{R}^N$;
- $A > \mathbf{0}$ – матриця A має *додатні* елементи.

Нагадаємо вигляд системи лінійних диференціальних рівнянь (1):

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ A \in \mathbf{R}^{N\times N}.$$

Означення. Система (1) має стійке тривіальне положення рівноваги на замкненому опуклому конусі $X \subseteq \mathbf{R}^N$, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що для кожної траєкторії $t \mapsto x(t)$ системи (1), такої, що $x(0) \in O_\varepsilon(\mathbf{0}) \cap X$ виконується $x(t) \in O_\delta(\mathbf{0})$ для всіх $t \in \left(0, \sup\{\tau > 0 \mid x(\tau) \in X\}\right)$.

Наведемо без доведення відому лему.

Лема 1. Нехай опуклі конуси $X, Y \subseteq \mathbf{R}^N$ такі, що $cl(X) \cap cl(Y) = \{\mathbf{0}\}$. Тоді існує $p \in \mathbf{R}^N$, для якого виконується

$$\forall x \in cl(X)\setminus\{\mathbf{0}\}, y \in cl(Y)\setminus\{\mathbf{0}\}\ \ p^T x < 0 < p^T y.$$

З цієї леми можна отримати такий наслідок.

Наслідок. Нехай опуклі конуси $X, Y \subseteq \mathbf{R}^N$ є такими, що $cl(X) \cap cl(Y) = \{0\}$. Тоді існує невироджена матриця $C \in \mathbf{R}^{N\times N}$, така, що

$$\forall x \in cl(X)\setminus\{\mathbf{0}\}, y \in cl(Y)\setminus\{\mathbf{0}\}\ \ Cx < \mathbf{0} < Cy.$$

Доведення. Розглянемо випадок $X \neq \{\mathbf{0}\}$, $Y \neq \{\mathbf{0}\}$, оскільки у випадку рівності одного з конусів $\{\mathbf{0}\}$, доведення проводиться аналогічно. В результаті застосування леми до опуклих конусів X та Y отримаємо:

$$\forall x \in cl(X)\setminus\{\mathbf{0}\}, y \in cl(Y)\setminus\{\mathbf{0}\}\ \ p^T x < 0 < p^T y$$

для деякого $p \in \mathbf{R}^N$. Покладемо

$$C(\varepsilon) = \underbrace{(p, p, .., p)}_{N}{}^T + \varepsilon E_N,\ \ \varepsilon \in \mathbf{R}.$$

Тоді

$$\forall x \in clX \cap S_N, y \in \mathrm{cl}Y \cap S_N\ \ C(0)x < \mathbf{0} < C(0)y.$$

Оскільки непорожні множини $clX \cap S_N$, $clY \cap S_N$ компактні, то існують $a_0, b_0 \in \mathbf{R}$, такі, що

$$\max_{x \in clX \cap S}\max_{i=1..N} e_i^T C(0)x < a_0 < 0 <$$
$$< b_0 < \min_{y \in \mathrm{cl}Y \cap S}\min_{i=1..N} e_i^T C(0)y.$$

Внаслідок неперервності по ε, x функції $\max\limits_{i=1..N} e_i^T C(\varepsilon)x$ існує $\varepsilon^* > 0$, для якого виконується $\forall x \in clX \cap S_N, y \in clY \cap S_N$.

Тоді $\max\limits_{i=1..N} e_i^T C(\varepsilon^*)x \le a_0 < 0 < b_0 \le \min\limits_{i=1..N} e_i^T C(\varepsilon^*)y$, і, як наслідок,

$$\forall x \in clX\setminus\{\mathbf{0}\},\ y \in clY\setminus\{\mathbf{0}\}\ \ C(\varepsilon^*)x < \mathbf{0} < C(\varepsilon^*)y.$$

Тоді можна покласти $C = C(\varepsilon^*)$. **Наслідок доведено**.

Лема 2. Нехай $X \subseteq \mathbf{R}^N$ – опуклий конус, $A \in \mathbf{R}^{N\times N}$ – матриця і $clX \cap \operatorname{Im}_A \mathrm{cl}X = \{\mathbf{0}\}$. Тоді існує невироджена $H \in \mathbf{S}^{N\times N}$, така, що

$$\forall x \in clX\setminus\{\mathbf{0}\}\ \ x^T Hx > 0\ \text{ і }\ x^T(A^T H + HA)x \le 0.$$

Доведення. Застосуємо наслідок з попередньої леми до конусів X та $\operatorname{Im}_A X$. Отримаємо, що

$$\forall x \in cl(X)\setminus\{\mathbf{0}\},\ y \in \operatorname{Im}_A cl(X)\setminus\{\mathbf{0}\}\ \ Cx < \mathbf{0} < Cy$$

для деякої невиродженої матриці C. Покладемо $H = C^T C$. Тоді при довільному $x \in clX\setminus\{\mathbf{0}\}$ маємо $x^T Hx = \|Cx\|^2 > 0$ і $x^T(A^T H + HA)x = 2x^T C^T CAx = 2(Cx)^T(CAx) \le 0$, оскільки $Ax \in cl\operatorname{Im}_A X$ та $Cx < \mathbf{0} \le C(Ax)$.

Отже матриця H – шукана. **Лему доведено**.

З наведеної леми можна отримати критерій існування квадратичної функції Ляпунова для системи (1) на конусі $\{x \in \mathbf{R}^N \mid x \ge \mathbf{0}\}$. За цих умов функція Ляпунова буде додатно визначеною на конусі $\{x \in \mathbf{R}^N \mid x \geq \mathbf{0}\}$, причому її похідна внаслідок системи лінійних диференціальних рівнянь на цьому конусі буде від'ємно визначеною.

Теорема 2. Умова $\forall x \geq \mathbf{0}, x \neq \mathbf{0}$, $A\mathbf{x} \ngeq 0$ є необхідною і достатньою умовою для існування невиродженої матриці $H \in \mathbf{S}^{n\times n}$, такої, що $H > \mathbf{0}$ і $A^T H + HA < \mathbf{0}$.

Доведення. Доведемо необхідність, тобто, якщо існує $H \in \mathbf{S}^{n\times n}$, така, що $H > \mathbf{0}$ і $A^T H + HA < \mathbf{0}$, то $\forall x \geq \mathbf{0}, x \neq \mathbf{0}$, $A\mathbf{x} \ngeq 0$. Припустивши існування вектора $x_0 \geq \mathbf{0}, x_0 \neq \mathbf{0}$, для якого $Ax_0 \geq \mathbf{0}$, отримаємо $x_0^T(A^T H + HA)x_0 = 2(Hx_0, Ax_0) > 0$, оскільки $Hx_0 \geq \mathbf{0}$, $Ax_0 \geq \mathbf{0}$ і обидва не дорівнюють нулю, тобто суперечність з умовою $A^T H + HA < \mathbf{0}$. Отже $\forall x \geq \mathbf{0}, x \neq \mathbf{0}$, $A\mathbf{x} \ngeq 0$. Достатність випливає з леми 2.

Теорему доведено.

Нехай $A \in \mathbf{R}^{N\times N}$ – невироджена матриця і система (1) має стійке тривіальне положення рівноваги на замкненому опуклому конусі X. Шляхом зведення до дійсної канонічної форми Фробеніуса матрицю A можна подати у вигляді

$$A = T(A_1 \oplus A_2)T^{-1},$$

де $\oplus$ – пряма сума, $T \in \mathbf{R}^{N\times N}$ – невироджена матриця, $A_1 \in \mathbf{R}^{k\times k}, -A_2 \in \mathbf{R}^{l\times l}$ – гурвіцеві матриці (в цьому записі допускається $k = 0$, якщо A гурвіцева).

Виконаємо заміну змінних $x = Ty$. Оскільки для системи з гурвіцевою матрицею завжди існує квадратична функція Ляпунова на всьому просторі, то для системи (1) існує квадратична функція Ляпунова на X тоді і лише тоді, коли для системи $\dot{y} = A_2 y$ існує квадратична функція Ляпунова на $\mathrm{Pr}_2 \mathrm{Im}_{T^{-1}} X$, де Pr_2 – проекція $\mathbf{R}^{k+l} \to \mathbf{R}^l$, тобто така, що залишає останні l компонент вектора.

Згідно леми 2 така функція існуватиме, якщо $\mathrm{Im}_A \mathrm{Pr}_2 \mathrm{Im}_{T^{-1}} X \cap \mathrm{Pr}_2 \mathrm{Im}_{T^{-1}} X = \{\mathbf{0}\}$.

Приклад. Покажемо, як теорему 1 можна застосовувати для побудови функції Ляпунова на конусі $Gx \geq 0$. Розглянемо систему

$$\dot{x} = Ax\,,\ Gx \geq 0\,, \qquad (3)$$

де $A, G \in \mathbf{R}^{n\times n}$, A невироджена. Зробимо невироджену заміну змінних $y = (y_1, .. y_n)^T = Tx$, таку, що для деяких індексів $0 \leq i < j \leq n+1$ маємо $Gx \geq 0 \Leftrightarrow y_1, .. y_i \geq 0, y_j, .. y_n = 0$.

Можна без обмеження загальності вважати, що обмежень $y_j, .. y_n = 0$ немає.

Тоді система (3) буде рівносильною системі

$$\dot{y} = TAT^{-1}y = \overline{A}y\,,\ y_1, .. y_i \geq 0\,. \qquad (4)$$

Якщо в результаті цих дій $i = n$, тобто на всі змінні y_i накладається умова невід'ємності, то можна застосувати твердження: якщо $\forall y \geq 0$, $y \neq 0$ наявне $\overline{A}y \ngeq 0$, то існує квадратична форма $y^T Hy, H \in \mathbf{S}^{n\times n}$, така, що для довільного $y \geq 0$, $y \neq 0$ маємо

$$y^T Hy > 0 \text{ і } y^T(\overline{A}^T H + H\overline{A})y < 0,$$

тобто, для довільного x, такого, що $Gx \geq 0$ маємо

- $x^T T^T HTx > 0$
- $x^T T^T((TA^T T^{-1})^T H + HTAT^{-1})Tx =$
  $= x^T(A^T T^T HT + T^T HTA)x < 0$

і квадратична форма $x^T T^T HTx$ може виступати як функція Ляпунова на $Gx \geq 0$.

Повернемось до розгляду гібридних автоматів.

Означення. Локальний стан лінійного гібридного автомата, що є замкненим опуклим конусом $X \subseteq \mathbf{R}^N$ і неперервна динаміка в якому описується системою $\dot{x} = Ax$, називається *локально стійким*, якщо система $\dot{x} = Ax$ має стійке тривіальне положення рівноваги.

Можна навести приклад, який демонструє можливість ситуації, коли стан лінійного гібридного автомата локально стійкий (гібридний автомат завжди перебуває в цьому стані скінченний час, після чого виходить з нього), але при цьому не існує відповідної стану квадратичної функції Ляпунова.

Отже, *критерій* локальної стійкості стану на основі *квадратичних* функцій отримати *неможливо*.

Для побудови шуканого прикладу розглянемо таку систему на конусі $x_1, x_2 \geq 0$:

$$\begin{cases} 3\dot{x}_1 = 7x_1 + 2x_2 \\ 3\dot{x}_2 = -2x_1 + 2x_2 \end{cases} \qquad (5)$$

Стаціонарна точка (0,0) має тип нестійкого вузла.

Розв'язок системи (5) за початкових умов $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 3z$ має вигляд:

$$x_1(t;z) = z(-2e^t + 2e^{2t}),$$

$$x_2(t;z) = z(4e^t - e^{2t}).$$

При цьому якщо $z > 0$ і $t \in [0, \ln 4]$, то $(x_1, x_2) \geq \mathbf{0}$. Зробимо заміну $e^t = \tau$ для $t \geq 0$. Покажемо, що для системи (5) на конусі $x \geq \mathbf{0}$ не існує функції Ляпунова у вигляді квадратичної функції. Припустимо супротивне: нехай існує $V(x_1, x_2)$ – квадратична функція, така, що $V(0,0) = 0$, $V(x) > 0\ \forall x \geq \mathbf{0}, x \neq \mathbf{0}$, $\frac{\partial}{\partial t} V(x_1(t;z),$ $x_2(t; z)) \leq 0\ \forall z > 0$, $t \in [0, \ln 4]$.

Зауважимо, що $\begin{pmatrix} x_1(t;z) \\ x_2(t;z) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} z\tau \\ z\tau^2 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Тоді $F(u_1, u_2) = V(H^{-1}(u_1, u_2)^T)$, $u_1, u_2 \in \mathbf{R}$ є квадратичною функцією, причому $F(0, 0) = 0$, $F(z\tau, z\tau^2) > 0\ \ \forall z > 0,\ \tau \in [1, 4]$, бо при цьому $t \in [0, \ln 4]$ і відповідно $(x_1, x_2) \geq \mathbf{0}$. $\frac{\partial}{\partial t} F(z\tau,$ $z\tau^2) \leq 0\ \ \forall z > 0, \tau \in [1, 4]$.

Оскільки F – квадратична функція, то $F(z\tau,$ $z\tau^2) = z^2\varphi(\tau) + z\psi(\tau) + \eta(\tau)$ для деяких многочленів $\varphi(\tau), \psi(\tau), \eta(\tau)$. Тоді $\eta(\tau) \equiv F(0,0) = 0$. $z(z\varphi(\tau) + \psi(\tau)) > 0$ при $z > 0,\ \tau \in [1, 4]$, звідки після ділення на z, спрямовуючи z до нуля та до нескінченності, отримуємо

$$\varphi(\tau) \geq 0, \psi(\tau) \geq 0\ \ \forall \tau \in [1, 4]. \qquad (6)$$

$z(z\varphi'(\tau) + \psi'(\tau)) \leq 0$ при $z > 0, \tau \in [1, 4]$, звідки аналогічно отримуємо

$$\varphi'(\tau) \leq 0, \psi'(\tau) \leq 0\ \ \forall \tau \in [1, 4]. \qquad (7)$$

З вигляду аргументів $F(z\tau, z\tau^2)$ випливає, що $\varphi(\tau) = \tau^2(a + b\tau + c\tau^2)$ і $\psi(\tau) = \tau(d + e\tau)$ для деяких констант $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$.

Доведемо, що $\varphi(\tau) \equiv 0$. Із (6) та (7) отримуємо:

$$a + b\tau + c\tau^2 \geq 0,\ \forall \tau \in [1, 4],$$

$$2a + 3b\tau + 4c\tau^2 \leq 0,\ \forall \tau \in [1, 4].$$

Звідси отримуємо нерівність

$$\frac{2a + 3b\tau_1}{\tau_1^{\ 2}} \leq \frac{4a + 4b\tau_2}{\tau_2^{\ 2}}, \forall \tau_1, \tau_2 \in [1, 4].$$

Покладаючи $(\tau_1, \tau_2) \in \{(1, 1), (4, 4), (1, 4)$, отримуємо нерівності $2a + b \geq 0$, $a + 2b \geq 0$, $7a +$ $+8b \leq 0$, з яких випливає, що $a = b = 0$.

Доведемо, що $\psi(\tau) \equiv 0$. Із (6) та (7) отримуємо: $d + e\tau \geq 0, \forall \tau \in [1, 4]$, $d + 2e\tau \leq 0, \forall \tau \in [1, 4]$.

Тоді $e \leq 0, d \geq 0$. Крім того, $-\frac{d}{\tau} \leq e \leq -\frac{d}{2\tau}$, звідки $\frac{d}{2\tau_1} \leq \frac{d}{\tau_2} \forall \tau_1, \tau_2 \in [1, 4]$ і, покладаючи $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 4$: $0 \leq \frac{d}{2} \leq \frac{d}{4}$, звідки $d = 0$ і з попередньої нерівності $e = 0$.

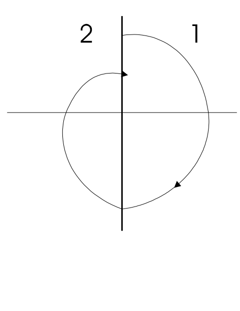
Оскільки $\varphi(\tau) \equiv 0$ і $\psi(\tau) \equiv 0$, то $V(H^{-1}(u_1, u_2)^T) \equiv$ $\equiv 0$ і отримуємо суперечність з припущенням про додатну визначеність V, що завершує побудову прикладу.

Незважаючи на те, що квадратичної функції Ляпунова для локально стійкого дискретного стану може не існувати, може трапитися, що його можна розбити на підстани, у кожному з яких буде існувати квадратична функція Ляпунова.

Для прикладу розглянемо лінійний гібридний автомат в $\mathbf{R}^2$ з двома циклічно зв'язаними дискретними станами. Інваріантна множина стану 1 є $Inv_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$, а стану 2 є $Inv_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \leq 0\}$. На прямій $x_1 = 0$ здійснює автомат перемикання з поточного стану на протилежний. Неперервна динаміка в дискретному стані 1 і 2 визначається відповідно рівняннями $\dot{x} = A_1 x$ і $\dot{x} = A_2 x$, де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 1 \\ -1 & 0{,}2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 \\ -1 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Фазовий портрет описаного гібридного автомата показано на рисунку.



Портрет складається зі стійкої траєкторії в стані 2 і нестійкої в стані 1, тоді траєкторія стійка. Для цього автомата не існує квадратичної функції Ляпунова V_1. Припустимо, що вона є. Тоді з міркувань симетрії в лівій півплощині також $\dot{V}_1 < 0$. Одержимо, що для диференціального рівняння зі стійкою матрицею $\dot{V}_1 < 0$ в усій площині, що неможливо. Але якщо розділити обидві інваріантні множини навпіл, то задача стане розв'язною, тобто можна знайти квадратичні функції Ляпунова: покладемо

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 1 \\ -1 & 0{,}2 \end{pmatrix},\ A_3 = A_4 = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 \\ -1 & -0{,}5 \end{pmatrix},$$

$$Inv_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0,\ x_2 > 0\},$$
$$Inv_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0,\ x_2 < 0\},$$
$$Inv_3 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 < 0,\ x_2 < 0\},$$
$$Inv_4 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 < 0,\ x_2 > 0\}.$$

Тоді як функцію Ляпунова можна взяти квадратичні форми $x^T G_i x, i = 1,2,3,4$, де

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, G_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що даний приклад не є лише окремим випадком, а і в загальному випадку конус можна розбити на множину конусів, що не перетинаються, таких, що на кожному існують квадратичні функції Ляпунова. Введемо такі позначення.

Для невиродженого лінійного оператора $\mathbf{A}$ на $\mathbf{R}^N$, позначимо

- $D_n^{\mathbf{A}}(X) = \bigcap_{i=0}^{n} \mathrm{Im}_{\mathbf{A}^{-i}} X,\ n \ge 0$;
- $d_n^{\mathbf{A}}(X) = \dim\left\langle D_n^{\mathbf{A}}(X) \right\rangle,\ n \ge 0$;
- $\nu^{\mathbf{A}}(X)$ – найменше $n \ge 0$, для якого

$D_n^{\mathbf{A}}(X) = \{\mathbf{0}\}$, або $+\infty$, якщо такого не існує.

Верхні індекси будемо опускати, коли вважаємо $\mathbf{A}$ фіксованим. Будемо використовувати таке скорочення: *ЗОК – замкнений опуклий конус*. Є такі властивості, що перевіряються безпосередньо за означенням:

- $X \subseteq Y \Rightarrow D_n(X) \subseteq D_n(Y)$;
- $D_n(X \cup Y) \supseteq D_n(X) \cup D_n(Y)$,

$D_n(X \cap Y) = D_n(X) \cap D_n(Y)$;

- $D_n(X \setminus Y) \subseteq D_n(X) \setminus Y$;
- $D_m(D_n(X)) = D_{m+n}(X)$;
- X – ЗОК $\Rightarrow D_n(X)$ – ЗОК.

Лема 3. Нехай $A \in \mathbf{R}^{N \times N}$ і $-A$ є гурвіцевою матрицею, і система (1) на ЗОК $X \subseteq \mathbf{R}^N$ має стійке тривіальне положення рівноваги. Тоді $\nu^{\mathbf{A}}(X) < \infty$.

Доведення. Припустимо супротивне: $\forall n \in \mathbf{N}$ $D_n(X)$ містить ненульовий вектор. Тоді послідовність множин $D_n(X) \cap S_N$ є послідовністю вкладених непорожніх компактних множин, тому $\exists a \in S_N \cap \bigcap_{n \ge 0} D_n(X) = S_N \cap \bigcap_{n \ge 0} \mathrm{Im}_{A^{-n}} X$, звідки $\forall n \in \mathbf{N}$ $A^n a \in X$. З цього випливає, що

$$\forall t > 0, n \in \mathbf{N}\ c_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!}(A^i a) \in X,$$

а отже $\exp(At)a = \lim_{n \to \infty} c_n(t) \in X$.

Отже, існує ненульова (бо $a \in S$) траєкторія $x^*(t) = \exp(At)a$ вихідної системи, що лежить в X для $t > 0$.

Оскільки матриця $-A$ гурвіцева, то функція $t \mapsto \left\| x^*(t) \right\|$ необмежена, що суперечить припущенню про стійкість системи на X.

Лему доведено.

Лема 4. Нехай $X \subseteq \mathbf{R}^N$ – замкнений опуклий конус зі скінченною множиною твірних в $\mathbf{R}^N$ і $\nu^{\mathbf{A}}(X) = n+1$. Тоді існують замкнені опуклі конуси зі скінченною множиною твірних $X_j, j = \overline{1,m}$ такі, що $\bigcup_{j=1}^{m} X_j = X$ і $d_n(X_j) < d_n(X)$.

Доведення. Покладемо $X_1 = D_n(X)$, $Y = X \setminus \mathrm{int}^R D_n(X)$; $X = X_1 \cup Y$. Тоді $d_n(X_1) = 0 < d_n(X)$, оскільки $D_1(X_1) = D_{n+1}(X) = \{\mathbf{0}\}$ і $d_n(Y) < d_n(X)$, оскільки $D_n(X \setminus \mathrm{int}^R D_n(X)) \subseteq D_n(X) \setminus \mathrm{int}^R D_n(X)$. Оскільки X – замкнений опуклий конус зі скінченною множиною твірних в $\mathbf{R}^N$, то Y можна подати об'єднанням елементів скінченної множини замкнених опуклих конусів зі скінченною множиною твірних $X_2,\dots,X_m$, для яких $d_n(X_j)\le d_n(Y)<d_n(X)$. **Лему доведено**.

Наслідок. Нехай $X\subseteq \mathbf{R}^N$ – замкнений опуклий конус зі скінченною множиною твірних в $\mathbf{R}^N$ і $\nu^{A}(X)<\infty$. Тоді існують замкнені опуклі конуси зі скінченною множиною твірних X_j $j=1\dots m$ такі, що $\bigcup_{j=1}^{m} X_j = X$ і $\nu(X_j)\le 1$.

Доведення. Доведемо наслідок індукцією за параметром $r(X)=(\nu(X),d_{\nu(X)-1}(X))\in \mathbf{N}_0^2$, (в цьому записі $d_{-1}\equiv 0$), вважаючи множину $\mathbf{N}_0^2$ лексикографічно (цілком) впорядкованою. При $r(X)=(0,d)$ та $r(X)=(1,d)$ твердження очевидне. Припустимо, що лему доведено у випадку $r(X)<r_0$ і доведемо у випадку $r(X)=r_0$. За лемою 4 подамо X у вигляді скінченного об'єднання замкнених опуклих конусів зі скінченною множиною твірних Y_j, $j=\overline{1,m}$, для яких $d_{\nu(X)-1}(Y_j)<d_{\nu(X)-1}(X)$. Тоді для кожного j можливі два випадки:

- якщо $d_{\nu(X)-1}(Y_j)=0$, то $\nu(Y_j)<\nu(X)$ і $r(Y_j)<r(X)$;
- інакше $\nu(Y_j)>\nu(X)-1$, тому $\nu(Y_j)=\nu(X)$ і $d_{\nu(Y_j)-1}(Y_j)<d_{\nu(X)-1}(X)$ і $r(Y_j)<r(X)$.

В обох випадках $r(Y_j)<r_0$ і, за припущенням індукції, кожну з множин Y_j можна подати скінченним об'єднанням замкнених опуклих конусів X_j^i, для яких $\nu(X_j^1)\le 1$.

Наслідок доведено.

Теорема 3. Нехай $A\subseteq \mathbf{R}^{N\times N}$ – невироджена і система (1) на замкненому опуклому конусі зі скінченною множиною твірних $X\subseteq \mathbf{R}^N$ має стійке тривіальне положення рівноваги. Тоді існують замкнені опуклі конуси зі скінченною множиною твірних X_j, $j=1\dots m$, такі, що $\bigcup_{j=1}^{m} X_j = X$ і на кожному X_j існує квадратична функція Ляпунова для системи (1).

Доведення. Шляхом зведення до дійсної канонічної форми, матрицю A можна подати у вигляді $A=T^{-1}(A_1\oplus A_2)T$, де $A_1\in \mathbf{R}^{N_1\times N_1}$, $A_2\in \mathbf{R}^{N_2\times N_2}$, $T\in \mathbf{R}^{N\times N}$ – невироджені матриці, A_1 і $-A_2$ є гурвіцевими матрицями.

Тому без обмеження загальності можна вважати, що $A_1=\oplus A_2$. За теоремою Ляпунова існує додатно визначена квадратична форма

$$V(x_1)=x_1^T H^1 x_1,\ H^1\in \mathbf{R}^{N_1\times N_1},$$

яка є функцією Ляпунова для системи $\dot{x}_1=A_1x_1$ на $\mathbf{R}^{N_1}$.

Позначимо через Pr_2 проектування на підпростір $\langle e_{N_1+1},\dots,e_{N_2}\rangle$ простору $\mathbf{R}^N$. Тоді $\mathrm{Pr}_2 X$ (де Pr_2 – проекція $\mathbf{R}^{N_1+N_2}\to \mathbf{R}^{N_2}$), є ЗОК в $\mathbf{R}^{N_2}$, на якому система $\dot{x}_2=A_2x_2$ має стійке тривіальне положення рівноваги. За наслідком з леми 4, лемами 3 та 2, існують замкнені опуклі конуси зі скінченною множиною твірних $X_1^2,\dots,X_m^2\subseteq \mathbf{R}^{N_2}$, такі, що $\bigcup_{j=1}^{m} X_j^2=\mathrm{Pr}_2 X$ і на кожному з них існує функція Ляпунова $V_j(x_2)= x_2^T H_j^2 x_2$ для системи $\dot{x}_2=A_2x_2$.

Визначимо замкнені опуклі конуси зі скінченною множиною твірних у такий спосіб:

$$X_j = X\cap(\mathbf{R}^N\times X_j^2),\ j=1\dots m,\ \bigcup_{j=1}^{m} X_j = X.$$

Перевіримо, що для кожного j, квадратична форма $V_j(x)=x^T H_j x^T$, $j=1\dots m$, де $H_j=H^1\oplus H_j^2$ буде функцією Ляпунова для системи $\dot{x}=Ax$ на відповідному замкненому опуклому конусі зі скінченною множиною твірних X_j:

- якщо $x=(x_1,x_2)\in X_j\setminus\{\mathbf{0}\}$, то $V(x)= V_1(x_1)+V_2(x_2)>0$, бо $x_2\in \mathrm{Pr}_2 X$;
- якщо в деякий момент t траєкторія $x(t)=(x_1(t),x_2(t))\in X_j$, то $\dot{V}(x(t))=\dot{V}_1(x_1(t))+ \dot{V}_2(x_2(t))\le 0$, причому строго менше нуля, якщо $N_1>0$. Отже, на кожному X_j існує квадратична функція Ляпунова для системи (1). **Теорему доведено**.

Висновки. Отримано критерій існування розв’язків рівняння Ляпунова $A^T H + HA < 0$, таких, що $H \in \mathbf{S}^{n\times n}$ і $H > \mathbf{0}$. Доведено, що якщо система з перемиканням стійка, але для неї не може бути побудовано квадратичних функцій Ляпунова на основі критерію теореми 2, то вона може бути перетворена за конструктивною процедурою у систему з перемиканням, що вже буде допускати побудову функцій Ляпунова на основі критерію теореми 2.

1. *Branicky M.* Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems // IEEE Trans. Automat. Control. – 1998. – N 4, **43** – P. 475–482.
2. *Johansson M., Rantzer A.* Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems // Ibid. – P. 555–559.
3. *Бычков А.С., Меркурьев М.Г.* Достаточные условия устойчивости стационарного состояния линейных гибридных автоматов // УСиМ. – 2007. – № 2. – С. 18–23.
4. *Stability* of switched systems: A Lie-algebraic condition / D. Liberzon, J.P. Hespanha, A.S. Morse // Systems Control Lett. – 1999. – **37**. – P. 117–122.
5. *Unsolved* Problems in Mathematical Systems and Control Theory / Ed. by V.D. Blondel and A. Megretski. – Princeton: Princeton University Press, 2004. – 334 p.

Поступила 18.11.2009
Тел. для справок: (044) 259-0530, 450-3212 (Киев)
E-mail: *bychkovtk@gmail.com, ivanov.eugen@gmail.com*

О.С. Бычков, Е.В. Иванов

О существовании решений уравнения Ляпунова на конусе

Введение. Одним из методов исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений является второй метод Ляпунова. Приведем классическую теорему.

Теорема 1. Система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad (1)$$

где A – матрица размерности $N \times N$, $x(t) \in \mathbf{R}^N$ – асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда существует положительно определенное решение H матричного уравнения Ляпунова $A^T H + HA = -C$ для любой положительно определенной матрицы C.

В работах [1–3] предложено использование функций Ляпунова для исследования гибридных автоматов и систем с переключениями.

Будем использовать такие обозначения:

- $\mathbf{0}$ – нуль-вектор, или нулевая матрица;
- $\le$, $\ge$ – сравнение вещественных чисел или покомпонентное сравнение векторов или матриц.

Пусть задана система с переключением вида

$$\dot{x}(t) = A_i x(t),\ C_i x \ge \mathbf{0},\ x(t) \in \mathbf{R}^N, i = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

где конусы $\{x \in \mathbf{R}^N \mid C_i x \ge \mathbf{0}\}$ не обязательно покрывают все фазовое пространство.

Необходимо исследовать на устойчивость систему (2). В литературе представлено несколько подходов к исследованию устойчивости. Один из них основан на построении квадратичной функции Ляпунова для каждого i путем нахождения для матриц A_i соответствующего решения матричного уравнения Ляпунова [4, 5]. Особенностью системы (2) в сравнении с системой (1) является то обстоятельство, что для квадратичных функций Ляпунова достаточно положительной определенности только в пределах конусов $\{x \in \mathbf{R}^N \mid C_i x \ge \mathbf{0}\}$. Для того, чтобы учесть эту особенность, функции Ляпунова можно строить таким образом [4]: посредством простых преобразований задачу построения квадратичной функции Ляпунова на i-м конусе для системы (2) можно свести к задаче построения квадратичной функции Ляпунова на конусе вида $\{x \in \mathbf{R}^N \mid x \ge \mathbf{0}\}$. Затем, если будет найдена невырожденная матрица $H \in \mathbf{S}^{n\times n}$, такая, что $H > \mathbf{0}$ и $A^T H + HA < \mathbf{0}$, то можно построить искомую функцию Ляпунова как $x^T Hx$.

В связи с описанным способом построения функций Ляпунова для линейных систем с переключением (и гибридных автоматов), получен критерий существования решений уравнения $A^T H + HA < \mathbf{0}$, таких, что $H \in \mathbf{S}^{n\times n}$ и $H > \mathbf{0}$. Доказано также, что если система (2) устойчива, но для нее описанным способом не могут быть построены функции Ляпунова, то система (2) может быть преобразована путем разбивки конусов $\{x \in \mathbf{R}^N \mid C_i x \ge \mathbf{0}\}$ по конструктивной процедуре в систему с переключением, которая уже будет допускать построение функций Ляпунова описанным способом.

Основные результаты

Введем такие обозначения: N – фиксированное натуральное число; $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbf{R}^N$; $\langle X \rangle$ – линейная оболочка множества $X \subseteq \mathbf{R}^N$; $\dim L$ – размерность векторного подпространства $L \subseteq \mathbf{R}^N$; $\mathbf{S}^{N\times N}$ – множество

Ключевые слова: стойкость по Ляпунову, линейные системы с переключением, линейные гибридные автоматы.

действительных симметричных матриц порядка N; $S_N = \{x \in \mathbf{R}^N \mid \|x\| = 1\}$ – единичная сфера; $e_i = (0, 0, \ldots 1, \ldots \ldots 0)^T$ – u орт в $\mathbf{R}^N$; E_N – единичная матрица порядка N.

Для каждого множества $X \subseteq \mathbf{R}^N$ введем обозначение:

- $\mathrm{int}^R X$ – относительная внутренность множества X;
- $\mathrm{cl}\, X$ – замыкание множества X (в обычной топологии на $\mathbf{R}^N$).

Для произвольной матрицы $A \in \mathbf{R}^{N \times N}$ введем обозначение:

- $\mathrm{Im}_A X = \{Ax \mid x \in X\}$ – образ множества $X \subseteq \mathbf{R}^N$;
- $A > \mathbf{0}$ – матрица A, имеющая положительные элементы.

Напомним вид системы линейных дифференциальных уравнений (1): $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $A \in \mathbf{R}^{N \times N}$.

Определение. Система (1) имеет устойчивое тривиальное положение равновесия на замкнутом выпуклом конусе $X \subseteq \mathbf{R}^N$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для каждой траектории $t \mapsto x(t)$ системы (1), такой, что $x(0) \in O_\varepsilon(\mathbf{0}) \cap X$ выполняется $x(t) \in O_\delta(\mathbf{0})$ для всех $t \in \left(0, \sup\{\tau > 0 \mid x(\tau) \in X\}\right)$.

Приведем без доказательства известную лемму.

Лемма 1. Пусть выпуклые конусы $X, Y \subseteq \mathbf{R}^N$ такие, что $cl(X) \cap cl(Y) = \{\mathbf{0}\}$. Тогда существует $p \in \mathbf{R}^N$, для которого выполняется

$$\forall x \in \mathrm{cl}(X) \setminus \{\mathbf{0}\}, y \in \mathrm{cl}(Y) \setminus \{\mathbf{0}\} \;\; p^T x < 0 < p^T y .$$

Из этой леммы можно получить следствие:

Следствие. Пусть выпуклые конусы $X, Y \subseteq \mathbf{R}^N$ такие, что $cl(X) \cap cl(Y) = \{\mathbf{0}\}$. Тогда существует невырожденная матрица $C \in \mathbf{R}^{N \times N}$, такая, что

$$\forall x \in \mathrm{cl}(X) \setminus \{\mathbf{0}\}, y \in \mathrm{cl}(Y) \setminus \{\mathbf{0}\} \;\; Cx < \mathbf{0} < Cy .$$

Доказательство. Рассмотрим случай $X \neq \{\mathbf{0}\}$, $Y \neq \{\mathbf{0}\}$, поскольку в случае равенства одного из конусов $\{\mathbf{0}\}$, доказательство проводится аналогично. В результате применения леммы к выпуклым конусам X и Y получим: $\forall x \in \mathrm{cl}(X) \setminus \{\mathbf{0}\}, y \in \mathrm{cl}(Y) \setminus \{\mathbf{0}\}$ $p^T x < 0 < p^T y$ для некоторого $p \in \mathbf{R}^N$. Положим $C(\varepsilon) = \underbrace{(p, p, .., p)}_{N}^T + \varepsilon E_N$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$.

Тогда $\forall x \in \mathrm{cl}\, X \cap S_N, y \in \mathrm{cl}\, Y \cap S_N \;\; C(0)x < \mathbf{0} < C(0)y$.

Поскольку непустые множества $\mathrm{cl}\, X \cap S_N$, $\mathrm{cl}\, Y \cap S_N$ компактны, то существуют $a_0, b_0 \in \mathbf{R}$, такие, что

$$\max_{x \in \mathrm{cl}\, X \cap S} \max_{i=1..N} e_i^T C(0)x < a_0 < 0 < b_0 < \min_{y \in \mathrm{cl}\, Y \cap S} \min_{i=1..N} e_i^T C(0)y .$$

В силу непрерывности по ε, x функции $\max\limits_{i=1..N} e_i^T C(\varepsilon)x$ существует $\varepsilon^* > 0$, для которого выполняется

$$\forall x \in \mathrm{cl}\, X \cap S_N, y \in \mathrm{cl}\, Y \cap S_N .$$

Тогда $\max\limits_{i=1..N} e_i^T C(\varepsilon^*)x \le a_0 < 0 < b_0 \le \min\limits_{i=1..N} e_i^T C(\varepsilon^*)y$, и, как следствие, $\forall x \in \mathrm{cl}\, X \setminus \{\mathbf{0}\}$, $y \in \mathrm{cl}\, Y \setminus \{\mathbf{0}\}$ $C(\varepsilon^*)x < \mathbf{0} < C(\varepsilon^*)y$.

Тогда можно положить $C = C(\varepsilon^*)$. **Следствие доказано**.

Лемма 2. Пусть $X \subseteq \mathbf{R}^N$ – выпуклый конус, $A \in \mathbf{R}^{N \times N}$ – матрица и $\mathrm{cl}\, X \cap \mathrm{Im}_A \mathrm{cl}\, X = \{\mathbf{0}\}$. Тогда существует невырожденная $H \in \mathbf{S}^{N \times N}$, такая, что $\forall x \in \mathrm{cl}\, X \setminus \{\mathbf{0}\}$ $x^T Hx > 0$ и $x^T(A^T H + HA)x \le 0$.

Доказательство. Применим следствие из предыдущей леммы к конусам X и $\mathrm{Im}_A X$. Получим, что $\forall x \in \mathrm{cl}(X) \setminus \{\mathbf{0}\}, y \in \mathrm{Im}_A \mathrm{cl}(X) \setminus \{\mathbf{0}\}$ $Cx < \mathbf{0} < Cy$ для некоторой невырожденной матрицы C. Положим $H = C^T C$. Тогда для произвольного $x \in \mathrm{cl}\, X \setminus \{\mathbf{0}\}$ имеется $x^T Hx = \|Cx\|^2 > 0$ и $x^T(A^T H + HA)x = 2x^T C^T CAx = 2(Cx)^T(CAx) \le 0$, поскольку $Ax \in \mathrm{cl}\mathrm{Im}_A X$ и $Cx < \mathbf{0} \le \;\; \le C(Ax)$. Следовательно, матрица H – искомая. **Лемма доказана**.

Из приведенной леммы можно получить критерий существования квадратичной функции Ляпунова для системы (1) на конусе $\{x \in \mathbf{R}^N \mid x \ge \mathbf{0}\}$. При этих условиях функция Ляпунова будет положительно определенной на конусе $\{x \in \mathbf{R}^N \mid x \ge \mathbf{0}\}$, причем ее производная в силу системы линейных дифференциальных уравнений на этом конусе будет отрицательно определенной.

Теорема 2. Условие $\forall x \ge \mathbf{0}, x \neq \mathbf{0}$, $A\mathbf{x} \ngeq 0$ необходимое и достаточное для существования невырожденной матрицы $H \in \mathbf{S}^{n \times n}$ такой, что $H > \mathbf{0}$ и $A^T H + HA < \mathbf{0}$.

Доказательство. Докажем необходимость, т.е., что если существует $H \in \mathbf{S}^{n \times n}$, такая, что $H > \mathbf{0}$ и $A^T H + HA < \mathbf{0}$, то $\forall x \ge \mathbf{0}, x \neq \mathbf{0}$, $A\mathbf{x} \ngeq 0$. Предположив существование вектора $x_0 \ge \mathbf{0}, x_0 \neq \mathbf{0}$, для которого $Ax_0 \ge \mathbf{0}$, получим $x_0^T(A^T H + HA)x_0 = 2(Hx_0, Ax_0) > 0$, поскольку $Hx_0 \ge \mathbf{0}$, $Ax_0 \ge \mathbf{0}$, и оба не равны нулю, что противоречит условию $A^T H + HA < \mathbf{0}$. Следовательно, $\forall x \ge \mathbf{0}, x \neq \mathbf{0}$, $A\mathbf{x} \ngeq 0$. Достаточность следует из леммы 2. **Теорема доказана**.

Пусть $A \in \mathbf{R}^{N \times N}$ – невырожденная матрица, и система (1) имеет устойчивое тривиальное положение равновесия на замкнутом выпуклом конусе X. Путем приведения к действительной каноничной форме Фробениуса матрицу A можно подать в виде $A = T(A_1 \oplus A_2)T^{-1}$, где $\oplus$ – прямая сумма, $T \in \mathbf{R}^{N \times N}$ – невырожденная матрица $A_1 \in \mathbf{R}^{k \times k}, -A_2 \in \mathbf{R}^{l \times l}$ – гурвицевы матрицы (в этой записи допускается $k = 0$, если A – гурвицева).

Выполним замену переменных $x = Ty$. Поскольку для системы с гурвицевой матрицей всегда существует квадратичная функция Ляпунова на всем пространстве, то для системы (1) существует квадратичная функция Ляпунова на X тогда и только тогда, когда для системы

$\dot{y} = A_2 y$ существует квадратичная функция Ляпунова на $\mathrm{Pr}_2 \mathrm{Im}_{T^{-1}} X$, где Pr_2 – проекция $\mathbf{R}^{k+l} \to \mathbf{R}^l$, которая оставляет последние l компонентов вектора.

Согласно лемме 2 такая функция будет существовать, если $\mathrm{Im}_A \mathrm{Pr}_2 \mathrm{Im}_{T^{-1}} X \cap \mathrm{Pr}_2 \mathrm{Im}_{T^{-1}} X = \{\mathbf{0}\}$.

Пример. Покажем, как теорему 1 можно применять для построения функции Ляпунова на конусе $Gx \geq 0$. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax, \; Gx \geq 0, \tag{3}$$

где $A, G \in \mathbf{R}^{n \times n}$, A невырождена. Сделаем невырожденную замену переменных $y = (y_1, \ldots, y_n)^T = Tx$, такую, что для некоторых индексов $0 \leq i < j \leq n+1$ наблюдается эквивалентность $Gx \geq 0 \Leftrightarrow y_1, \ldots, y_i \geq 0, y_j, \ldots, y_n = 0$.

Можно без ограничения всеобщности считать, что ограничений $y_j, \ldots, y_n = 0$ нет.

Тогда система (3) будет равносильной системе

$$\dot{y} = TAT^{-1} y = \overline{A} y, \; y_1, \ldots, y_i \geq 0 \; . \tag{4}$$

Если в результате этих действий $i = n$, т.е., на все переменные y_i налагается условие неотъемлемости, то можно применить утверждение: если $\forall y \geq 0, y \neq 0$ имеется $\overline{A} y \ngeq 0$, то существует квадратичная форма $y^T H y$, $H \in \mathbf{S}^{n \times n}$, такая, что для произвольного $y \geq 0, y \neq 0$ имеем

$$y^T H y > 0 \text{ и } y^T (\overline{A}^T H + H \overline{A}) y < 0,$$

т.е., для произвольного x, такого, что $Gx \geq 0$ имеем условия

- $x^T T^T H T x > 0$
- $x^T T^T ((TAT^{-1})^T H + HTAT^{-1}) Tx =$
  $= x^T (A^T T^T H T + T^T H T A) x < 0$

и квадратичная форма $x^T T^T H T x$ может выступать как функция Ляпунова на $Gx \geq 0$.

Вернемся к рассмотрению гибридных автоматов.

Определение. Локальное состояние линейного гибридного автомата, которое есть замкнутым выпуклым конусом $X \subseteq \mathbf{R}^N$, и непрерывная динамика в котором описывается системой $\dot{x} = Ax$, называется *локально устойчивым*, если система $\dot{x} = Ax$ имеет устойчивое тривиальное положение равновесия.

Можно привести пример, который подтверждает возможность ситуации, когда состояние линейного гибридного автомата локально устойчиво (гибридный автомат всегда находится в этом состоянии законченное время, после чего выходит из него), но при этом не существует соответствующей состоянию квадратичной функции Ляпунова.

Таким образом, *критерий* локальной устойчивости состояния на основе *квадратичных* функций получить *невозможно*.

Для построения искомого примера рассмотрим такую систему на конусе $x_1, x_2 \geq 0$:

$$\begin{cases} 3\dot{x}_1 = 7x_1 + 2x_2 \\ 3\dot{x}_2 = -2x_1 + 2x_2 \end{cases}. \tag{5}$$

Стационарная точка (0,0) имеет тип неустойчивого узла.

Решение системы (5) при начальных условиях $x_1(0) = 0, x_2(0) = 3z$ имеет вид:

$$x_1(t; z) = z(-2e^t + 2e^{2t}),$$
$$x_2(t; z) = z(4e^t - e^{2t}).$$

При этом, если $z > 0$ и $t \in [0, \ln 4]$, то $(x_1, x_2) \geq \mathbf{0}$. Сделаем замену $e^t = \tau$ для $t \geq 0$. Покажем, что для системы (5) на конусе $x \geq \mathbf{0}$ не существует функции Ляпунова в виде квадратичной функции. Допустим противоположное: пусть существует $V(x_1, x_2)$ – квадратичная функция, такая, что $V(0,0) = 0$, $V(x) > 0 \; \forall x \geq \mathbf{0}, x \neq \mathbf{0}$,

$\dfrac{\partial}{\partial t} V(x_1(t; z), x_2(t; z)) \leq 0 \; \forall z > 0, t \in [0, \ln 4]$.

Заметим, что $\begin{pmatrix} x_1(t; z) \\ x_2(t; z) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} z\tau \\ z\tau^2 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Тогда $F(u_1, u_2) = V(H^{-1}(u_1, u_2)^T)$, $u_1, u_2 \in \mathbf{R}$ – квадратичная функция, причем $F(0,0) = 0$, $F(z\tau, z\tau^2) > 0$ $\forall z > 0, \tau \in [1, 4]$, поскольку при этом $t \in [0, \ln 4]$, и соответственно $(x_1, x_2) \geq \mathbf{0}$. $\dfrac{\partial}{\partial t} F(z\tau, z\tau^2) \leq 0 \; \forall z > 0, \tau \in [1, 4]$.

Поскольку F – квадратичная функция, то $F(z\tau, z\tau^2) = z^2 \varphi(\tau) + z\psi(\tau) + \eta(\tau)$ для некоторых многочленов $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau), \eta(\tau)$. Тогда $\eta(\tau) \equiv F(0,0) = 0$, $z(z\varphi(\tau) + \psi(\tau)) > 0$ при $z > 0, \tau \in [1, 4]$, откуда после деления на z и устремления z к нулю и к бесконечности получаем

$$\varphi(\tau) \geq 0, \; \psi(\tau) \geq 0 \;\; \forall \tau \in [1, 4]. \tag{6}$$

$z(z\varphi'(\tau) + \psi'(\tau)) \leq 0$ при $z > 0, \tau \in [1, 4]$, откуда аналогично получаем

$$\varphi'(\tau) \leq 0, \; \psi'(\tau) \leq 0 \;\; \forall \tau \in [1, 4]. \tag{7}$$

Из вида аргументов выражения $F(z\tau, z\tau^2)$ следует, что $\varphi(\tau) = \tau^2 (a + b\tau + c\tau^2)$ и $\psi(\tau) = \tau(d + e\tau)$ для некоторых констант $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$.

Докажем, что $\varphi(\tau) \equiv 0$. Из (6) и (7) получим:

$$a + b\tau + c\tau^2 \geq 0, \; \forall \tau \in [1, 4],$$
$$2a + 3b\tau + 4c\tau^2 \leq 0, \; \forall \tau \in [1, 4].$$

Отсюда получаем неравенство

$$\frac{2a + 3b\tau_1}{\tau_1^2} \leq \frac{4a + 4b\tau_2}{\tau_2^2}, \forall \tau_1, \tau_2 \in [1, 4].$$

Положив $(\tau_1, \tau_2) \in \{(1,1), (4,4), (1,4)\}$, получаем неравенства $2a + b \geq 0$, $a + 2b \geq 0$, $7a + 8b \leq 0$, из которых следует, что $a = b = 0$.

Докажем, что $\psi(\tau) \equiv 0$. Из (6) и (7) получим:

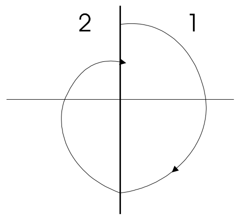
$$d + e\tau \geq 0, \forall\tau \in [1,4],\ d + 2e\tau \leq 0, \forall\tau \in [1,4].$$

Тогда $e \leq 0, d \geq 0$. Кроме того, $-\dfrac{d}{\tau} \leq e \leq -\dfrac{d}{2\tau}$, откуда $\dfrac{d}{2\tau_1} \leq \dfrac{d}{\tau_2} \forall\tau_1, \tau_2 \in [1,4]$ и, положив $\tau_1 = 1, \tau_2 = 4$: $0 \leq \dfrac{d}{2} \leq$ $\leq \dfrac{d}{4}$, откуда $d = 0$ и из предыдущего неравенства $e = 0$.

Поскольку $\varphi(\tau) \equiv 0$ и $\psi(\tau) \equiv 0$, то $V(H^{-1}(u_1, u_2)^T) \equiv 0$ и получаем противоречие с предположением о положительной определенности *V*, что завершает построение примера.

Несмотря на то, что квадратичной функции Ляпунова для локально устойчивого дискретного состояния может не существовать, может случиться, что локальное состояние можно разбить на подсостояния, в каждом из которых будет существовать квадратичная функция Ляпунова.

Рассмотрим линейный гибридный автомат в $\mathbf{R}^2$ с двумя циклически связанными дискретными состояниями. Инвариантное множество состояния 1 есть $Inv_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$, а состояния 2 есть $Inv_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \leq 0\}$. На прямой $x_1 = 0$ осуществляет автомат переключения из текущего состояния на противоположное. Непрерывная динамика в дискретном состоянии 1 и 2 определяется, соответственно, уравнениями $\dot{x} = A_1 x$ и $\dot{x} = A_2 x$, где $A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 1 \\ -1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 \\ -1 & -0{,}5 \end{pmatrix}$. Фазовый портрет описанного гибридного автомата показан на рисунке.



Портрет состоит из устойчивой траектории в состоянии 2 и неустойчивой в состоянии 1, при этом траектория устойчива. Для этого автомата не существует квадратичной функции Ляпунова V_1. Предположим, что она существует. Тогда из рассуждений симметрии в левой полуплоскости также $\dot{V}_1 < 0$. Получаем, что для дифференциального уравнения с устойчивой матрицей $\dot{V}_1 < 0$ во всей плоскости, что невозможно. Но если разделить оба инвариантных множества пополам, то задача становится разрешимой, т.е. можно найти квадратичные функции Ляпунова: допустим

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 1 \\ -1 & 0{,}2 \end{pmatrix},\ A_3 = A_4 = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 \\ -1 & -0{,}5 \end{pmatrix},\ Inv_1 =$$
$$= \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0,\ = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0,\ x_2 > 0\},$$

$Inv_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0,\ x_2 < 0\}$,

$Inv_3 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 < 0,\ x_2 < 0\}$, $Inv_4 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 < 0,\ x_2 > 0\}$.

Тогда в качестве функций Ляпунова можно взять квадратичные формы $x^T G_i x, i = 1, 2, 3, 4$, где $G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $G_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $G_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Докажем, что приведенный пример не является лишь частным случаем, но и в общем случае конус можно разбить на множество конусов, которые не пересекаются, таких, что на каждом существуют квадратичные функции Ляпунова. Введем такие обозначения.

Для невырожденного линейного оператора $\mathbf{A}$ на $\mathbf{R}^N$, пометим

- $D_n^{\mathbf{A}}(X) = \bigcap_{i=0}^{n} \mathrm{Im}_{\mathbf{A}^{-i}} X$, $n \geq 0$;
- $d_n^{\mathbf{A}}(X) = \dim \left\langle D_n^{\mathbf{A}}(X) \right\rangle$, $n \geq 0$;
- $\nu^{\mathbf{A}}(X)$ – менее всего $n \geq 0$, для которого $D_n^{\mathbf{A}}(X) = \{\mathbf{0}\}$, или $+\infty$, если такого не существует.

Верхние индексы будем опускать, когда примем $\mathbf{A}$ фиксированным. Будем использовать такое сокращение: ЗВК – замкнутый выпуклый конус. Имеются такие свойства, что проверяются непосредственно по определениям:

- $X \subseteq Y \Rightarrow D_n(X) \subseteq D_n(Y)$;
- $D_n(X \cup Y) \supseteq D_n(X) \cup D_n(Y)$,
  $D_n(X \cap Y) = D_n(X) \cap D_n(Y)$;
- $D_n(X \setminus Y) \subseteq D_n(X) \setminus Y$;
- $D_m(D_n(X)) = D_{m+n}(X)$;
- X – ЗВК $\Rightarrow$ $D_n(X)$ – ЗВК.

Лемма 3. Пусть $A \in \mathbf{R}^{N \times N}$ и $-A$ – гурвицевы матрицы, и система (1) на ЗВК $X \subseteq \mathbf{R}^N$ имеет устойчивое тривиальное положение равновесия. Тогда $\nu^{\mathbf{A}}(X) < \infty$.

Доказательство. Допустим противоположное: для каждого *n* множество $D_n(X)$ содержит ненулевой вектор. Тогда последовательность множеств $D_n(X) \cap S_N$ – последовательность вложенных непустых компактных множеств, поэтому $\exists a \in S_N \cap \bigcap_{n \geq 0} D_n(X) = S_N \cap \bigcap_{n \geq 0} \mathrm{Im}_{A^{-n}} X$, откуда $\forall n \in \mathbf{N}\ A^n a \in X$. Из этого следует, что $\forall t > 0$, $n \in \mathbf{N}\ c_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{t^i}{i!}(A^i a) \in X$, а следовательно, $\exp(At)a = \lim_{n \to \infty} c_n(t) \in X$.

Итак, существует ненулевая (ибо $a \in S$) траектория $x^*(t) = \exp(At)a$ исходной системы, которая лежит в *X* для $t > 0$.

Поскольку матрица $-A$ гурвицева, то функция $t \mapsto \|x^*(t)\|$ не ограничена, что противоречит предположению об устойчивости системы на *X*. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $X \subseteq \mathbf{R}^N$ – замкнутый выпуклый конус с законченным множеством образующих в $\mathbf{R}^N$ и $\nu^{\mathbf{A}}(X) = n+1$. Тогда существуют замкнутые выпуклые конусы с законченным множеством образующих $X_j, j=\overline{1,m}$, такие, что $\bigcup_{j=1}^{m} X_j = X$ и $d_n(X_j) < d_n(X)$.

Доказательство. Положим $X_1 = D_n(X)$, $Y = X \setminus \setminus \operatorname{int}^R D_n(X)$; $X = X_1 \cup Y$. Тогда $d_n(X_1) = 0 < d_n(X)$, поскольку $D_1(X_1) = D_{n+1}(X) = \{\mathbf{0}\}$ и $d_n(Y) < d_n(X)$, так как $D_n(X \setminus \operatorname{int}^R D_n(X)) \subseteq D_n(X) \setminus \operatorname{int}^R D_n(X)$. Поскольку *X* – замкнутый выпуклый конус с законченным множеством образующих в $\mathbf{R}^N$, тогда *Y* можно подать объединением элементов законченного множества замкнутых выпуклых конусов с законченным множеством образующих $X_2,..,X_m$, для которых $d_n(X_j) \le d_n(Y) < d_n(X)$. **Лемма доказана**.

Следствие. Пусть $X \subseteq \mathbf{R}^N$ – замкнутый выпуклый конус с законченным множеством образующих в $\mathbf{R}^N$ и $\nu^{\mathbf{A}}(X) < \infty$. Тогда существуют замкнутые выпуклые конусы с законченным множеством образующих $X_j, j = 1\ldots m$ таких, что $\bigcup_{j=1}^{m} X_j = X$ и $\nu(X_j) \le 1$.

Доказательство. Докажем следствие индукцией по параметру $r(X) = (\nu(X), d_{\nu(X)-1}(X)) \in \mathbf{N}_0^2$ (в этой записи $d_{-1} \equiv 0$), считая множество $\mathbf{N}_0^2$ лексикографически (вполне) упорядоченным. При $r(X) = (0,d)$ и $r(X) = (1,d)$ утверждение очевидно. Допустим, что лемма доказана в случае $r(X) < r_0$, и докажем в случае $r(X) = r_0$. Согласно лемме 4, представим *X* в виде законченного объединения замкнутых выпуклых конусов с законченным множеством образующих $Y_j, j = \overline{1,m}$, для которых $d_{\nu(X)-1}(Y_j) < d_{\nu(X)-1}(X)$. Тогда для каждого *j* возможны два случая:

- если $d_{\nu(X)-1}(Y_j) = 0$, то $\nu(Y_j) < \nu(X)$ и $r(Y_j) < r(X)$;
- иначе $\nu(Y_j) > \nu(X) - 1$, поэтому $\nu(Y_j) = \nu(X)$ и $d_{\nu(Y_j)-1}(Y_j) < d_{\nu(X)-1}(X)$ и $r(Y_j) < r(X)$.

В обоих случаях $r(Y_j) < r_0$ и, по предположению индукции, каждое из множеств Y_j можно представить законченным объединением замкнутых выпуклых конусов X_j^i, для которых $\nu(X_j^1) \le 1$. Следствие доказано.

Теорема 3. Пусть матрица $A \in \mathbf{R}^{N \times N}$ – невырожденная и система (1) на замкнутом выпуклом конусе с законченным множеством образующих $X \subseteq \mathbf{R}^N$ имеет устойчивое тривиальное положение равновесия. Тогда существуют замкнутые выпуклые конусы с законченным множеством образующих $X_j, j = 1\ldots m$, таких, что $\bigcup_{j=1}^{m} X_j = X$, и на каждом X_j существует квадратичная функция Ляпунова для системы (1).

Доказательство. Путем приведения к действительной каноничной форме матрицу *A* можно представить в виде $A = T^{-1}(A_1 \oplus A_2)T$, где $A_1 \in \mathbf{R}^{N_1 \times N_1}$, $A_2 \in \mathbf{R}^{N_2 \times N_2}$, $T \in \mathbf{R}^{N \times N}$ – невырожденные матрицы A_1 и $-A_2$ есть гурвицевы матрицы.

Поэтому без ограничения всеобщности можно считать, что $A = A_1 \oplus A_2$. Согласно теореме Ляпунова существует положительно определенная квадратичная форма $V(x_1) = x_1^T H^1 x_1$, $H^1 \in \mathbf{R}^{N_1 \times N_1}$, которая есть функцией Ляпунова для системы $\dot{x}_1 = A_1 x_1$ на $\mathbf{R}^{N_1}$.

Обозначим через Pr_2 проектирование на подпространство $\langle e_{N_1+1},..,e_{N_2} \rangle$ пространства $\mathbf{R}^N$. Тогда $\mathrm{Pr}_2\, X$ (где Pr_2 – проекция $\mathbf{R}^{N_1+N_2} \to \mathbf{R}^{N_2}$), имеется ЗВК в $\mathbf{R}^{N_2}$, на котором система $\dot{x}_2 = A_2 x_2$ имеет устойчивое тривиальное положение равновесия. Согласно следствию леммы 4, леммам 3 и 2, существуют замкнутые выпуклые конусы с законченным множеством образующих $X_1^2,.., X_m^2 \subseteq \mathbf{R}^{N_2}$, такие, что $\bigcup_{j=1}^{m} X_j^2 = \mathrm{Pr}_2\, X$, и на каждом из них существует функция Ляпунова $V_j(x_2) = x_2^T H_j^2 x_2$ для системы $\dot{x}_2 = A_2 x_2$.

Определим замкнутые выпуклые конусы с законченным множеством образующих так:

$$X_j = X \cap (\mathbf{R}^N \times X_j^2),\ j = 1\ldots m,\ \bigcup_{j=1}^{m} X_j = X.$$

Проверим, что для каждого *j*, квадратичная форма

$$V_j(x) = x^T H_j x^T,\ j = 1\ldots m,$$

где $H_j = H^1 \oplus H_j^2$ будет функцией Ляпунова для системы $\dot{x} = Ax$ на соответствующем замкнутом выпуклом конусе с законченным множеством образующих X_j:

- если $x = (x_1, x_2) \in X_j \setminus \{\mathbf{0}\}$, то $V(x) = V_1(x_1) + V_2(x_2) > 0$, ибо $x_2 \in \mathrm{Pr}_2\, X$;
- если в некоторый момент *t* выполняется $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in X_j$, то $\dot{V}(x(t)) = \dot{V}_1(x_1(t)) + \dot{V}_2(x_2(t)) \le 0$, причем строго меньше нуля, если $N_1 > 0$.

Таким образом, на каждом X_j существует квадратичная функция Ляпунова для системы (1). **Теорема доказана**.

Заключение. Получен критерий существования решений уравнения Ляпунова $A^T H + HA < \mathbf{0}$, таких, что $H \in \mathbf{S}^{n \times n}$ и $H > \mathbf{0}$. Доказано, что, если система с переключением устойчива, но для нее не могут быть построены квадратичные функции Ляпунова на основе критерия теоремы 2, то она может быть преобразована посредством конструктивной процедуры в систему с переключением, которая уже будет допускать построение функций Ляпунова на основе критерия теоремы 2.

●

Правила подготовки материалов

К рассмотрению принимаются не опубликованные ранее работы по тематике, приведенной на второй странице обложки журнала. Все статьи рецензируются. Решение редколлегии по содержанию каждого номера журнала утверждается ученым советом МНУЦИТиС. Одобренные к печати материалы редактируются. В случае отклонения рукописи один экземпляр и рецензия возвращаются автору. В одном номере журнала публикуется только одна статья автора, в том числе и в соавторстве.

В редакцию необходимо представить:

1. Рукопись (2 экз.), напечатанную через два интервала, объемом не более 16 страниц, на одной стороне листа формата А4 (кегль 12). Один экземпляр должен быть подписан автором(ами).

Страницы оригинала должны иметь поля: левое – 25 мм, правое – 10 мм, верхнее – 20 мм, нижнее – 25 мм.

2. Аннотацию (2 экз.), напечатанную на отдельной странице (до 5 строк) с указанием фамилии автора(ов) и названия статьи **на русском, украинском и английском языках**; через два интервала.
3. Сопроводительное письмо организации за подписью руководителя.
4. Акт о несекретности материалов.
5. Дискету 3,5″ с текстом статьи, аннотацией и иллюстрациями.
6. Сведения об авторе(ах) – фамилия, имя, отчество, ученая степень, место работы, должность, адрес, телефон, факс, *e-mail*.
7. Копию квитанции о подписке на журнал УСиМ (не менее чем на полгода).

В начале статьи необходимо указать индекс УДК. Используемая литература приводится общим списком в конце статьи в порядке упоминания. Графики, рисунки и таблицы с подписями должны быть распечатаны на отдельных страницах либо выполнены тушью для сканирования.

Для подготовки текста на дискете необходимо использовать редактор *Microsoft Word* любой версии (шрифт *Times New Roman*; кегль 12, интервал двойной; отступ 1 см.), для набора формул – редактор *Microsoft Equation Editor v.* 2.0/3.0 из состава *Microsoft Office*. Иллюстрации могут быть выполнены в любом графическом редакторе.

Материалы можно высылать электронной почтой (по адресу *gor*15*@yandex.ru*) с обязательным дублированием на бумаге в двух экземплярах или почтой (простое письмо).

В соответствии с постановлением президиума ВАК Украины от 15.01.2003 г. № 7-05/1 «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» статьи, принимаемые к опубликованию, должны состоять из следующих элементов:

- постановка проблемы и ее связь с научными или практическими заданиями;
- анализ последних исследований и публикаций (где начато разрешение данной проблемы), на которые опирается автор;
- выделение неразрешенной части общей проблемы, чему посвящена предлагаемая статья;
- формулировка цели статьи (постановка задачи);
- изложение основного материала исследований с полным обоснованием полученных научных результатов;
- выводы из данного исследования и перспективы дальнейших разработок в данном направлении.

Редакция обращается с просьбой к авторам, желающим опубликовать статью в нашем журнале на украинском или английском языке, прилагать к направляемым материалам русский аналогичный вариант текста.

Редколлегия