

О.Н. Березский

**Теоретико-групповой подход к анализу симметричных изображений**

Предложен теоретико-групповой подход к анализу симметричных изображений. Разработаны алгоритмы анализа. Такой подход дает возможность с одних теоретических позиций эффективно описывать, сохранять, анализировать и синтезировать разные классы изображений. Для реализации алгоритмов использована интегрированная среда программирования *Visual C++ Express Edition* и открытая библиотека функций компьютерного зрения *OpenCV*.

A group-theoretical approach to the analysis of symmetric images is suggested. The algorithms of the analysis of symmetric images are developed. Such approach makes it possible from only theoretical positions to effectively describe, save, analyze and synthesize the different classes of images. For the algorithms implementation the visual C++ Express Edition programming system and the open library of functions of computer vision OpenCV are used.

Запропоновано теоретико-груповий підхід до аналізу симетричних зображень. Розроблено алгоритми аналізу. Такий підхід дозволяє з одних теоретичних позицій ефективно описувати, зберігати, аналізувати і синтезувати різні класи зображень. Для реалізації алгоритмів використано інтегроване середовище програмування *Visual C++ Express Edition* та відкриту бібліотеку функцій комп'ютерного зору *OpenCV*.

**Введение.** Симметрия – фундаментальное свойство природы [1]. Ей отведена важная роль в науке, технике, искусстве и других видах интеллектуальной деятельности человечества. Понятие *симметрия* употребляется в широком и узком значениях. В широком значении симметрия – это красота, гармония природы. В узком – строгое геометрическое понятие. Симметричными в геометрическом понимании будут фигуры конгруэнтные или зеркально равные. Человек имеет врожденную способность выделять симметрию. Для компьютерного зрения анализ симметричных структур – сложная задача, требующая разработки специальных методов и алгоритмов.

Для анализа сложных изображений используют разные классические методы из теории распознавания образов: статистические и структурные [2], алгебраические и геометрические, методы, которые базируются на искусственных нейронных сетях. По мнению автора, приемлемыми методами для анализа симметричных изображений представляются структурные, использующие кристаллографические группы симметрии [3–5].

В данной статье предложен теоретико-групповой подход, базирующийся на теории кристаллографических групп, что позволяет из одних теоретических позиций строить алгоритмы анализа симметричных изображений.

Предлагаемая статья представляет собой продолжение работы, опубликованной ранее [6]. В

данной статье терминология и обозначения, приведенные в [6], сохранены. В следующем разделе приведем основные определения и результаты предыдущей статьи.

**Постановка задачи и определения**

Приведем основные понятия из теории групп. Как известно, группа – это некоторое множество  $G$ , вместе с заданной на нем бинарной операцией, удовлетворяющей условиям [7]:

- ассоциативность:  $(xy)z = x(yz)$  ;
- существование нейтрального элемента: существует  $e \in G$  :  $ex = xe = x$  ;
- существование обратного элемента: для каждого  $x$  существует  $x^{-1}$  такой, что  $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ .

Пусть  $G$  – группа. Подмножество  $H \subseteq G$  называют подгруппой, если  $gh \in H$ ,  $g^{-1} \in H$  для любых  $g, h \in H$ . Подгруппу  $H \subset G$  называют нормальной, если для каждого  $h \in H$  и каждого  $g \in G$  имеем  $g^{-1}hg \in H$ . Рассматривается случай, когда  $G$  – подгруппа группы  $A_n$  аффинных преобразований пространства  $\mathbf{R}^n$ .

Группа  $G$  при этом называется *дискретной*, если выполнено условие, когда существует  $C > 0$  такое, что для каждого  $x \in \mathbf{R}^n$  и каждого  $g \in G$ ,  $g \neq e$ ,  $\|x - gx\| > C$ .

*Орбитой* точки  $x \in \mathbf{R}^n$  называют множество  $\{gx \mid g \in G\}$ .

Центром группы  $G$  называют подгруппу  $H$  элементов, которые коммутируют со всеми остальными:

$$Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ для каждого } x \in G\}.$$

Фундаментальной областью для группы  $G$  называют произвольное множество представителей по одному из каждой орбиты. Как правило, для приложений фундаментальную область выбирают ограниченной.

Кристаллографические группы [8] – это дискретные группы движений евклидова пространства, которые имеют ограниченную фундаментальную область.

**Теорема 1** [8]. В  $\mathbf{R}^2$  существует 17 кристаллографических групп с точностью до эквивалентности.

Полосой называем множество

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |y| \leq 1\}.$$

**Теорема 2** [8]. В  $\mathbf{R}$  существует семь разных групп.

Если  $G, H$  – группы, то отображение  $f: G \rightarrow H$  называют гомоморфизмом, если  $f(g_1 g_2) = f(g_1) \times f(g_2)$  для каждых  $g_1, g_2 \in G$ . Если при этом  $f$  взаимно однозначное отображение, то  $f$  называют *изоморфизмом*, а группы  $G, H$  – *изоморфными*.

**Теорема 3** [8]. Подгруппа параллельных переносов есть нормальная подгруппа в кристаллографической группе  $G$ . Эта группа равна своему централизатору и изоморфна группе  $\mathbf{Z}^n$  целочисленных векторов в  $\mathbf{R}^n$ .

Для нормальной подгруппы  $H \subset G$  рассмотрим семейство смежных классов, т.е. семейство  $\{gH \mid g \in G\}$ . Если такое семейство конечно, то подгруппу  $H$  называют подгруппой конечного индекса в  $G$ . Известно, что подгруппа  $L$  трансляций (линейных переносов) является подгруппой конечного индекса в кристаллографической группе  $G$ .

Следовательно, в кристаллографических группах полосы и плоскости можно выделить подгруппы трансляций. Эти группы – одномерные и двумерные соответственно.

Известно [7], что существует подгруппа  $H$  группы  $G$  такая, что выполнены условия:

- $L$  – нормальная подгруппа в  $G$ ;
- каждый элемент  $g$  группы  $G$  однозначно изображается в виде произведения  $g = lh$ , где  $l \in L, h \in H$ ;
- выполняется условие  $hLh^{-1} = L$  для каждого  $h \in H$ .

В этом случае применяют обозначение  $G = L \times H$  и принимают, что  $G$  – полупрямое произведение  $L$  и  $H$ . Фундаментальная область группы  $L$  называется *рапортом*.

Существуют такие геометрические порождающие преобразования  $T_1, T_2, \dots, T_n$  (параллельный перенос, центральная симметрия, осевая симметрия, скользящее отображение, поворот). Каждое геометрическое преобразование в аффинном пространстве задается в матричном виде так:  $T = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$ , где  $a, b, c$  и  $d, m, n$

осуществляют соответственно сдвиг, поворот, отображение, локальное масштабирование;  $m$  и  $n$  выполняют смещение.

Обозначим множество этих геометрических порождающих преобразований через  $S = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ . Эти превращения соответствуют аксиомам абстрактной группы.

Пусть задано поле зрения  $P = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq l, 1 \leq y \leq k\}$ , где  $l$  и  $k$  – длина и ширина прямоугольной рамки – поля зрения. На поле зрения  $P$  задано элементарное изображение  $Ime$ .

Введем понятие *несимметричного* изображения. Несимметричным называют изображение, построенное без использования геометрических превращений  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .

Элементарное изображение  $Ime$  – несимметричная часть поля зрения  $Ime \subset P$ .

Для получения рапорта необходимо выполнить геометрические преобразования над элементарным изображением  $Ime$ , т.е.  $Rp = S(Ime) = \bigcup_{s \in S} s(Ime)$ ;  $S(Ime) = \{s(x, y) \mid x, y \in Ime\}$ .

Следовательно, рапорт  $Rp$  – изображение, полученное в результате выполнения геометрических преобразований над элементарным изображением. При этом выполняется условие  $S(Ime) \cap Ime = \emptyset$ , т.е. при преобразованиях в

образовании рапорта отсутствует наложение элементарных изображений, т.е.  $s_1(Ime) \cap s_2(Ime) = \emptyset$ ,  $s_2 \in S$ ,  $s_1 \in S$ ,  $s_1 \neq s_2$ .

Если осуществить параллельные переносы  $L$  вдоль одной или двух осей, то получим соответственно симметричное изображение  $Im_s$  на полосе или плоскости, т.е.

$$l(Rp) = \{l(x, y) | x, y \in Rp\};$$

$$Im_s = \bigcup_{l \in L} l(Rp) = \bigcup_{l \in L} l \left( \bigcup_{s \in S} s(Ime) \right);$$

$$Rp = \bigcup_{s \in S} s(Ime).$$

Следовательно, изображение, построенное на основе выполнения параллельных переносов над рапортом, назовем *симметричным*.

Обозначим через  $A = \{G_1, G_2, \dots, G_7\}$  множество групп полосы, а через  $B = \{H_1, H_2, \dots, H_{17}\}$  – множество групп плоскости (в дальнейшем будем рассматривать только множество  $B$ ).

Существует множество, состоящее из 17 симметричных  $Im_s^e, Im_s^e, \dots, Im_s^e$  эталонных изображений  $M_o$ , построенных на основе множества  $M_o = \{Im_s^e, Im_s^e, \dots, Im_s^e\}$ .

Каждое симметричное изображение построено на основе определенной плоской группы  $H_i$ , т.е.

$$Im_s^e = \{h(Ime) | h \in H_i\}.$$

Уравнение эталонного (идеального) изображения в матричной форме можно представить в виде  $Im_s^e = T_L^e [T_n^e (T_{n-1}^e (T_{n-2}^e \dots T_1^e (Ime)))]$ , где  $T_1^e, \dots, T_{n-1}^e, T_n^e$  – матрицы идеальных порождающих преобразований рапорта,  $T_L^e$  – матрица идеальной трансляции [6].

Задано реальное (искаженное) симметричное изображение  $Im_s^x$ , уравнение которого следующее:  $Im_s^x = T_L [T_n (T_{n-1} (T_{n-2} \dots (T_1 (Ime)))]$ , где  $T_1, \dots, T_{n-1}, T_n$  – матрицы реальных порождающих преобразований рапорта,  $T_L$  – матрица реальной трансляции. Кроме этого, задана мак-

симальная погрешность искажения реального симметричного изображения  $Im_s^x - \Delta_m$ .

Необходимо найти:

- группу  $H^*$ , на основе которой построено изображение  $Im_s^x$ , для которой

$$H^* = \arg \min_{T_1^e, T_2^e, \dots, T_n^e} \rho \left( Im_s^x, T_n^e (T_{n-1}^e (T_{n-2}^e \dots (T_1^e (Ime)))) \right),$$

где  $\rho$  – заданная метрика.

- погрешности порождающих преобразований  $T_1, T_2, \dots, T_n$ :  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  ( $\Delta_1 = |T_1 - T_1^e|$ ,  $\Delta_2 = |T_2 - T_2^e|$ , ...,  $\Delta_n = |T_n - T_n^e|$ ); суммарную погрешность искажения реального симметричного изображения  $Im_s^x$ :  $\Delta$ , причем  $\Delta \leq \Delta_m$ .

### Метод анализа симметричных изображений

Данный метод базируется на обобщенном алгоритме анализа (рис. 1). Сначала рассмотрим уравнения эталонного и реального симметричных изображений и эталонные преобразования для групп полосы и плоскости.

Уравнение эталонного симметричного изображения в матричной форме имеет вид:

$$Im_s^e = T_L^e [T_n^e (T_{n-1}^e (T_{n-2}^e \dots T_1^e (Ime)))].$$

Порождающие преобразования, используемые в данном уравнении, – эталонные (идеальные). Поэтому и симметричное изображение, получаемое в результате применения данных преобразований, также эталонное.

Поскольку каждую кристаллографическую группу можно представить в виде полупрямого произведения  $G = L \times H$ , где  $H$  – рапорт,  $L$  – подгруппа трансляций, то выделим рапорты для групп плоскости [7].

Аналогично эталонный рапорт можно представить в матричной форме

$$Rp^e = T_n^e (T_{n-1}^e (T_{n-2}^e \dots T_1^e (Ime))),$$

где  $T_1^e, T_2^e, \dots, T_n^e$  – матрицы эталонных порождающих преобразований рапорта. Матрицы эталонных порождающих преобразований для групп полосы и плоскости представлены в табл. 1, 2 [7].

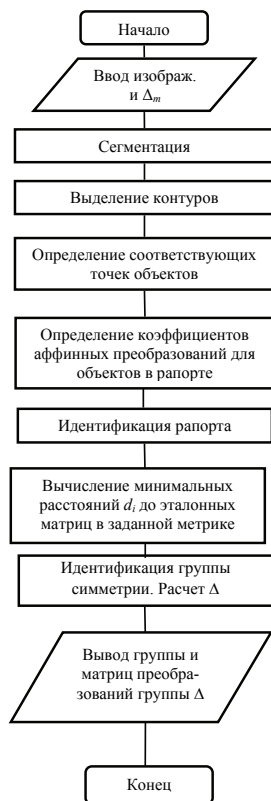


Рис. 1. Обобщенный алгоритм анализа симметричных изображений

Таблица 1. Группы полосы

Название группы	Порождающие преобразования групп полосы в матричном виде	
	I	II
$p1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
$pg$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, m \neq 0^1$	
$p1m$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
$p2$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	
$pmg$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, m \neq 0$
$pm$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	
$pmm$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Уравнение реального (искаженного) симметричного изображения следующее:

$$Im s^x = T_L [T_n (T_{n-1} (T_{n-2} \dots T_1 (Im e)))]$$

<sup>1</sup> Элемент  $m$  – коэффициент, задающий сдвиг по  $OX$  для порождающего преобразования.

где  $T_1, T_2, \dots, T_n$  – матрицы реальных порождающих преобразований, коэффициенты которых близки или равны эталонным коэффициентам.

Таблица 2. Группы плоскости

Название группы	Порождающие преобразования групп плоскости в матричном виде			
	I	II	III	IV
$p1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$			
$p2$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$			
$pm$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$			
$pg$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $m_1 = -n_2^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $m_2 = -n_1$		
$cm$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$			
$pmm$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		
$pmg$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$		
$pgg$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$		
$cmm$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$		
$p4$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$		
$p4m$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
$p4g$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	
$p3$	$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$		
$p31m$	$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	
$p3m1$	$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	
$p6$	$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	0
$p6m$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<sup>2</sup> Элементы  $m_1, n_1, m_2, n_2$  – коэффициенты, задающие сдвиг по  $OX$  и  $OY$  соответственно для первого и второго порождающих преобразований.

## Обобщенный алгоритм анализа

Симметричное векторное изображение  $Ims^x$ , поступающее на вход блока анализа, сегментируется с целью идентификации отдельных объектов и фона. Затем проходит выделение контуров отдельных объектов и идентификация координат соответствующих трех точек на контурах, на основе которых вычисляются коэффициенты аффинных преобразований (матриц порождающих преобразований) между анализируемыми объектами. Следующий шаг – вычисление минимальных расстояний  $d_i$  к эталонным матрицам в заданной метрике с заданной максимальной погрешностью преобразования  $\Delta_m$ . На основе определенных эталонных порождающих преобразований идентифицируется определенная группа симметрии и вычисляется погрешность преобразований  $\Delta$ .

Детализируем некоторые алгоритмы.

### Алгоритм определения координат соответствующих точек на контуре

Координаты ключевых точек на контуре вычисляются следующим образом:

1. Для  $i$ -го объекта вычисляются координаты центра масс объекта  $M(x_c, y_c)$ .
2. Строится прямая  $m$ , проходящая через центр масс и пересекающая контур объекта в двух точках. Точки  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  определяются так, чтобы выполнялось условие  $|AM| \geq |MB|$  (рис. 2), и вычисляется угол наклона  $\theta$  (прямой  $m$  к оси  $Ox$ ).

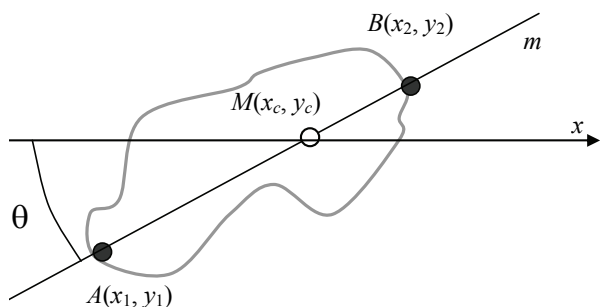


Рис. 2. Определение точек  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$

3. Для определения третьей точки  $C$  через центр масс проводится прямая  $n$ , перпендикулярная к большей полуоси. Прямая  $n$  пересекает выпуклый контур объекта в двух точках

$C$  и  $C'$ . Третья ключевая точка  $C$  выбирается так, чтобы выполнялось условие  $|CM| \geq |MC'|$  (рис. 3).

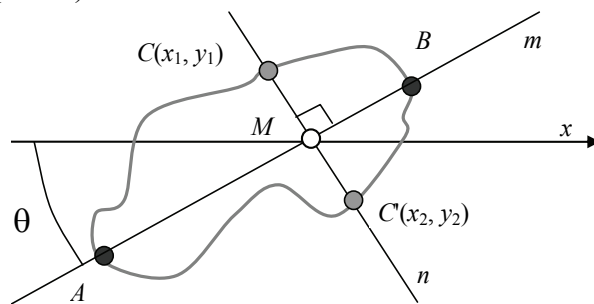


Рис. 3. Определение точек  $C$  и  $C'$

### Определение коэффициентов аффинных преобразований

После нахождения трех точек определяются коэффициенты аффинных превращений (рис. 4) [9–11]. Пусть заданы два контура  $D_1$  и  $D_2$ , на которых найдены соответствующие точки.

Параметры (коэффициенты) аффинных преобразований, которые описывают изменение формы, и размещение начального изображения получаются из системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  – точки, принадлежащие первому контуру  $D_1$  (начальному изображению);  $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ ,  $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ ,  $(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)$  – точки, принадлежащие второму контуру  $D_2$ ;  $a, b, c, d, e, f$  – коэффициенты аффинного преобразования, отображающего первый контур во второй.

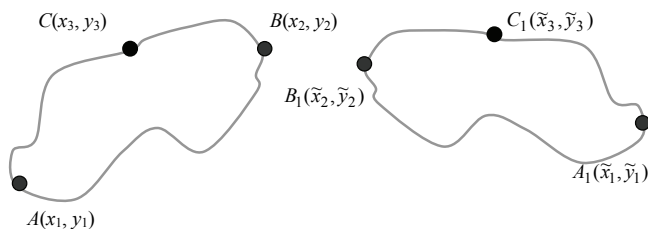


Рис. 4. Соответствующие точки на контурах двух объектов

Неизвестные коэффициенты определяются так:

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_1(\tilde{x}_3 - \tilde{x}_2) + y_2(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_3) + y_3(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1)}{y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)}, \\ b &= \frac{x_1(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3) + x_2(\tilde{x}_3 - \tilde{x}_1) + x_3(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)}{y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)}, \\ c &= \frac{y_1(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_2) + y_2(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_3) + y_3(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1)}{y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)}, \\ d &= \frac{x_1(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_3) + x_2(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_1) + x_3(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)}{y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)}, \\ e &= \frac{x_1(y_2\tilde{x}_3 - y_3\tilde{x}_2) + x_2(y_3\tilde{x}_1 - y_1\tilde{x}_3) + x_3(y_1\tilde{x}_2 - y_2\tilde{x}_1)}{y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)}, \\ f &= \frac{x_1(y_2\tilde{y}_3 - y_3\tilde{y}_2) + x_2(y_3\tilde{y}_1 - y_1\tilde{y}_3) + x_3(y_1\tilde{y}_2 - y_2\tilde{y}_1)}{y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)}. \end{aligned} \quad (2)$$

### Алгоритмы идентификации групп симметрии на полосе и плоскости

Пусть задано множество эталонных порождающих преобразований  $T^e = \{T_1^e, T_2^e, \dots, T_n^e\}$ .

Обозначим через  $T_{ij}$  порождающее преобразование от  $i$ -го к  $j$ -му элементарному изображению. Приведем рапорт группы  $p4$ , на котором представлены элементарные изображения и порождающие преобразования между ними (рис. 5).

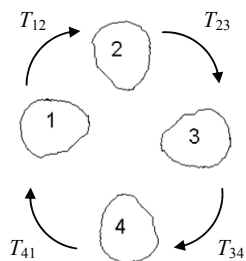


Рис. 5. Рапорт и порождающие преобразования для группы  $p4$

Определим расстояние между матрицами  $T_{ij}$  и  $T_k^e$  ( $T_k^e \in T^e$ ) по формуле:

$$d_k = \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m |t_{rs}^{(ij)} - t_{rs}^{(k)}|,$$

где  $t_{rs}^{(ij)}$ ,  $t_{rs}^{(k)}$  – элементы матриц  $T_{ij}$  и  $T_k^e$  соответственно,  $m \times m$  – размер матриц.

Найдем наименьшее расстояние  $d$  между матрицей  $T_{ij}$  и матрицами множества  $T^e$ :

$$d = \min_{1 \leq k \leq n} d_k, \quad (3)$$

где  $n$  – количество матриц эталонных порождающих преобразований. Матрицу  $T_k^e$  для которой  $d_k = d$ , обозначим  $T_{ij}^e$ .

Выделим в полосе четыре элементарных изображения, на плоскости – шесть.

Алгоритм для идентификации групп полосы следующий:

1. Идентифицируем четыре элементарных изображения.

2. Определим преобразование  $T_{12}$ , найдем  $T_{12}^e$  из условия (3).

3. Определим преобразование  $T_{23}$  и найдем  $T_{23}^e$ .

4. Если  $T_{12}^e = T_{23}^e$ , то идентифицируем группы из множества  $\{p1, pg, p1m, p2, pm\}$ .

5. Если  $T_{12}^e \neq T_{23}^e$ , то определим  $T_{34}$  и найдем  $T_{34}^e$ .

6. Если  $T_{12}^e = T_{34}^e$ , то идентифицируем группы из множества  $\{ptg, ptm\}$ .

$$\text{Если в матрице превращений } \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} \text{ не}$$

для всех превращений  $n = 0$ , то это – группа плоскости.

Алгоритм идентификации групп плоскости таков:

1. Идентифицируем шесть элементарных изображений.

2. Определяем преобразование  $T_{12}$ , находим  $T_{12}^e$  из условия (3).

3. Определяем преобразование  $T_{23}$  и находим  $T_{23}^e$ .

4. Если  $T_{12}^e = T_{23}^e$ , то идентифицируем группы из множества  $\{p1, p2, pt, ct\}$ .

5. Если  $T_{12}^e \neq T_{23}^e$ , то определяем  $T_{34}$  и находим  $T_{34}^e$ .

Таблица 3. Коэффициенты аффинных преобразований группы  $stm$

Группа симметрии	N эксп.	Коэффициенты аффинных преобразований				Погрешность определения коэффициентов аффинных преобразований		
		$a$	$b$	$c$	$d$	$\Delta_{ad}$	$\Delta_{bc}$	$\Delta$
$stm$	Эталон. коэф.	0	-1	-1	0	0	0	0
	1	0,0334	-1,0346	-0,9782	-0,0443	0,0778	0,0564	0,1342
	2	0,3622	-0,9453	-0,9144	-0,3607	0,641	0,092	0,7331
	3	0,6387	-0,7479	-0,7347	-0,6608	1,2656	0,4016	1,6672
	4	0,0151	-0,9983	-0,9733	-0,0297	0,2308	0,9554	1,1862
	Эталон. коэф.	0	1	1	0	0	0	0
	1	-0,0334	1,0346	0,9782	0,0443	0,0778	0,0564	0,1342
	2	-0,3214	0,9652	0,9428	0,3197	0,7229	0,1403	0,8632
	3	-0,6155	0,8121	0,7864	0,6501	1,2995	0,5174	1,8169
	4	0,0471	1,0218	0,9983	-0,0166	0,311	1,0322	1,3432

Таблица 4. Коэффициенты аффинных преобразований группы  $p4$

Группа симметрии	N эксп.	Коэффициенты аффинных преобразований				Погрешность определения коэффициентов аффинных преобразований		
		$a$	$b$	$c$	$d$	$\Delta_{ad}$	$\Delta_{bc}$	$\Delta$
$p4$	Эталон. коэф.	0	-1	1	0	0	0	0
	1	0,0347	-1,0259	0,9808	0,0385	0,0732	0,0452	0,1183
	2	0,0407	-1,0025	0,9709	0,0324	0,0731	0,0316	0,1047
	3	0,0373	-0,9876	0,9752	0,0584	0,0957	0,0373	0,1329
	4	0,8886	-0,4945	0,4506	0,8793	0,2321	0,9451	1,1772
	Эталон. коэф.	-1	0	0	-1	0	0	0
	1	-1,0155	-0,0125	0	-1	0,0155	0,0125	0,028
	2	-0,9244	0,3729	-0,3372	-0,9385	0,137	0,7101	0,8472
	3	-0,9834	0,0277	0	-1	0,0166	0,0277	0,0443
	4	-1,0177	0,0122	0	-1	0,0561	0,0165	0,0726

6. Если  $T_{12}^e = T_{34}^e$ , то идентифицируем группы из множества  $\{pg, pmm, pmg, pgg, stm, p4, p3\}$ .

7. Если  $T_{12}^e \neq T_{34}^e$ , то определяем  $T_{45}$  и находим  $T_{45}^e$ .

8. Если  $T_{12}^e = T_{45}^e$ , то идентифицируем группы из множества  $\{p4m, p4g, p31m, p3m1, p6\}$ .

9. Если  $T_{12}^e \neq T_{45}^e$ , то определяем  $T_{56}$  и находим  $T_{56}^e$ .

10. Если  $T_{12}^e = T_{56}^e$ , то идентифицируем группу  $pbm$ .

### Экспериментальные результаты

Для программной реализации алгоритмов анализа симметричных изображений использована интегрированная среда программирования *Visual C++ Express Edition 2005* и открытая библиотека функций компьютерного зрения *OpenCV* версии в 1.0 2006 г. На рис. 6 представлен пример изображения, построен-

ного на основе группы  $stm$ , а на рис. 7 – изображения на основе группы  $p4$ . Результаты анализа приведены в табл. 3 и 4 соответственно.

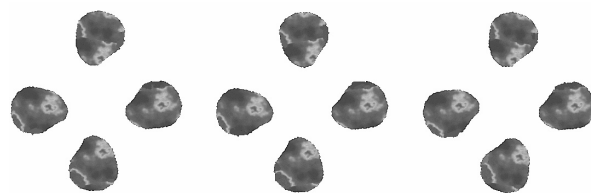


Рис. 6. Изображение, построенное на основе группы  $stm$

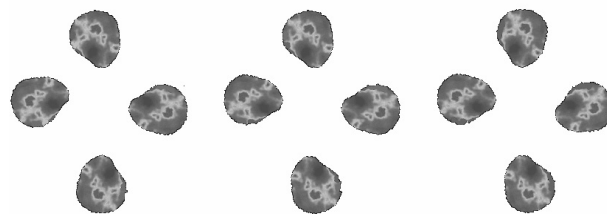


Рис. 7. Изображение, построенное на основе группы  $p4$

Погрешности порождающих преобразований найдем на основе эталонного  $Ims^e =$

$= T_L^e [T_n^e (T_{n-1}^e (T_{n-2}^e \dots T_1^e (Ime)))]$  и реального  $Im s^x = T_L [T_n (T_{n-1} (T_{n-2} \dots T_1 (Ime)))]$  матричных уравнений симметричного изображения. Погрешности от преобразований  $T_1, T_{n-2}, T_{n-1}, T_n$  равны:

$$\Delta_1 = T_L^e [T_n^e (T_{n-1}^e (T_{n-2}^e \dots T_1^e (Ime)))] - T_L [T_n (T_{n-1} (T_{n-2} \dots T_1 (Ime)))]$$

$$\Delta_{n-2} = T_L^e [T_n^e (T_{n-1}^e (T_{n-2}^e \dots T_1^e (Ime)))] - T_L [T_n (T_{n-1} (T_{n-2} \dots T_1 (Ime)))]$$

$$\Delta_n = T_L^e [T_n (T_{n-1} (T_{n-2} \dots T_1 (Ime)))] - T_L [T_n (T_{n-1} (T_{n-2} \dots T_1 (Ime)))]$$

Трансляции однотипны во всех группах симметрии и потому не учитываются при идентификации группы симметрии и, соответственно, не учитывается погрешность от трансляции.

Поскольку погрешности преобразований не коррелируемые, то суммарная погрешность от искажений преобразований равна

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots \Delta_n.$$

Тогда величина абсолютной погрешности  $\Delta$  для преобразований  $T_1, T_{n-2}, T_{n-1}, T_n$  с учетом погрешности коэффициентов  $a, b, c, d$  равна

$$\Delta = \sum_{i=1}^4 |t_i^* - t_i|, \quad (4)$$

где  $t_i$  – точное значение коэффициента матрицы эталонного преобразования  $T^e$ ;  $t_i^*$  – вычисленное значение коэффициента матрицы реального преобразования  $T$ .

Графики зависимости абсолютной погрешности искажения от величины искажения (угла поворота элементарного изображения) для групп  $stm$  и  $p4$  приведены на рис. 8 и 9 соответственно.

На графике приведено значение абсолютной погрешности  $\Delta_{ad}$  от коэффициентов  $a, d$ ; значение абсолютной погрешности  $\Delta_{bc}$  от коэффициентов  $b, c$ ; абсолютной погрешности  $\Delta$ .

Поворот элементарного изображения рапорта почти в равной степени влияет и на значение коэффициентов  $b, c$ , и на значение коэффициентов  $a, d$ .

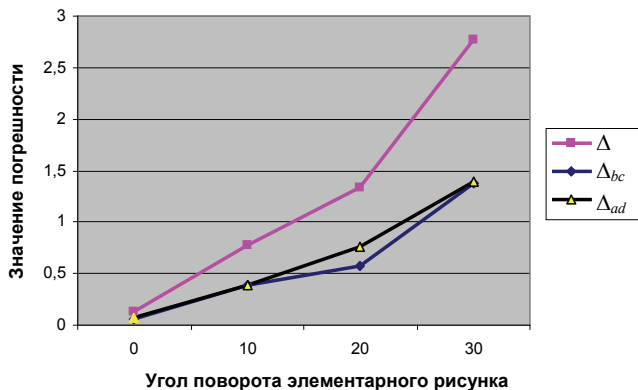


Рис. 8. Погрешность определения коэффициентов при действии помех (искажений) для группы  $stm$

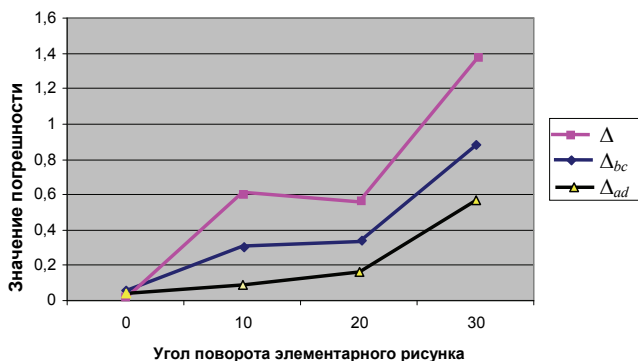


Рис. 9. Погрешность определения коэффициентов при действии помех (искажений) для группы  $p4$

**Вывод.** Классы симметричных изображений строятся на основе дискретных групп симметрии и владеют избыточностью в своей структуре. Поэтому предложенные методы и алгоритмы дают возможность определить порождающие преобразования таких изображений (группы симметрии), что позволяет существенно уменьшить объемы памяти для их хранения и синтеза.

Перспективным направлением последующих исследований является разработка методов и алгоритмов анализа асимметричных изображений и приведения их к известным симметричным структурам.

1. Шубников А.В., Котцук В.А. Симметрия в науке и искусстве. – М.: Ин-т комп. исслед., 2004. – 560 с.
2. Шлезингер М., Главач В. Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию. – К.: Наук. думка, 2004. – 545 с.
3. Liu Y., Collins R. A Computational Model for Repeated Pattern Perception Using Frieze and Wallpaper Groups // IEEE Comp. Society Conf. on Comp. Vision



- and Patt. Recognition, June 2000 – Acad. Press, 2000 – P. 537–544.
4. Грицик В.В., Березька К.М., Березький О.М. Моделирование та синтез складних зображень симетричної структури. – Львів: Держ. наук.-досл. ін-т інформ. інфраструктури, 2005. – 140 с.
  5. Файн В.С. Оpozнaвание изображений (основы непрерывной теории и ее приложения). – М.: Наука, 1970. – 299 с.
  6. Березький О.М. Теоретико-групповий підхід до синтезу складних зображень // УСиМ. – 2009. – № 6. – С. 19–24.
  7. Голод П.І. Симетрія та методи теорії груп у фізиці. – К.: Києво-Могилянська акад, 2005. – 215 с.
  8. Polya G. Uber die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene, 1924 – P. 278–282.

9. Березький О.М. Теоретико-групповий підхід до аналізу та синтезу складних зображень // Матеріали ІХ всеукр. міжнар. конф. «Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів», УКРОБРАЗ'2008, 3–7 лист. 2008 р., Київ, 2008. – С. 173–176.
10. Грицик В.В., Березький О.М. Методи і алгоритми аналізу та синтезу складних зображень на основі теоретико-группового підходу // Доп. НАН України. – 2009. – № 11. – С. 64–69.
11. Березький О.Н. Алгоритмы анализа и синтеза биомедицинских изображений // Пробл. информ. и управ. – 2007. – № 2. – С. 134–144.

Поступила 15.06.2010  
Тел. для справок 8(0352) 43-5910 (Тернополь)  
E-mail: ob@tneu.edu.ua  
© О.Н. Березький, 2010

Окончание статьи В.А. Богаенко

• Основной параметр, влияющий на работу процедуры оптимизации и получаемые оптимальные вычислительные схемы – отношение быстродействия процессоров к скорости обмена данными. При небольших его значениях, когда наименьшее время работы отдельных параллельных алгоритмов достигается на небольшом числе процессоров, а время, которое тратится на обмены, сопоставимо со временем, что приходится на вычисления, разбиение множества процессоров на подсистемы и дуближ расчетом на разных подсистемах, ускоряет решение задачи в целом. При увеличении значения этого параметра, эффективность применения таких преобразований падает. Зависит она также и от того, насколько количество доступных процессоров больше, чем количество, на котором достигается оптимум по времени работы для конкретных алгоритмов решения подзадач.

• Алгоритмы ограниченного поиска, давая близкие результаты в проведенных вычислительных экспериментах, были медленнее, чем метаэвристический алгоритм с ограниченным числом итераций. При увеличении размерности задачи время работы этих алгоритмов в сравнении с временем работы метаэвристического существенно увеличивается, что объясняется наличием в этих алгоритмах полного

перебора вариантов преобразования графов алгоритмов при применении правила 5.

Работа выполнена за счет бюджетных средств МОН Украины, предоставленных как грант Президента Украины.

1. Bacon D., Graham S., Sharp O. Compiler transformations for high-performance computing // ACM Computing Surveys (CSUR) Volume 26, Issue 4 (December 1994). – P: 345–420.
2. Гребенников Н.А., Постников В.М. Разработка метода и модели оценки времени выполнения запросов пользователей серверами современных СУБД // Информатика и системы управления. – 2002. – № 2(4). – С. 12–24.
3. Згуровський М.З., Романенко В.Д. Системы фильтрации и управления с разделяющимися разнотемповыми движениями. – К.: Наук. думка, 1998. – 375 с.
4. Корчак А.Б. Система интеграции гетерогенных моделей и ее применение к расчету слабосвязанных систем дифференциальных уравнений // Тезисы докладов XV Междун. конф. «Математика. Компьютер. Образование». – Дубна. – 2008. – С. 140.
5. Конников П.В., Кудинов В.А. Оптимизация методом муравьиной колонии как метаэвристика // Ученые записки. Электронный научный журнал Курского гос. ун-та. – 2008. – № 4. – С. 27–31.
6. Dorigo M. Optimization, Learning and Natural Algorithms. – Milano: Politecnico di Milano, 1992. – 140 p.

Поступила 11.06.2010  
Тел. для справок: (044) 526-4167 (Київ)  
E-mail: sevab@ukr.net  
© В.А. Богаенко, 2010