УДК 519.8

Ю.П. Лаптин, А.П. Лиховид

Использование выпуклых продолжений функций для решения нелинейных задач оптимизации

Рассмотрены алгоритмы решения нелинейных выпуклых задач оптимизации с ограничениями, основанные на эффективной процедуре выпуклого продолжения целевой функции с допустимой области на все пространство. Особенность этих алгоритмов– их устойчивость относительно некоторых преобразований задачи, ухудшающих ее масштабирование. Реализация предложенных алгоритмов обеспечивает подключение к программной среде языка *AMPL*, что позволяет сравнивать разработанные программные средства с существующими как коммерческими, так и не коммерческими. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

The algorithms are considered for solving nonlinear convex optimization problems with constraints, based on the efficient procedure of a convex prolongation of the objective function from the feasible set to the entire space. A distinctive feature of these algorithms is their stability with respect to certain transformations of the problem that can degrade its scaling. The implementation of the suggested algorithms provides for connection to the software environment of AMPL language, which allows to compare the developed software with the existing commercial and non commercial ones. The results of computational experiments are given.

Розглянуто алгоритми розв'язання нелінійних опуклих задач оптимізації з обмеженнями, засновані на ефективній процедурі опуклого продовження цільової функції з допустимої області на весь простір. Особливість цих алгоритмів – їх стійкість щодо деяких перетворень задачі, що погіршують її масштабування. Реалізація запропонованих алгоритмів забезпечує підключення до програмного середовища мови *AMPL*, що дозволяє порівнювати розроблені програмні засоби з існуючими як комерційними, так і не комерційними. Наведено результати обчислювальних експериментів.

Введение. Для решения нелинейных выпуклых задач оптимизации с ограничениями в [1] предложено использовать специальное выпуклое продолжение целевой функции с допустимой области на все пространство. Такой подход особенно полезен в случае, когда целевая функция определена на ограниченной области. Построение выпуклого продолжения основано на процедуре одномерного поиска, которая может быть реализована достаточно эффективно.

Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования: найти

$$f^* = \min\ f(x) \tag{1}$$

при ограничениях

$$h(x) \le 0, \tag{2}$$

где $x \in R^n$, $f, h : R^n \to R$ – выпуклые функции, принимающие конечные значения при любых x.

Обозначим $S = \left\{x \in R^n :\ h(x) \le 0\right\}$. Предположим, что S – замкнутое выпуклое множество, задана допустимая точка $x^0 \in S$, такая, что $h\left(x^0\right) < 0$. Для $x \ne x^0$ обозначим $\pi_S\left(x\right)$ точку пересечения луча, исходящего из x^0 и проходящего через точку x, с границей множества S. Одномерный поиск для определения $\pi_S\left(x\right)$ может быть реализован достаточно эффективно.

Пусть задано некоторое число $E, E < f\left(x^0\right)$, которое назовем параметром продолжения целевой функции. Положим

$$\chi^E\left(x\right) = E + \left(f\left(\pi_S\left(x\right)\right) - E\right)\frac{\left\| x - x^0 \right\|}{\left\| \pi_S\left(x\right) - x^0 \right\|}, \tag{3}$$

$$\psi^E\left(x\right) = \begin{cases} f\left(x\right), & \text{если } x \in S \\ \chi^E\left(x\right), & \text{если } x \notin S \end{cases}. \tag{4}$$

Заметим, что если $x^0 = 0$, то величина $r_S(x) = \dfrac{\| x \|}{\left\| \pi_S\left(x\right) \right\|}$ есть функция Минковского [3] для множества S. Очевидно, что $\psi^E\left(x\right)$ непрерывная функция. Рассмотрим задачу

$$\psi^{*E} = \inf\left\{\psi^E(x) : x \in R^n\right\}. \tag{5}$$

Ключевые слова: выпуклое программирование, методы оптимизации, штрафные функции, выпуклое продолжение функций, программные средства оптимизации.

Лемма 1. Пусть $E \le f^*$, тогда $\psi^{*E} = f^*$.

Доказательство очевидно, поскольку в этом случае $f\left(\pi_S\left(x\right)\right) - E \ge 0$ для всех $x \notin S$.

Пусть frS – граница множества S, $\bar{x} \in frS$, $p\left(\bar{x}\right) = \dfrac{\bar{x} - x^0}{\left\|\bar{x} - x^0\right\|}$. Обозначим $f'(x, p)$ – производная функции f в точке x по направлению p,

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f'(\bar{x}, p(\bar{x})) \cdot \left\|\bar{x} - x^0\right\|, \qquad (6)$$

$$E^* = \inf\left\{E(\bar{x}) : \bar{x} \in frS\right\}. \qquad (7)$$

Теорема 1. Пусть f – выпуклая функция, S – замкнутое выпуклое множество, $S \subset \operatorname{int}\operatorname{dom} f$. Тогда E^* – конечно и для всех $E < E^*$ функция $\psi^E(x)$ – выпуклая.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 в работе [1] и основано на том, что в условиях теоремы надграфик функции $\chi^E\left(x\right)$ – выпуклая коническая оболочка надграфика функции f на множестве S.

Обозначим $g_f(x)$, $g_h(x)$ – субградиенты функций f и h в точке x.

Теорема 2. Пусть $\bar{x} = \pi_S\left(x\right)$. Тогда вектор

$$g = g_f(\bar{x}) + \frac{E - f(\bar{x}) - (g_f(\bar{x}), x^0 - \bar{x})}{(g_h(\bar{x}), x^0 - \bar{x})} g_h(\bar{x}) \qquad (8)$$

есть субградиент функции $\chi^E\left(x\right)$ в точке x.

Доказательство. Рассмотрим линейные функции $f_L(y) = f(\bar{x}) + (g_f(\bar{x}), y - \bar{x})$, $h_L(y) = h(\bar{x}) + (g_h(\bar{x}), y - \bar{x}) = (g_h(\bar{x}), y - \bar{x})$. Положим $S_L = \left\{y \in R^n : h_L(y) \le 0\right\}$ и рассмотрим $\Phi_L = \left\{(\lambda, y) \in R \times S_L : \lambda \ge f_L(y)\right\}$ – надграфик функции f_L на множестве S_L и выпуклую коническую оболочку K_L надграфика Φ_L относительно точки $z^E = (E, x^0)$,

$$K_L = \left\{v = z^E + \alpha(z - z^E) \mid \alpha \ge 0, z \in \Phi_L\right\}. \qquad (9)$$

Множество $K_L(E)$ есть надграфик некоторой выпуклой функции, которую обозначим $\chi_L\left(y\right)$. По построению $\chi_L\left(\bar{x}\right) = f\left(\bar{x}\right)$, в области $\left\{y \notin S_L\right\}$ функция $\chi_L\left(y\right)$ – линейна, т.е. $\chi_L\left(\bar{x}\right) = f\left(\bar{x}\right) + \left(g, y - \bar{x}\right)$, где вектор g однозначно определяется по векторам $g_f(\bar{x})$, $g_h(\bar{x})$. Более того, $\chi_L(x^0 + \alpha(\bar{x} - x^0)) = \chi^E(x^0 + \alpha(\bar{x} - x^0))$. Поскольку надграфик функции $\chi^E(y)$ принадлежит надграфику функции $\chi_L(y)$, то функция $f(\bar{x}) + (g, y - \bar{x})$ – касательная для $\chi^E(y)$, а вектор g – субградиент функции $\chi^E(y)$ во всех точках $y = x^0 + \alpha(\bar{x} - x^0)$.

Нетрудно проверить, что для вектора g должны выполняться соотношения

$$f(\bar{x}) + (g, x^0 - \bar{x}) = E, \qquad (10)$$

$$(g, y - \bar{x}) = (g_f(\bar{x}), y - \bar{x}) \qquad (11)$$

для всех y таких, что

$$(g_h(\bar{x}), y - \bar{x}) = 0. \qquad (12)$$

Представим векторы g, g_f в виде $g = g^\perp + g^\parallel$, где $(g_h(\bar{x}), g^\perp) = 0$, $g^\parallel = \lambda g_h(\bar{x})$, $g_f = g_f^\perp + g_f^\parallel$, где $(g_h(\bar{x}), g_f^\perp) = 0$, $g_f^\parallel = \gamma g_h(\bar{x})$, $\gamma = \dfrac{(g_f(\bar{x}), g_h(\bar{x}))}{\left\|g_h(\bar{x})\right\|^2}$.

Очевидно, что из (11), (12) следует $g^\perp = g_f^\perp$, т.е. $g^\perp = g_f(\bar{x}) - \dfrac{(g_f(\bar{x}), g_h(\bar{x}))}{\left\|g_h(\bar{x})\right\|^2} g_h(\bar{x})$.

Подставляя полученные выражения в (10), получаем

$$\lambda = \frac{(g_f(\bar{x}), g_h(\bar{x}))}{\left\|g_h(\bar{x})\right\|^2} + \frac{E - f(\bar{x}) - (g_f(\bar{x}), x^0 - \bar{x})}{(g_h(\bar{x}), x^0 - \bar{x})}.$$

Откуда следует (8). Теорема доказана. ■

Замечание. Субградиент функции $\psi^E(x)$ инвариантен относительно умножения функции $h(x)$ на произвольную дифференцируемую функцию $r : R^n \to R$ такую, что $r(x) > 0$, $x \in R^n$.

Алгоритмы решения

Если величина E удовлетворяет условиям леммы 1 и теоремы 1, то для решения задачи (5) может применяться любой алгоритм минимизации выпуклых функций. Рассмотрим случай, когда значения f^* и E^* неизвестны.

Пусть задан некоторый сходящийся алгоритм A безусловной минимизации выпуклых функций, на каждой итерации которого вычисляются значение минимизируемой функции и ее субградиент.

Теорема 3. Пусть задано некоторое число $\delta > 0$, значение величины E, алгоритм A применяется для решения задачи (5), на итерации k алгоритма значение функции вычисляется в соответствии с (4), субградиент вычисляется в соответствии с (8) и выполняются условия

$$E < f(\bar{x}^k) - \delta, \tag{13}$$

$$E < f(\bar{x}^k) - f^{'}(\bar{x}^k, p(\bar{x}^k)) \cdot \left\| \bar{x}^k - x^0 \right\|, \tag{14}$$

где $\bar{x}^k = \pi_S(x^k)$, x^k – текущая точка на итерации k. Тогда последовательность точек, генерируемых алгоритмом A, сходится к решению задачи (1) – (2).

Доказательство. Обозначим g^k, $k = 0,1,...$ – субградиент в точке x^k, вычисляемый в соответствии с (8). Рассмотрим функцию $H(x) = \max_k \left\{ \psi^E(x^k) + (g^k, x - x^k) : k = 0,1,\dots \right\}$. Эта функция выпукла и есть нижняя аппроксимация функции $f(x)$ при $x \in S$. Обозначим $\tilde{x} = \arg\min \left\{ H(x) : x \in R^n \right\}$, $x^* = \arg\min \left\{ f(x) : x \in S \right\}$. Для простоты рассмотрим случай, когда x^* – единственная точка минимума задачи (1) – (2). Предположим, что утверждение теоремы некорректно, т.е. $\tilde{x} \neq x^*$. Рассмотрим возможные случаи – $\tilde{x} \in S$ и $\tilde{x} \notin S$.

- $\tilde{x} \in S$, тогда $H(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) > f(x^*) \geq H(x^*)$. Это противоречит предположению о том, что $\tilde{x} = \arg\min \left\{ H(x) : x \in R^n \right\}$.

- $\tilde{x} \notin S$, тогда $H(\tilde{x}) = \chi^E(\tilde{x}) = E + (f(\bar{x}) - E)\dfrac{\left\| \tilde{x} - x^0 \right\|}{\left\| \bar{x} - x^0 \right\|}$, где $\bar{x} = \pi_S(\tilde{x})$. В силу (13) выполняется $f(\bar{x}) - E > \delta$. Откуда $H(\tilde{x}) > f(\bar{x}) \geq H(\bar{x})$, что также противоречит предположению об экстремальности точки $\tilde{x}$.

Таким образом, $\tilde{x} = x^*$. Теорема доказана. ■

При неизвестных f^* и E^* необходимо уточнять значение E итеративно. Рассмотрим модификацию $\bar{A}$ исходного алгоритма. Обозначим E^k значение параметра продолжения целевой функции, используемое на итерации k, x^k – текущая точка итерации k. Пусть заданы начальное значение E^0 и параметры $q > 1$, $\delta > 0$, $B > 0$. Каждая итерация k алгоритма $\bar{A}$ состоит из итерации алгоритма A, примененного к функции ψ^E, и дополнительных действий:

1. Если $x^k \in S$, полагается $E^{k+1} = E^k$ и осуществляется переход к следующей итерации алгоритма $\bar{A}$.

2. Вычисляются в текущей точке x^k кроме значения функции ψ^E также величины $E_1 = f(\bar{x}^k) - \delta$ и $E_2 = f(\bar{x}^k) - f^{'}(\bar{x}^k, p(\bar{x}^k)) \cdot \left\| \bar{x} - x^0 \right\|$, $\bar{E} = \min\{E_1, \ E_2\}$, где $\bar{x}^k = \pi_S(x^k)$.

3. Если $E^k < \bar{E}$, полагается $E^{k+1} = E^k$ и осуществляется переход к следующей итерации алгоритма $\bar{A}$.

4. Полагается $E^{k+1} = E^k - q \max\left\{ E^k - \bar{E}, \ B \right\}$, алгоритм A запускается из текущей точки x^k для уточненной функции ψ^E (с новым значением $E^0 = E^{k+1}$).

Алгоритм $\bar{A}$ завершает работу, когда срабатывают критерии остановки алгоритма A.

Нетрудно видеть, что п. 4 алгоритма $\bar{A}$ выполняется конечное число раз, после чего условия (13), (14) выполняются на всех итерациях, т.е. в силу теоремы 5 алгоритм сходится к оптимальному решению. Количество срабатываний п. 4 алгоритма $\bar{A}$ зависит от величины параметров q, B.

В рассмотренном алгоритме базовая точка x^0, относительно которой строится продолжение функции f, считалась зафиксированной. Первоначальное значение этой точки может оказаться неудачным, что приведет к необходимости выбора больших (по абсолютной величине) значений величины E.

Рассмотрим задачу уточнения базовой точки после некоторого числа итераций алгоритма. Пусть на предыдущих итерациях сгенерированы точки $x^k, \bar{x}^k = \pi_S(x^0, x^k), k = 1,..., K$. Обозначим y уточненную базовую точку. Примем, что y принадлежит выпуклой оболочке точек $\bar{x}^k, k = 1,..., K$.

Очевидно, что для величины E должны выполняться следующие неравенства

$$E \le f(\bar{x}^k) - (g_f(\bar{x}^k), \bar{x}^k - y), \; k = 1,..., K, \quad (15)$$

$$f(\bar{x}^k) - E \ge 0, \; k = 1,..., K. \quad (16)$$

Естественно стремиться к тому, чтобы разница $f^* - E$ по ходу работы алгоритма не принимала больших значений. Учитывая, что $y = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \bar{x}^k$, $\lambda_k \ge 0$, $\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1$, получаем, что для выбора базовой точки y нужно решать задачу линейного программирования: найти

$$\max_{\lambda, E} E \quad (17)$$

при ограничениях (15), (16) и дополнительных ограничениях

$$y = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \bar{x}^k, \quad (18)$$

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1, \quad (19)$$

$$\lambda_k \ge 0, \; k = 1,..., K. \quad (20)$$

Уточнение базовой точки может проводиться периодически для заданного интервала итераций алгоритма или при нарушении дополнительных заданных условий.

В программной реализации предлагаемого подхода базовая точка x^0 считается заданной и не изменяется в ходе вычислений. В качестве алгоритма безусловной минимизации использовался r-алгоритм [3, 4], для определения точки $\bar{x}$ (пересечения отрезка $[x^0, x]$ с границей множества S) использовался дихотомический поиск. Точность определения точки $\bar{x}$ фиксирована и представляет собой параметр алгоритма. Разработанные программные средства обеспечивают интерфейс со стандартной программной средой *AMPL* [5]. Это позволяет в ходе вычислительного эксперимента провести сравнение с самыми разными современными солверами.

Результаты вычислительных экспериментов

Цель вычислительного эксперимента:

– сравнение метода негладких штрафов, использующего r-алгоритм, и предлагаемого подхода на задачах, функции которых определены на всем пространстве R^n;

– сравнение методов негладкой оптимизации и различных современных солверов на плохо обусловленных задачах, в которых допустимые множества выпуклые, но описываются невыпуклыми функциями;

– сравнение предлагаемого подхода и различных современных солверов на задачах, функции которых определены на ограниченных множествах.

Вычислительный эксперимент проводился на тестовых задачах, сформированных на основе базовых задач вида: найти

$$f^* = \min f^0(x) \quad (21)$$

при ограничениях

$$f_k(x) \le 0, \; k = 1,..., m, \quad (22)$$

где $x = (x_1, x_2,..., x_n)$, $m \le n$.

Тестовые задачи формировались путем замены ограничений вида (22) на

$$\varphi_k^0(x)\varphi_k^1(x) f_k(x) \le 0, \; k = 1,..., m, \quad (23)$$

где $\varphi_k^0(x) > 0, \varphi_k^1(x) > 0, \; k = 1,..., m$ (допустимое множество задачи при этом не изменяется),

$$\varphi_k^0(x) = \begin{cases} \left(\mu + \|x - x^*\|^2\right)^\gamma, k = 1,..., m_1 \\ 1, \; k = m_1 + 1,..., m \end{cases},$$

$$\varphi_k^1(x) = \alpha + \sin\left(\beta \big/ \left(\mu + (x_k - x_k^*)^2\right)\right), k = 1,..., m,$$

$\alpha > 1$, $\mu > 0$. Здесь $m_1 = [m/2]$, x^* – оптимальное решение базовой задачи, x_k, x_k^* – k-е компоненты векторов x, x^*.

Целевая функция заменялась на следующую:

$$\tilde{f}_0(x)=\begin{cases} f_0(x), \text{ если } f_k(x)\le \varepsilon: \\ \quad k=1,\dots,m, \\ \sqrt{-\max\{f_k(x): k=1,\dots,m\}}, \\ \qquad \text{в противном случае,}\end{cases} \quad (24)$$

где $\varepsilon \ge 0$. В допустимой области : $f_0(x)$ и $\tilde{f}_0(x)$ совпадают, вне допустимой области при $\varepsilon = 0$ функция $\tilde{f}_0(x)$ не определена.

Заметим, что при $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\varepsilon = \infty$ тестовая задача совпадает с базовой задачей (21), (22), при $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma \ne 0$, $\varepsilon = \infty$ тестовая задача имеет вырожденное масштабирование в окрестности оптимального решения, при $\alpha > 1$, $\beta \ne 0$, малой величине μ штрафная функция тестовой задачи становится многоэкстремальной.

Базовая задача 1. Найти

$$f^* = \min\ (c,x) \quad (25)$$

при ограничениях

$$x_i - \frac{\chi}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \le 0,\ i=1,\dots,n, \quad (26)$$

где $\chi > 1$, $c_i = \frac{i}{10} > 0,\ i = 1,\dots,n$.

Допустимое множество есть конус, содержащий вектор $(1,\dots,1)$. При $\chi = 1$ конус вырождается в луч, порожденный вектором $(1,\dots,1)$. Базовая точка $x^0 = (1,\dots,1)$.

Решение – $x^* = 0,\ f^* = 0$.

Базовая задача 2. Найти

$$f^* = \min\left\{ f^0(x):\ x\in R^n \right\} \quad (27)$$

где $f^0(x) = \max\left\{ f_k(x): k=1,\dots,n \right\}$, $f_k(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^k)^2$, $x^k = (x_1^k,\dots,x_n^k)$ – заданные точки, $k = 1,\dots,n$. Здесь $x_i^k = 0$, если $i \ne k$, $x_i^k = 1$, если $i = k$, $k = 1,\dots,n,\ i = 1,\dots,n$.

Эквивалентная постановка

$$\min Y \quad (28)$$

при ограничениях

$$f_k(x) - Y \le 0,\ k = 1,\dots,n. \quad (29)$$

Базовая точка $x^0 = (1, 0,\dots, 0)$, $y^0 = 2$. Решение – $x^* = \left(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right)$, $f^* = y^* = \frac{n-1}{n}$.

Базовая задача 3. Найти

$$f^* = \min_x \left\{ \begin{matrix} \lambda\cdot(p,x) - \\ -\sqrt{\delta^2\cdot(p,x)^2 - \left\| x-(x,p)\cdot p\right\|^2} \end{matrix} \right\} \quad (30)$$

при ограничениях

$$\delta^2\cdot(p,x)^2 \ge \left\| x-(x,p)\cdot p\right\|^2 + \sigma^2,\ x\in R^n, \quad (31)$$

$$(p,x) \ge 0,\ x\in R^n, \quad (32)$$

где p – заданный вектор, $\|p\| = 1$, $p_i = 1/\sqrt{n}$, $i = 1,\dots,n$, $\lambda > \delta > 0$, $\sigma > 0$ – заданные числа. Норма градиента целевой функции на границе допустимого множества при $\sigma = 0$ равна $+\infty$.

Базовая точка x^0 выбиралась с некоторым смещением от луча, порожденного вектором p.

Если x^* – оптимальное решение, то $x^* = pt^*$, где $t^* \in R$. Откуда $(p,x) = t^*$, $\delta\cdot t^* = \sigma$. Решение – $x^* = p\cdot\frac{\sigma}{\delta}$, $f^* = \lambda\cdot\frac{\sigma}{\delta} - \sigma = \sigma\left(\frac{\lambda}{\delta} - 1\right)$.

Все тестовые задачи реализованы в языке *AMPL* и при сравнении с существующими солверами решены на сервере *NEOS* (*http://www-neos.mcs.anl.gov/*). Число переменных во всех задачах (размерность вектора x) равно 50. В качестве начальной точки для всех солверов использована базовая точка x^0. Для метода выпуклых продолжений и метода негладких штрафных функций использованы одинаковые параметры r-алгоритма [3, 4]. Для всех солверов использованы стандартные настройки. Результаты вычислительных экспериментов приведены далее. Если солвер не смог решить текущую задачу или полученное решение нарушает ограничения задачи, то вместо значения целевой функции ставится символ *F* (*fail*).

В табл. 1–4 приведены результаты вычислительных экспериментов по базовой задаче 1.

В табл. 1 сравниваются методы выпуклых продолжений и негладких штрафных функций. Для $\chi = 1{,}10$ и $\chi = 1{,}05$ штрафная функция не ограничена снизу. Это связано с необходимостью подбирать штрафной коэффициент индивидуально для каждой задачи. Метод выпуклых продолжений обеспечивает несколько более высокую точность по целевой функции и меньшее число вызовов функции в r-алгоритме, чем метод негладких штрафных функций. Каждый вызов при этом – существенно более трудоемкая процедура, поскольку решается задача одномерного поиска.

Таблица 1. Сравнение метода выпуклых продолжений и метода негладких штрафных функций в задаче 1, $\alpha = 1{,}1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\varepsilon = 1e16$, $\mu = 0{,}001$. Штрафной коэффициент – 1000

χ	Метод	Рекордное значение целевой функции	Число вызовов функции
1,50	Выпуклое продолжение	0,0006658	875
	Негладкие штрафы	0,0010041	1259
1,45	Выпуклое продолжение	0,0004572	922
	Негладкие штрафы	0,0010863	1188
1,40	Выпуклое продолжение	0,0015920	990
	Негладкие штрафы	0,0026862	959
1,35	Выпуклое продолжение	0,0015888	827
	Негладкие штрафы	0,0023529	1037
1,30	Выпуклое продолжение	0,0009020	994
	Негладкие штрафы	0,0023775	1036
1,25	Выпуклое продолжение	0,0011574	1098
	Негладкие штрафы	0,0066865	1018
1,20	Выпуклое продолжение	0,0011774	1096
	Негладкие штрафы	0,0011554	1045
1,15	Выпуклое продолжение	0,0068407	882
	Негладкие штрафы	0,0027255	1044
1,10	Выпуклое продолжение	0,0080652	992
	Негладкие штрафы	*F*	668
1,05	Выпуклое продолжение	0,0026539	1162
	Негладкие штрафы	*F*	461

В табл. 2 сравниваются различные солверы в задаче, имеющей вырожденность масштабирования в оптимальной точке. При отрицательных γ все программные средства, кроме метода выпуклых продолжений, находят некорректные решения. При положительных γ различия в решениях, найденных различными солверами, не столь существенны.

В табл. 3 приведены результаты сравнения различных солверов в задаче, где к вырожденности масштабирования в оптимальной точке добавлена ограниченность области определения целевой функции.

Таблица 2. Сравнение различных солверов (рекордное значение целевой функции) в задаче 1, $\alpha = 1{,}1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 1e16$, $\mu = 1e{-}16$, $\chi = 1{,}1$, штрафной коэффициент – 1000 (вырожденность масштабирования в точке x^*)

γ	*SNOPT*	*MINOS*	*LOQO*	Выпуклое продолжение	Негладкие штрафы
–3	*F*	*F*	*F*	0,8031	*F*
–2,5	*F*	*F*	*F*	0,4629	*F*
–2	*F*	*F*	*F*	0,2354	*F*
–1,5	*F*	*F*	*F*	0,0856	*F*
–1	*F*	*F*	*F*	0,01468	*F*
–0,5	*F*	*F*	*F*	0,0078	0,0199
0	0	0	0	0,0080	*F*
0,5	0,0104	0,00006	*F*	0,0017	*F*
1	0,2359	0,0258	*F*	0,0206	*F*
1,5	0,8902	0,1621	*F*	0,0899	*F*
2	1,6615	0,6147	*F*	0,2741	*F*
2,5	*F*	11,1109	*F*	0,5577	*F*
3	3,1324	*F*	*F*	0,9132	*F*

Таблица 3. Сравнение различных солверов (рекордное значение целевой функции) в задаче 1, $\alpha = 1{,}1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0{,}00001$, $\mu = 1e{-}16$, $\chi = 1{,}1$ (вырожденность масштабирования в точке x^*, ограниченность области определения целевой функции)

γ	*SNOPT*	*MINOS*	*LOQO*	Выпуклое продолжение
0,0	0,0000	0,0000	*F*	0,0080
0,5	0,0104	0,00006	*F*	0,0017
1,0	0,2359	*F*	*F*	0,0206
1,5	1,0088	*F*	*F*	0,0899
2,0	1,6615	*F*	*F*	0,2741
2,5	1,2714	*F*	2,7193	0,5577
3,0	*F*	*F*	4,646	0,9132

Результаты сравнения солверов в задачах, содержащих осциллирующий множитель в функции ограничений (табл. 4) также показывают преимущества метода выпуклых продолжений.

Таблица 4. Сравнение солверов (рекордное значение целевой функции) в задаче 1, $\alpha = 1{,}1$, $\gamma = 0$, $\varepsilon = 1e16$, $\mu = 1e{-}16$, $\chi = 1{,}15$ (осциллирующий множитель в функции ограничений)

β	*SNOPT*	*MINOS*	*LOQO*	Выпуклое продолжение	Негладкие штрафы
0	0	0	0	0,0068	0,0027
1	*F*	*F*	*F*	0,0816	*F*
2	*F*	*F*	*F*	0,1210	*F*
3	*F*	*F*	*F*	0,1326	*F*
4	*F*	*F*	*F*	0,1714	*F*
5	36,74	*F*	*F*	0,1497	*F*

Результаты экспериментов по базовой задаче 2 аналогичны результатам по задаче 1 и поэтому не приводятся.

Базовая задача 3 подбиралась как задача трудная для метода выпуклых продолжений. Результаты приведены в табл. 5. Метод выпуклых продолжений оказался более устойчивым для плохо обусловленных задач.

Таблица 5. Значения целевой функции, полученные различными солверами в зависимости от значений δ и σ ($\lambda = 0{,}02$)

σ	Оптимальное значение	*SNOPT*	*LOQO*	Выпуклое продолжение
$\delta = 0{,}00003$				
0, 0010	0,66567	0,9847087	94,3125	0,66567
0,0008	0,53253	0,533591	73,7437	0,53253
0,0006	0,39940	0,407735	56,6526	0,39940
0,0004	0,26627	0,279845	37,3732	0,26627
$\delta = 0{,}00002$				
0,0010	0,99900	1,01032	141,701	0,99900
0,0008	0,79920	0,80177	112,036	0,79920
0,0006	0,59940	0,69740	84,389	0,59940
0,0004	0,39960	0,40417	54,478	0,39960
0,0002	0,19980	0,26016	27,622	0,19980

Заключение. Использования выпуклых продолжений функций позволяет строить эффективные алгоритмы для решения нелинейных выпуклых задач оптимизации с ограничениями. Сравнительный вычислительный анализ показал существенную устойчивость разработанного подхода к плохой обусловленности задач. Использованные тестовые задачи и предварительная версия программных средств размещены для свободного доступа на сайте *http://elis.dvo.ru/sites/default/files/OptimiZone/software/ndo-icyb/index.html*. Замечания просим направлять по адресам – *laptin_yu_p@mail.ru*, *o.lykhovyd@gmail.com*.

1. *Лаптин Ю.П.* Один подход к решению нелинейных задач оптимизации с ограничениями // Кибернетика и системный анализ. –2009. – № 3. – С. 182–187.
2. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
3. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1979. – 199 с.
4. *Шор Н.З.*, *Журбенко Н.Г.* Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // Кибернетика. – 1971. – № 3. – С. 51–59.
5. *Fourer R.*, *Gay D.M.*, *Kernighan B.W.* AMPL – a Modeling Language for Mathematical Programming. – Brooks/Cole – Thomson Learning, 2003 – 517 p.

Поступила 29.07.2010

Тел. для справок: (044) 526-2168, 451-6022 (Киев)

E-mail: *laptin_yu_p@mail.ru*, *o.lykhovyd@gmail.com*

●