

Т.Л. Мазурок

## Модель прогнозирования параметров управления индивидуализированным обучением

Описаны модели прогнозирования параметров вектора интеллекта и вектора конфигураций учебных элементов. Разработан алгоритм вычисления доверительной вероятности прогноза, схема взаимодействия процедур прогноза с синергетической системой управления индивидуализированным обучением. Рассмотрены особенности практической реализации модели в системе *MATLAB*.

The models of prediction of the parameters of the vector of intelligence and the vector of configurations of the learning elements are described. The algorithm of calculating the confidence level of the prediction, the scheme of interaction of the prediction procedures with a synergic control system of individualized learning is developed. The peculiarities of the practical implementation of the model in the *MATLAB* system are considered.

Наведено опис моделей прогнозування параметрів вектора інтелекту та вектора конфігурацій навчальних елементів. Розроблено алгоритм обчислення довірчої ймовірності прогнозу, схему взаємодії процедур прогнозу з синергетичною системою управління індивідуалізованим навчанням. Розглянуто особливості практичної реалізації моделі у системі *MATLAB*.

**Введение.** Одним из приоритетных направлений реформирования образования в Украине есть повышение его качества [1]. Работа в этой области неразрывно связана с повышением эффективности центрального звена системы образования – процесса обучения. Существенное повышение эффективности в этой сфере возможно на основе совершенствования средств автоматизации управления обучением как целенаправленным процессом. Поэтому разработка и совершенствование моделей управления обучением, и на их основе – всей методологии систем управления в целом – задача **актуальная**.

Задача формирования гибких индивидуализированных учебных планов, реализация на их основе систем автоматизированного управления целостным процессом обучения невозможна без адекватного механизма осуществления обратной связи. Традиционно в обучении рассматривается в качестве обратной связи только контроль, а прогнозирование, как плохо формализуемый процесс, не учитывается. Однако прогнозирование достижения заданных значений параметрами управления – один из главных источников формирования обоснованных управляющих воздействий. Информация об отклонениях от целевых значений есть исходной для принятия решений о текущем управляющем воздействии со стороны обучающей системы или преподавателя.

Устранение противоречия между потребностью в реализации полноценной системы об-

ратной связи, включающей в себя обязательным компонентом процесс прогнозирования, и отсутствием моделей и методов их построения для индивидуализированного обучения представляет собой **нерешенную проблему** и определяет **актуальность** данного исследования.

### Анализ последних исследований и публикаций

Различные аспекты совершенствования моделей управления обучением рассмотрены в работах Атанова Г.А., Беспалько В.П., Брусиловского П.Л., Валаха В.Я., Глушкова В.М., Гриценко В.И., Довгялло А.М., Краснополюсовского А.С., Згуровского М.З., Козлаковой Г.А., Колос В.В., Кудрявцевой С.П., Манак А.Ф., Маклакова Г.Ю., Синицы Е.М., Тодорцева Ю.К., Ходакова В.Е., Шароновой Н.В. и их многочисленных учеников.

Однако устойчивая тенденция усложнения системы дидактических требований к управлению обучением, которые выражаются в необходимости автоматизированного формирования, поддержки и оптимизации индивидуальных траекторий обучения на протяжении всей жизни [2] в условиях динамически изменяющихся целей в виде системы формирования компетенций, определяют необходимость объединения методов современной теории управления, интеллектуальных и информационных технологий.

Одним из перспективных подходов при разработке систем управления сложными нелинейными динамическими объектами представ-

ляется синергетический, основная суть которого – максимальный учет при выработке управляющего воздействия естественных свойств и внутреннего развития объекта управления [3]. В рамках реализации синергетической модели управления обучением [4], нерешенной остается проблема построения модели прогнозирования параметров, характеризующих вектор состояния модели обучаемого.

**Постановка задачи** заключается в построении модели прогнозирования параметров, образующих вектор состояния для реализации обратной связи в рамках синергетического подхода к управлению обучением.

#### Задача рассматриваемого исследования

Для создания системы автоматизированного управления индивидуализированным обучением необходимо проанализировать особенности прогнозирования в рамках синергетической модели, построить модель прогнозирования параметров, характеризующих вектор интеллекта основных объектов управления, модель прогноза векторов конфигураций учебных элементов, алгоритм вычисления доверительной вероятности прогноза, разработать схему взаимодействия с системой управления обучением.

#### Анализ особенностей прогнозирования в синергетической схеме управления обучением

Процесс обучения представляет собой сложный социотехнический объект, состоящий из большого количества разрозненных подсистем и в общем случае не имеющий адекватного формального описания. Поэтому рассмотрим процесс обучения с позиции теории самоорганизации сложных упорядоченных систем, используя так называемый синергетический подход. Один из постулатов этого подхода состоит в том, что проблема управляемого развития принимает форму самоуправяемого развития. Рассмотрим синергетическую модель управления обучением.

Математическая модель управления обучением [4] устанавливает связь между двумя параметрами управления – количеством информации  $S$  [5] и долей времени, отведенного на

усвоение знаний  $U$  [6]. Данная модель получена на основе допущения об эквивалентности коэффициентов забывания и умозаключения [5] соответствующим коэффициентам индивидуальных особенностей обучаемого [6]. Эта двухклассовая модель «знаний и умений» составляет основу синергетической модели управления обучением с вектором состояния  $(x, y)$  и вектором обучения  $(h, U)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= fUy, \\ \frac{dy}{dt} &= c(1-U)xy, \\ \frac{d}{dt}(Ux + (1-U)y) &= \frac{h(t)}{1+r} + \frac{c-f}{1+r}(Ux + (1-U)y), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x$  – нормированный объем накопленных знаний ( $0 < x < 1$ ),  $y$  – нормированный объем накопленных умений ( $0 < y < 1$ ),  $f$  – коэффициент забывания,  $U$  – доля времени, отведенная на накопление знаний,  $h(t)$  – скорость выдачи информации,  $t$  – параметр времени,  $r$  – коэффициент сопротивления дидактическому процессу,  $c$  – коэффициент умозаключения,  $S$  – нормированное количество информации ( $0 < S < 1$ ).

Решение третьего уравнения системы (1) позволяет получить инвариантное многообразие в фазовом пространстве синергетического метода управления сложными системами [3], в котором связаны координаты состояния и управления, т.е.

$$(1+r)e^{\alpha t}(Ux + (1-U)y) = \beta + \int e^{-\alpha t} h(t) dt, \quad (2)$$

где  $\alpha = \frac{c-f}{1+r}$ ,  $\beta$  – произвольные постоянные.

Интерес представляет частный случай, при котором скорость выдачи информации постоянна ( $h(t) = h_0$ ), а уравнение (2) после интегрирования принимает вид

$$Ux + (1-U)y = \frac{e^{-\alpha t}}{1+r} \left( \beta - \frac{h_0}{\alpha} e^{-\alpha t} \right), \quad (3)$$

откуда следует

$$y = \frac{1}{1-U} \left( -Ux + \frac{e^{-\alpha t}}{1+r} \left( \beta - \frac{h_0}{\alpha} e^{-\alpha t} \right) \right). \quad (4)$$

Тогда подстановка (4) в первое уравнение системы (1) приводит задачу управления к ана-

литическому конструированию скалярного регулятора [7].

В общем случае объект управления может подвергаться следующим воздействиям: случайным внешним возмущениям, целенаправленным управляющим воздействиям (обучающим и контролирующим), формируемым модулем управления, самоорганизации информации [8]. В случае управления на основе синергетической модели выработка управляющего воздействия осуществляется на основе треугольника управления (рис. 1), где  $\gamma$  – коэффициент гипотезы забывания, т.е. параметр, характеризующий вероятность сохранения изученного материала [9],  $\lambda$  – параметр, определяемый на основе календарного плана учебных занятий, зависящий от скорости подачи учебного материала.



Рис. 1. Треугольник управления обучением

### Модель прогноза вектора интеллекта

Схема на рис. 1 показывает, что оптимизация управления обучением достигается при условии учета параметров вектора интеллекта. Поэтому для своевременного формирования управляющих воздействий необходимо располагать моделью прогнозирования значений его параметров. Параметры, характеризующие память и мышление, ввиду их стохастической природы для конкретного обучаемого или группы обучаемых, могут рассматриваться как случайные величины. Следовательно, модель прогноза вектора интеллекта построим на основе исследования плотности распределения вероятностей двумерной случайной величины [10]. В таблице обобщены аналогии основных параметров, характеризующих интеллектуальные способности различного характера.

Известно, что смысловые значения каждой пары координат взаимосвязаны. Для решения

задачи прогнозирования в рамках цикла управления обучением необходимо количественно выразить эту взаимосвязь с помощью коэффициента корреляции, так как в общем случае в задаче прогнозирования  $\alpha$  и  $\beta$  – случайные величины.

Смысловые интерпретации вектора интеллекта

Система координат	Координаты	
	$\alpha$	$\beta$
Технологическая	Память	Мышление
Сигнальная	Первая сигнальная система	Вторая сигнальная система
Информационная	Память	Быстродействие
Сенсорная	Вербальная	Пространственная
Диалектическая	Содержание	Форма

Тогда матрица ковариаций  $K$  определяется следующим образом:

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 & k_{\alpha\beta} \\ k_{\alpha\beta} & \sigma_\beta^2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $\sigma_\alpha^2$  – дисперсия разброса случайных значений параметра памяти  $\alpha$ ;  $\sigma_\beta^2$  – дисперсия разброса случайных значений параметра  $\beta$ ;  $k_{\alpha\beta}$  – ковариация между  $\alpha$  и  $\beta$ .

Значения дисперсии определяются как математическое ожидание квадрата отклонения от математического ожидания параметров интеллекта:

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \alpha_0)^2, \quad (6)$$

$$\sigma_\beta^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\beta_i - \beta_0)^2,$$

где математические ожидания случайных величин  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  определяются как среднее их случайных значений:

$$\alpha_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i, \quad (7)$$

$$\beta_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \beta_i,$$

где  $N$  – количество испытаний, определяемое по закону Стьюдента [10].

В связи с необходимостью учета различных форм обучения (индивидуальной и групповой) вектор интеллекта соответственно может быть

индивидуальным и групповым. Исчерпывающей характеристикой непрерывной двумерной случайной величины будет плотность вероятности. Основываясь на предположении нормального закона распределения случайной величины двумерного вектора интеллекта, можно записать выражение для нахождения его совместной плотности вероятности:

$$\varphi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|K|}} \exp\left[-\frac{(Z-Z_0)'K^{-1}(Z-Z_0)}{2}\right], \quad (8)$$

где  $Z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  – вектор интеллекта,  $Z_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$  – центр рассеивания.

После подстановки значений элементов матрицы в уравнение (8) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, \beta) = & \frac{1}{2\pi\sigma_\alpha\sigma_\beta\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ & \times \exp\left(\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\sigma_\alpha}\right)^2 - \right. \\ & \left. -2\rho\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\sigma_\alpha}\right)\left(\frac{\beta-\beta_0}{\sigma_\beta}\right) + \left(\frac{\beta-\beta_0}{\sigma_\beta}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\sigma_\alpha}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\sigma_\alpha}\right) \times \\ & \times \left(\frac{\beta-\beta_0}{\sigma_\beta}\right) + \left(\frac{\beta-\beta_0}{\sigma_\beta}\right)^2 = K^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\varphi_{\alpha,\beta}$  – плотность распределения вектора интеллекта,  $\rho$  – коэффициент корреляции, определяемый так:  $\rho = \frac{k_{\alpha,\beta}}{\sigma_\alpha\sigma_\beta}$ .

Геометрически плотность распределения вероятностей  $\varphi_{\alpha,\beta}$  представляет собой поверхность распределения (рис. 2).

Линии равного уровня двумерной плотности вероятности, определяемые уравнением  $\varphi(\alpha, \beta) = c$ , где  $c$  – некоторая константа, представляют собой эллипсы в плоскости  $\alpha\beta$ , называемые эллипсами рассеивания.

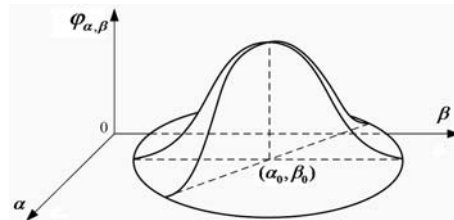


Рис. 2. Поверхность плотности распределения вероятностей

Для характеристики регрессии площадей сечения поверхности эллипсами рассеивания введем коэффициент подобия  $k$  (рис. 3):

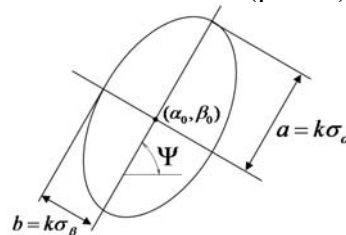


Рис. 3. Эллипс рассеивания корреляции между параметрами вектора интеллекта

На основе геометрических соображений (рис. 3) можно определить следующие соотношения:  $b = k\sigma_\beta$ ;  $a = k\sigma_\alpha$ , где  $a, b$  – большая и малая полуоси эллипса соответственно.

Угол  $\psi$ , образованный между осями симметрии эллипса и осями координат отражает корреляционную зависимость между параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ . Можно также записать выражения для определения угла (см. рис. 3):

$$\operatorname{tg}\psi = \rho \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}; \quad \psi = \operatorname{arctg}\left(\rho \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}\right).$$

Вероятность  $p(\alpha, \beta)$  попадания случайной точки с координатами  $(\alpha, \beta)$  в область  $D$  определим путем двойного интегрирования от плотности:

$$p(\alpha, \beta \in D) = \iint_{\alpha, \beta \in D} \varphi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, \quad (11)$$

где  $D$  – внутренняя область эллипса рассеивания.

Выполним замену переменных для перехода к полярной системе координат:

$$\alpha = \alpha_0 + \sigma_\alpha r \cos \psi; \quad \beta = \beta_0 + \sigma_\beta r \sin \psi. \quad (12)$$

Отсюда получим

$$\frac{\alpha - \alpha_0}{\sigma_\alpha} = r \cos \psi; \quad \frac{\beta - \beta_0}{\sigma_\beta} = r \sin \psi. \quad (13)$$

Тогда выражение (11) примет вид

$$p = \iint \varphi(\alpha(r, \psi), \beta(r, \psi)) \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(r, \psi)} dr d\psi = \iint \varphi \sigma_\alpha \sigma_\beta r dr d\psi. \quad (14)$$

Подставляя (9) в (14), получим:

$$\begin{aligned} p(\alpha, \beta \in D) &= \frac{1}{2\pi \sigma_\alpha \sigma_\beta \sqrt{1-\rho^2}} \times \\ &\times \iint \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(r^2 \cos^2 \psi - \right. \\ &\left. - 2\rho r^2 \cos \psi \sin \psi + r^2 \sin^2 \psi)\right) \sigma_\alpha \sigma_\beta r dr d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{1-\rho^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b e^{-\frac{1-\rho \sin 2\psi}{2(1-\rho^2)} r^2} r dr = \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{2\pi} \left( \frac{-2(1-\rho^2)}{2(1-\rho \sin 2\psi)} e^{-\frac{1-\rho \sin 2\psi}{2(1-\rho^2)} r^2} \right) \Big|_a^b d\psi = \\ &= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( e^{-\frac{k^2 \sigma_\beta^2}{2(1-\rho^2)}(1-\rho \sin 2\psi)} - \right. \\ &\left. - e^{-\frac{k^2 \sigma_\alpha^2}{2(1-\rho^2)}(1-\rho \sin 2\psi)} \right) \frac{1}{1-\rho \sin 2\psi} d\psi. \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла в полярных координатах находим якобиан-преобразование на основе вычислений дифференциалов:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sigma_\alpha \cos \psi dr - \sigma_\alpha r \sin \psi d\psi = \\ &= \sigma_\alpha (\cos \psi dr - r \sin \psi d\psi), \\ d\beta &= \sigma_\beta (\sin \psi dr + r \cos \psi d\psi) = \\ &= \sigma_\beta (\sin \psi dr + r \cos \psi d\psi), \\ d\alpha d\beta &= \sigma_\alpha \sigma_\beta [\cos \psi \sin \psi (dr^2 - r^2 d\psi^2) + \\ &+ r(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) dr d\psi] = r \sigma_\alpha \sigma_\beta \cos 2\psi dr d\psi. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда якобиан принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(r, \psi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial r} & \frac{\partial \alpha}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \beta}{\partial r} & \frac{\partial \beta}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_\alpha \cos \psi + -\sigma_\alpha r \sin \psi \\ \sigma_\beta \sin \psi + \sigma_\beta r \cos \psi \end{vmatrix} = \\ &= \sigma_\alpha \sigma_\beta r (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = \sigma_\alpha \sigma_\beta r, \end{aligned}$$

откуда следует формула двойного интеграла в полярных координатах:

$$p = \iint f(\alpha(r, \psi), \beta(r, \psi)) \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(r, \psi)} dr d\psi = \iint f \sigma_\alpha \sigma_\beta r dr d\psi.$$

Окончательно получим формулу для нахождения вероятности принадлежности параметров вектора интеллекта в область эллипса рассеяния  $D$ :

$$p(\alpha, \beta \in D) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( e^{-k_\beta(1-\rho \sin 2\psi)} - e^{-k_\alpha(1-\rho \sin 2\psi)} \right) \frac{1}{1-\rho \sin 2\psi} d\psi, \quad (16)$$

$$\text{где } k_\alpha = \frac{k^2 \sigma_\alpha^2}{2(1-\rho^2)}; \quad k_\beta = \frac{k^2 \sigma_\beta^2}{2(1-\rho^2)}.$$

### Модель прогноза группового вектора интеллекта

Плотность вероятности группового вектора интеллекта определим на основе нормального закона распределения двумерной случайной величины:

$$\varphi(U, V) = \frac{1}{2\pi \sqrt{|G|}} \exp\left[-\frac{(W - W_0)G^{-1}(W - W_0)}{2}\right], \quad (17)$$

где  $W = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$  – групповой вектор интеллекта,

$W_0 = \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$  – центр рассеивания.

Математические ожидания групповых показателей интеллекта определяются как средние значения случайных величин:

$$U = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i; \quad V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \beta_i, \quad (18)$$

где  $N$  – количество обучаемых в группе;  $i$  – числовой идентификатор конкретного обучаемого (номер в списке группы, номер зачетки и т.д.);  $G$  – матрица ковариаций;  $G^{-1}$  – обратная матрица ковариаций.

Определение матрицы ковариаций выполняется по формуле (8), плотность распределения группового вектора интеллекта – по формуле (9), доверительная вероятность прогноза вероятности определяется выражением (16).

Таким образом, получены математические модели, с помощью которых можно определить доверительные интервалы и доверительные вероятности индивидуального и группового векторов интеллекта. Однако в реализации

схемы управления (см. рис.1) существенное значение имеет также возможность прогноза вектора состояния. Для определения вектора состояний необходимо рассмотреть модель графа обучения, так как прогноз вектора состояния основывается на определении вершин (учебных элементов – УЭ) и взаимосвязей между ними (внутри- и межпредметных связей).

### Модель прогноза вектора состояния

Граф обучения (ГО) [4] представляет собой ориентированный граф, изображающий множество точек-вершин, соответствующих УЭ дисциплины, соединенных между собой дугами-стрелками. Для прогнозирования значений вектора состояния обучаемого после изучения учебного материала за время  $t$  применим теорему умножения, рассматривая вероятности сохранения в памяти соответствующих вершин графа как вероятности совместных событий, определяющих вероятности сохранения в памяти взаимосвязи между УЭ.

Для прогнозирования значений вектора состояния обучаемого после изучения учебного материала за время  $t$  определим на основе матрицы инцидентий, описывающей взаимосвязи между УЭ, с помощью теоремы умножения. При этом рассмотрим вероятности сохранения в памяти соответствующих вершин графа как вероятности совместных событий для определения вероятности сохранения в памяти взаимосвязи между УЭ:

$$p_{ij}(t) = p_i(t)p_j(t), \quad (19)$$

где  $t$  – момент контроля состояния обучения;  $p_i(t), p_j(t)$  – вероятности сохранения соответственно  $i$ -х и  $j$ -х вершин в момент времени  $t$ ;  $p_{ij}(t)$  – вероятность сохранения дуги ( $i, j$ ) в момент  $t$ .

Известно, что вероятность сохранения в памяти УЭ определяется по экспоненциальному закону [11]:

$$p_i(t) = p(q_i) = e^{-\lambda(t-t_i)} \frac{q_i}{\sum_{i=1}^n q_i}, \quad (20)$$

где  $t_i$  – момент изучения  $i$ -й вершины, причем  $t > t_i$ ;  $q_i$  – вес  $i$ -й вершины, характеризующий

количество входящих дуг;  $n$  – общее число вершин;  $\lambda$  – параметр интеллекта, характеризующий забывание.

Тогда, после подстановки (20) в (19), получим:

$$p_{ij}(t) = \frac{e^{-\lambda(2t-t_i-t_j)} q_i q_j}{\left( \sum_{i=1}^n q_i \right)^2}. \quad (21)$$

Уравнение (21) позволяет вычислять прогнозируемое значение вероятности сохранения в памяти взаимосвязи между двумя УЭ на основе данных матрицы инцидентий и построенного на ее данных графа обучения.

### Модель прогноза векторов конфигурации

В процессе планирования обучения происходит группирование УЭ, изучаемых на одном занятии. Поэтому введем понятие конфигурации, под которым будем понимать группу вершин, изучаемых на  $k$ -м занятии. Определим для каждой конфигурации прогнозируемые значения вероятностей сохранения в памяти УЭ взаимосвязей между ними. Для этого сначала определим общие веса вершин и дуг, составляющих конфигурацию:

$$Q_{1k} = \sum_{i=i_k}^{i_k+l_k-1} q_i; \quad Q_{2k} = \sum_{i=i_k}^{i_k+l_k-1} \sum_{j>i} q_{ij}, \quad (22)$$

где  $Q_{1k}$  – вес всех вершин  $k$ -й конфигурации;  $Q_{2k}$  – вес всех дуг  $k$ -й конфигурации;  $k$  – номер конфигурации;  $i_k$  – номер первой вершины  $k$ -й конфигурации;  $l_k$  – количество вершин  $k$ -й конфигурации;  $q_{ij}$  – вес дуги, соединяющей вершины  $i, j$ , причем  $q_{ij} = q_i + q_j$ .

Тогда для определения соответствующих вероятностей получим:

$$p_{1k}(t) = e^{-\lambda(t-t_k)}; \quad p_{2k}(t) = e^{-2\lambda(t-t_k)}, \quad (23)$$

где  $p_{1k}(t)$  – вероятность сохранения всех вершин  $k$ -й конфигурации за время  $t - t_k$ ;  $p_{2k}(t)$  – вероятность сохранения всех дуг  $k$ -й конфигурации за время  $t - t_k$ ;  $t_k$  – время проведения занятий с  $k$ -й конфигурацией;  $t$  – время проведения контроля.

Таким образом, формулы (22) и (23) позволяют прогнозировать вероятностные показатели вектора состояния обучаемого, соответствующие запоминанию УЭ (вершин графа обучения) и взаимосвязей между ними (дугами графа).

В соответствии со структурой общей схемы управления обучением конфигурации могут быть объединены в различного рода блоки (темы, разделы, модули, учебные дисциплины). Поэтому представляет интерес также прогнозирование параметров вектора состояния для блоков конфигураций. Для этого покажем соответствующие вероятности сохранения информации о вершинах и дугах, объединенных в блоке конфигурации:

$$x_t(m, n) = \frac{\sum_{k=m}^{m+n-1} e^{-\lambda(t-t_k)} Q_{1k}}{\sum_{k=m}^{m+n-1} Q_{1k}} ;$$

$$y_t(m, n) = \frac{\sum_{k=m}^{m+n-1} e^{-\lambda(t-t_k)} Q_{2k}}{\sum_{k=m}^{m+n-1} Q_{2k}} ,$$
(24)

где  $m$  – номер первой конфигурации в  $k$ -м блоке;  $n$  – количество конфигураций в  $k$ -м блоке.

Тогда можно выразить совместную плотность вероятности сохранения вершин и дуг графа обучения (ГО) следующим образом:

$$p = \frac{1}{2\pi\sqrt{|H|}} \times$$

$$\times \iint_D \exp\left(-\frac{1}{2}(B - B_0)^T H^{-1}(B - B_0)\right) dx dy ,$$
(25)

где  $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  – вектор состояния после изучения

блока конфигураций;  $B_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  – вектор со-

стояния, соответствующий его центру рассеивания;

$H = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & k_{xy} \\ k_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$  – матрица ковариаций

между компонентами  $x, y$ ;  $\sigma_x^2, \sigma_y^2$  – дисперсии случайных величин  $x, y$ ;  $k_{xy}$  – ковариация.

Доверительная вероятность прогноза для блока конфигураций определяется с помощью двойного интеграла:

$$p_D = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \exp\left(-\frac{G(x, y)}{1-\rho_{xy}^2}\right) dy ,$$
(26)

где  $D$  – область интегрирования внутренних точек эллипса рассеивания.

Определение пределов интегрирования плотности доверительной вероятности на основе метода вычисления двойного интеграла выполним по формулам:

$$a = x_0 - \frac{c\sigma_x}{\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} ; b = x_0 + \frac{c\sigma_x}{\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} .$$
(27)

Границы доверительных интервалов эллипса рассеивания определим по формулам:

$$y_1(x) = y_0 + \sigma_y \left( \frac{\rho_{xy}(x-x_0)}{\sigma_x} - \sqrt{c^2 - \frac{3(x-x_0)^2}{4\sigma_x^2}} \right) ;$$

$$y_2(x) = y_0 + \sigma_y \left( \frac{\rho_{xy}(x-x_0)}{\sigma_x} + \sqrt{c^2 - \frac{3(x-x_0)^2}{4\sigma_x^2}} \right) .$$
(28)

Плотности доверительной вероятности прогноза вектора состояния после изучения блока конфигураций – по формуле двойного интегрирования:

$$p = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \exp\left(-\frac{G(x, y)}{1-\rho_{xy}^2}\right) dy .$$
(29)

Таким образом, получены зависимости, с помощью которых можно определить вероятностные характеристики двумерного вектора  $(x, y)$  на основе входных данных алгоритма прогнозирования обученности (рис. 4):  $h, U, T, t, w$ , где  $h$  – скорость подачи учебной информации,  $U$  – время для изучения тезауруса,  $T$  – тезаурус,  $t$  – время,  $w$  – тестовый параметр интеллекта, ПО – программа обучения, ГО – граф обучения.

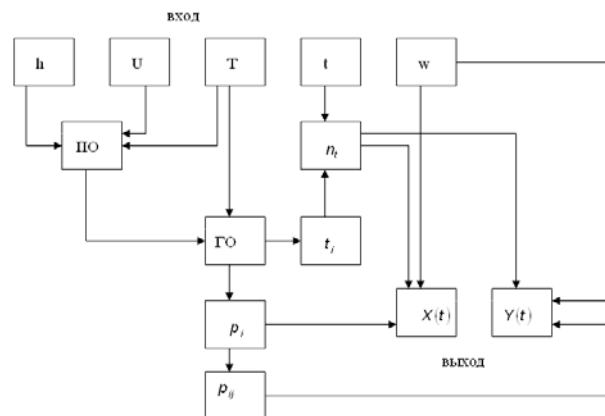


Рис. 4. Схема алгоритма вычислений вектора состояний

### Реализация

Компьютерные эксперименты по определению прогноза состояния обученности выпол-

нялись на основе использования функций *Statistics Toolbox* пакета *MATLAB*. Передача подготовленных исходных данных из файлов с расширениями *\*.xlsx* в *MATLAB* осуществлялась подключением через надстройки *ExcelLink*, позволяющей вести совместную работу с двумя пакетами.

Графическая визуализация эллипсов рассеяния и поверхностей плотности вероятности реализована с использованием графических команд визуализации в виде каркасной (команда *mesh*) и сплошной (команда *surface*) поверхностей [12]. Команда *meshgrid* используется для преобразования области определения векторов в матрицы узлов поверхности. Одна из полученных поверхностей показана на рис. 5.

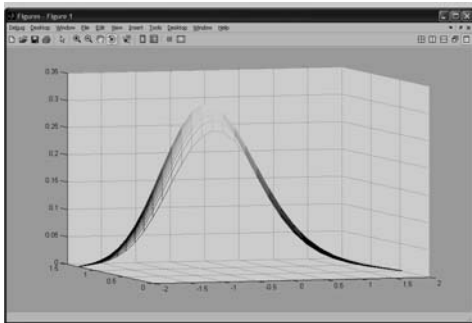


Рис. 5. Поверхность распределения плотности вероятности вектора интеллекта

**Заключение.** Получены математические модели прогнозирования параметров векторов интеллекта и векторов состояния для обучаемых или группы обучаемых. Модели позволяют определять доверительные вероятности достижения локальных и конечных целей обучения как по одной учебной дисциплине, так и для различных конфигураций. Особенность предложенной модели – ее синергетическая направленность, предполагающая учет внутреннего развития объекта управления при выборе обучающих воздействий. Научная новизна состоит в разработке математических моделей для прогнозирования основных параметров синергетической модели управления обучением на основе вектора интеллекта, учитывающего характеристики памяти и мышления. Практичес-

кая целесообразность определяется возможностью использования прогнозируемых значений для выбора управляющего воздействия индивидуально для каждого обучаемого, что является базовым элементом для формирования индивидуальной траектории обучения. Перспективным развитием данного подхода, по мнению автора, будет объединение предложенной математической модели с эволюционной моделью прогноза формирования компетенций.

1. Левківський К.М., Тимошенко Н.І., Степаненко С.М. Концептуальні підходи до формування освіти в інтересах сталого розвитку в Україні // Проблеми освіти – 2009. – 61. – С. 3–8.
2. Gritsenko V. Higher education in information epoch: challenges of globalization // Proceedings of the Fourth International Conference «New Information Technologies in Education for All: e-education». – Kiev: IRTC, 2009. – P. 11–23.
3. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами: теория системного синтеза. – М.: УРСС. – 2006. – 240 с.
4. Мазурок Т.Л. Синергетическая модель индивидуализированного управления обучением // Математические машины и системы. – 2010. – № 3. – С. 124–134.
5. Потев М.И. Практикум по методике обучения во вузах. – М.: Высш. школа, 1990. – 127 с.
6. Орлов А.И. Менеджмент: Учебник. – М.: Изумруд, 2003. – 298 с.
7. Современная прикладная теория управления: Новые классы регуляторов технических систем / Под ред. А.А. Колесникова. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. Ч. III. – 656 с.
8. Жуков Д.О., Самойло И.В. Модель самоорганизации информации в процессе управления знаниями // Качество, инновации, образование. – 2008. – № 12. – С. 18–36.
9. Мазурок Т.Л. Интеллектуальное управление процессом усвоения межпредметных знаний // УСиМ. – 2010. – № 2. – С. 22–29, 46.
10. Гайдышев И.А. Анализ и обработка данных. Спец. справочник. – СПб.: Питер, 2001. – 341 с.
11. Ясінський В.В. Системне моделювання процесів накопичення і дисипації знань // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2007. – № 3. – С. 111–121.
12. Дьяконов В., Круглов В. Математические пакеты расширения *MATLAB*. Спец. справочник. – СПб.: Питер, 2001. – 400 с.

© Т.Л. Мазурок, 2011