УДК 519.6

О.М. Литвин, Ю.І. Першина

Наближення розривних функцій двох змінних з розривами першого роду на лініях тріангуляції двовимірної області

Предложен метод построения разрывных интерлинационных полиномиальных сплайнов, приближающих разрывные функции двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области. Построенные сплайны, как частный случай, включают в себя разрывные и непрерывные сплайны. Сформулированы и доказаны теоремы о погрешности и ее оценку.

A method of the construction of explosive interlineations polynomial splines which approach the explosive function of two variables with ruptures of the first sort on the lines of a triangulation of a two-dimensional area is suggested. The constructed splines, as a special case, include the explosive and continuous splines. The theorems of an error and its estimation are formulated and proved.

Запропоновано метод побудови розривних інтерлінаційних поліноміальних сплайнів, які наближують розривні функції двох змінних з розривами першого роду на лініях тріангуляції двовимірної області. Побудовані сплайни, як окремий випадок, включають в себе розривні та неперервні сплайни. Сформульовано та доведено теореми про похибку наближення та її оцінку.

Вступ. Класична теорія наближення диференційовних функцій багатьох змінних використовує оцінки похибок, які базуються на припущенні, що наближувана функція має обмежені похідні досить високого порядку. Наприклад, в роботі [1] оцінка наближення поліномами Лагранжа степеня n потребує неперервності похідної порядку $n+1$, в роботах [2–4] похибка наближення сплайнами потребує неперервності r-ї $(1 \le r \le n+1)$ похідної, де n – степінь сплайна. Для наближення неперервних функцій замість похідних використовуються модулі неперервності.

В той же час практика показує, що необхідно вміти з достатньою точністю наближувати розривні функції, зокрема, такі, що мають в області задання розриви першого роду в окремих точках або на окремих лініях тощо. Наприклад, дослідження внутрішньої структури тіла людини методами комп'ютерної томографії в заданій площині має враховувати, що різні частини тіла мають свою форму і свою щільність, тобто щільність внутрішньої структури всього тіла описується розривною функцією від трьох змінних, яка має розриви першого роду на поверхнях між різними частинами тіла (серце, шлунок, печінка тощо). В деяких випадках досліднику відома форма цих поверхонь (як правило, наближено).

Тому актуальною є задача наближення такого роду функцій за допомогою конструкцій, які на вказаних лініях, поверхнях зберігають властивості наближуваної функції, тобто мають розриви першого роду (взагалі кажучи, з невідомими значеннями розривів).

В роботі [5] розглядається метод побудови інтерлінаційних поліноміальних сплайнів, якими можна наблизити як неперервно-диференційовні функції, так і розривні функції двох змінних з розривами першого роду на лініях ректангуляції в областях, що є об'єднанням прямокутників. В даній статті описано побудову сплайн-інтерлінантів для наближення розривних функцій двох змінних, що мають розриви першого роду на лініях тріангуляції двовимірної області.

Постановка задачі

Нехай задано розривну функцію двох змінних $f(x, y)$ в області D. Вважатимемо, що область D розбивається прямими $x_0 = 0 < x_1 < < x_2 < \ldots < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = 1$ на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається діагоналлю на два прямокутні трикутники. Трикутники не вкладаються один в один, а їх сторони не перетинаються. Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов'язково між всіма). Метою роботи є побудова та дослідження операторів розривної кусково-поліноміальної інтерлінації таких, які в кожному трикутнику є операторами поліноміальної інтерлінації функції $f(x, y)$.

Метод побудови наближувального розривного сплайна-інтерлінанта

Розглянемо трикутний елемент T_{ij}, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ (рис. 1), утворений прямими

$$\omega1_i(x,y)=0,\ \omega2_j(x,y)=0,\ \omega3_{ij}(x,y)=0,$$

де

$$\omega1_i := x-x_i,\ \omega2_j := y-y_j,$$

$$\omega3_{ij} := \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}-\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}.$$

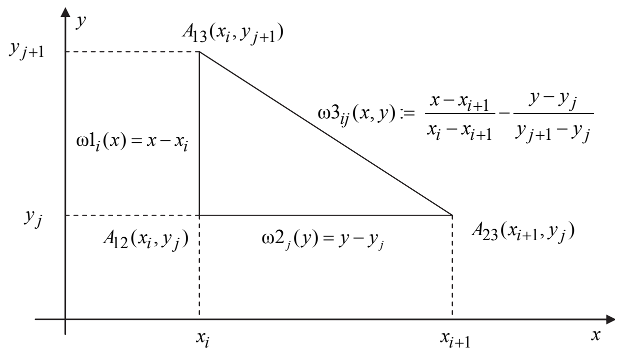

Рис. 1. Зображення трикутного елементу T_{ij}

Вважаємо заданими:

• Сліди функції $f(x,y)$ на прямій $x=x_i$ (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_i(y)=\lim_{x\to x_i+0} f(x,y)=f(x_i+0,y),$$

$$\varphi m_i(y)=\lim_{x\to x_i-0} f(x,y)=f(x_i-0,y);$$

$$\varphi pp_{ij}=\varphi p_i(y_j)=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j+0}} f(x,y)=$$

$$=f(x_i+0,y_j+0),$$

$$\varphi mp_{ij}=\varphi m_i(y_j)=\lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j+0}} f(x,y)=$$

$$=f(x_i+0,y_j+0).$$

• Сліди функції $f(x,y)$ на прямій $y=y_j$ (над та під прямою відповідно):

$$\psi p_j(x)=\lim_{y\to y_j+0} f(x,y)=f(x,y_j+0),$$

$$\psi m_j(x)=\lim_{y\to y_j-0} f(x,y)=f(x,y_j-0),$$

$$\psi pp_{ij}=\psi p_j(x_i)=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j+0}} f(x,y)=$$

$$=f(x_i+0,y_j+0),$$

$$\psi pm_{ij}=\psi m_j(x_i)=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j-0}} f(x,y)=$$

$$=f(x_i+0,y_j-0).$$

• Сліди функції $f(x,y)$ на прямій $y=\frac{(y_j-y_{j+1})(x-x_i)}{x_{i+1}-x_i}+y_{j+1}$ (під та над прямою відповідно):

$$\eta m_{ij}(x)=f\left(x,\frac{(y_j-y_{j+1})(x-x_i)}{x_{i+1}-x_i}+y_{j+1}-0\right),$$

$$\eta p_{ij}(x)=f\left(x,\frac{(y_j-y_{j+1})(x-x_i)}{x_{i+1}-x_i}+y_{j+1}+0\right);$$

$$\eta pm_{ij}=\eta m_{ij}(x_i)=f\left(x_i+0,y_{j+1}-0\right),$$

$$\eta pp_{ij}=\eta p_{ij}(x_i)=f\left(x_i+0,y_{j+1}+0\right)$$

або

$$\eta m_{ij}(y)=f\left(\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{y_{j+1}-y_j}+x_{i+1}+0,y\right),$$

$$\eta p_{ij}(y)=f\left(\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{y_{j+1}-y_j}+x_{i+1}-0,y\right);$$

$$\eta pm_{ij}=\eta m_{ij}(y_j)=f\left(x_{i+1}+0,y_j-0\right),$$

$$\eta mp_{ij}=\eta p_{ij}(y_j)=f\left(x_{i+1}-0,y_j+0\right).$$

Теорема 1. Якщо сліди функції $f(x,y)$ задовольняють умови

$$\psi p_j(x_i)=\varphi p_i(y_j),\ \eta m_{ij}(x_i)=\varphi p_i\left(y_{j+1}\right),$$

$$\eta m_{ij}\left(x_{i+1}\right)=\psi p_j\left(x_{i+1}\right),$$

то оператор

$$Of(x,y)=\frac{\omega3_{ij}(x,y)}{\omega3_{ij}(A_{12})}\Big(\psi p_j(x)+\varphi p_i(y)-\varphi p_i(y_j)\Big)+$$

$$+\frac{\omega2_j(y)}{\omega2_j(A_{13})}\Bigg(\eta m_{ij}(x)-$$

$$-\varphi p_i\left(y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{(x_i-x_{i+1})}\right)+\varphi p_i(y)\Bigg)+$$

$$+\frac{\omega1_i(x)}{\omega1_i(A_{23})}\left(\eta m_{ij}\left(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right)-\right.$$

$$-\psi p_j\left(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right)+\psi p_j(x)\Bigg)$$

інтерлінує $f(x,y)$ на

$$\partial \mathrm{T}_i : Of(x,y)\big|_{\partial \mathrm{T}_i} = f(x,y)\big|_{\partial \mathrm{T}_i}$$

Доведення

$$Of(x,y)\big|_{x=x_i} = \frac{\omega 3_{ij}(x,y)}{\omega 3_{ij}(A_{12})}\Bigg|_{x=x_i} \times$$

$$\times\Big(\psi p_j(x)+\varphi p_i(y)-\varphi p_i(y_j)\Big)\Big|_{x=x_i} +$$

$$+\frac{\omega 2_j(y)}{\omega 2_j(A_{13})}\Bigg|_{x=x_i}\cdot\Bigg(\eta m_{ij}(x)-\varphi p_i\Bigg(y_j+$$

$$+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{(x_i-x_{i+1})}\Bigg)+\varphi p_i(y)\Bigg)\Bigg|_{x=x_i}+$$

$$+\frac{\omega 1_i(x)}{\omega 1_i(A_{23})}\Bigg|_{x=x_i}\cdot\Bigg(\eta m_{ij}\Bigg(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\Bigg)-$$

$$-\psi p_j\Bigg(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\Bigg)+\psi p_j(x)\Bigg)\Bigg|_{x=x_i} =$$

$$=\left(1-\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_i}\right)\cdot\Big(\psi p_j(x_i)+\varphi p_i(y)-\varphi p_i(y_j)\Big)+$$

$$+\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}\cdot\Big(\eta m_{ij}(x_i)-\varphi p_i\big(y_{j+1}\big)+\varphi p_i(y)\Big)=$$

$$=\left(1-\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_i}\right)\cdot\varphi p_i(y)+\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}\cdot\varphi p_i(y)=$$

$$=\varphi p_i(y).$$

Отже, доведено, що $O\,f(x,y)\big|_{x=x_i} = \varphi p_i(y)$.

Аналогічно

$$Of(x,y)\big|_{y=y_j} = \frac{\omega 3_{ij}(x,y)}{\omega 3_{ij}(A_{12})}\Bigg|_{y=y_j} \times$$

$$\times\Big(\psi p_j(x)+\varphi p_i(y)-\varphi p_i(y_j)\Big)\Big|_{y=y_j} +$$

$$+\frac{\omega 2_j(y)}{\omega 2_j(A_{13})}\Bigg|_{y=y_j}\cdot\Bigg(\eta m_{ij}(x)-\varphi p_i\Bigg(y_j+$$

$$+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{(x_i-x_{i+1})}\Bigg)+\varphi p_i(y)\Bigg)\Bigg|_{y=y_j}+$$

$$+\frac{\omega 1_i(x)}{\omega 1_i(A_{23})}\Bigg|_{y=y_j}\cdot\Bigg(\eta m_{ij}\Bigg(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\Bigg)-$$

$$-\psi p_j\Bigg(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\Bigg)+\psi p_j(x)\Bigg)\Bigg|_{y=y_j} =$$

$$=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdot\Big(\psi p_j(x)+\varphi p_i(y_j)-\varphi p_i(y_j)\Big)+$$

$$+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\cdot\Big(\eta m_{ij}(x_{i+1})-\psi p_j(x_{i+1})+\psi p_j(x)\Big)=$$

$$=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdot\psi p_j(x)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\cdot\psi p_j(x)=\psi p_j(x).$$

Отже, доведено, що $Of(x,y)\big|_{y=y_j} = \psi p_j(x)$.

$$Of(x,y)\Big|_{y=y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}} =$$

$$=\frac{\omega 3_{ij}(x,y)}{\omega 3_{ij}(A_{12})}\Bigg|_{y=y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}\times$$

$$\times\Big(\psi p_j(x)+\varphi p_i(y)-\varphi p_i(y_j)\Big)\Big|_{y=y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}+$$

$$+\frac{\omega 2_j(y)}{\omega 2_j(A_{13})}\Bigg|_{y=y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}\times$$

$$\times\Bigg(\eta m_{ij}(x)-\varphi p_i\Bigg(y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{(x_i-x_{i+1})}\Bigg)+$$

$$+\varphi p_i(y)\Bigg)\Bigg|_{y=y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}+$$

$$+\frac{\omega 1_i(x)}{\omega 1_i(A_{23})}\Bigg|_{y=y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}\times$$

$$\times\left(\eta m_{ij}\left(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right)-\right.$$

$$-\psi p_j\left(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right)+$$

$$\left.+\psi p_j(x)\right)\Bigg|_{y=y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}=$$

$$=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdot\left(\eta m_{ij}(x)-\varphi p_i\left(y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{(x_i-x_{i+1})}\right)+\right.$$

$$\left.+\varphi p_i\left(y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{(x_i-x_{i+1})}\right)\right)+$$

$$+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\cdot\left(\eta m_{ij}(x)-\psi p_j(x)+\psi p_j(x)\right)=$$

$$=\eta m_{ij}(x)\cdot\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)=\eta m_{ij}(x).$$

Тобто $Of(x,y)\big|_{\Gamma_k}=f(x,y)\big|_{\Gamma_k}$, $k=\overline{1,3}$, де Γ_k – сторони трикутника.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Якщо $f(x,y)$ є неперервною разом із своїми частинними похідними до другого порядку включно всередині трикутного елемента T_{ij}, то для залишку $Rf=(I-O)f$ справедлива рівність:

$$Rf(x,y)=\frac{\omega 3_{ij}(x,y)}{\omega 3_{ij}(A_{12})}\int_{x_i}^{x}\int_{y_j}^{y}f^{(1,1)}(u,v)dudv+\frac{\omega 2_j(y)}{\omega 2_j(A_{13})}\times$$

$$\times\int_{x_i}^{x}\int_{y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}^{y}f^{(1,1)}(u,v)dudv+\frac{\omega 1_i(x)}{\omega 1_i(A_{23})}\times$$

$$\times\int_{x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}}^{x}\int_{y_j}^{y}f^{(1,1)}(u,v)dudv,\ (x,y)\in\mathrm{T}_{ij}. \tag{1}$$

Доведення. Обчислимо кожний з трьох інтегралів. В результаті отримаємо

$$\int_{x_i}^{x}\int_{y_j}^{y}f^{(1,1)}(u,v)dudv=\int_{x_i}^{x}\left(f^{(1,0)}(u,y)-f^{(1,0)}(u,y_j)\right)du=$$

$$=f(x,y)-f(x_i,y)-f(x,y_j)+f(x_i,y_j)=$$

$$=f(x,y)-\varphi p_i(y)-\psi p_j(x)+\varphi p_i(y_j);$$

$$\int_{x_i}^{x}\int_{y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}^{y}f^{(1,1)}(u,v)dudv=\int_{x_i}^{x}\left(f^{(1,0)}(u,y)-\right.$$

$$\left.-f^{(1,0)}\left(u,y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}\right)\right)du=$$

$$=f(x,y)-f\left(x,y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}\right)-$$

$$-f(x_i,y)+f\left(x_i,y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}\right)=$$

$$=f(x,y)-\eta m_{ij}(x)-\varphi p_i(y)+$$

$$+\varphi p_i\left(y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}\right);$$

$$\int_{x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}}^{x}\int_{y_j}^{y}f^{(1,1)}(u,v)dudv=$$

$$=\int_{x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}}^{x}\left(f^{(1,0)}(u,y)-f^{(1,0)}(u,y_j)\right)=$$

$$=f(x,y)-f\left(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)},y\right)-$$

$$-f(x,y_j)+f\left(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)},y_j\right)=$$

$$=f(x,y)-\eta m_{ij}\left(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right)-$$

$$-\psi p_j(x)+\psi p_j\left(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right).$$

Після підстановки результатів інтегрування у вираз для похибки отримаємо тотожність $f(x,y)-Of(x,y)\equiv f(x,y)-Of(x,y)$.

Теорему 2 доведено.

У випадку, коли область триангульована, залишок інтерлінації в кожному з трикутників не дорівнює добуткові залишків одновимірної інтерполяції на відміну від випадку розбиття області на прямокутні елементи. Тому для оцінки залишку корисною буде лема.

Лема [6, с. 202]**.** Нехай $\xi, x \in R^n$, $\mathrm{T}_i \subset \mathrm{T} \subset R^n$, $i = \overline{1, M}$, $\mathrm{mes}(\mathrm{T}_i \cap \mathrm{T}_j = 0)$,

$$K(x,\xi) = \begin{cases} K_i(x,\xi), & \xi \in \mathrm{T}_i, \quad i = \overline{1,M} \\ 0, & \xi \in \mathrm{T} \setminus \bigcup_i \mathrm{T}_i \end{cases},$$

$$1 \le p, q \le \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad g \in L_p(\mathrm{T}),$$

$$\left(\int_{\mathrm{T}_i} \left| K_i(x,\xi) \right|^{p'} d\xi \right)^{\frac{1}{p'}} \in L_q(\mathrm{T}).$$

Якщо

$$\left(\int_{\mathrm{T}_i} \left| K_i(x,\xi) \right|^{p'} d\xi \right)^{\frac{1}{p'}} = \lambda(x), \ i = \overline{1,M},$$

$$\sum_{i=1}^{M} \left(\int_{\mathrm{T}_i} \left| g(\xi) \right|^{p} d\xi \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathrm{T}} \left| g(\xi) \right|^{p} d\xi \right)^{\frac{1}{p}},$$

то отримаємо нерівність

$$\left(\int_{\mathrm{T}} \left| \int_{\mathrm{T}} g(\xi) K(x,\xi) d\xi \right|^{q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \le \|g\|_{L_p(\mathrm{T})} \|\lambda(x)\|_{L_q(\mathrm{T})}.$$

Оцінимо похибку, загальний вигляд якої був отриманий в теоремі 2.

Теорема 3. Нехай $f(x,y) \in L_{\infty}^{1,1}(\mathrm{T}_{ij})$, $\forall (x,y) \in$ $\in T_{ij}$. Тоді справедлива така оцінка похибки:

$$\left| Rf(x,y) \right| \le \left\| f^{(1,1)}(x,y) \right\|_{L_\infty(\mathrm{T}_{ij})} \cdot \left| \left(x - x_i \right) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left(y - y_j \right) \cdot \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right) \right|, \ \forall (x,y) \in \mathrm{T}_{ij}, \tag{2}$$

де $L_\infty(\mathrm{T}_{ij}) = \lim\limits_{p \to \infty} L_p(\mathrm{T}_{ij}) = \sup vrai \left| f(x,y) \right|$ – істотна верхня грань функції $\left| f(x,y) \right|$ на T_{ij}, тобто найменше з чисел $K \ge 0$, для яких нерівність $\left| f(x,y) \right| > K$ виконується на множині міри нуль.

Доведення. Запишемо похибку (1) в наступному вигляді:

$$Rf(x,y) = \iint_{\mathrm{T}_{ij}} f^{(1,1)}(u,v) \cdot K(x,y,u,v) du dv,$$

де

$$K(x,y;u,v) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \dfrac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} := K_1(x,y;u,v), \ (u,v) \in \mathrm{T}_1 = \\ \qquad = \{ u \in (x_i, x), \ v \in (y_j, y) \}, \\ -\dfrac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} := K_2(x,y;u,v), \qquad (u,v) \in \mathrm{T}_2 = \\ \quad = \left\{ u \in (x_i, x); \ y_j + \dfrac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}} < v < y \right\} - \\ -\dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} := K_3(x,y;u,v), \qquad (u,v) \in \mathrm{T}_3 = \\ \quad = \left\{ x_{i+1} + \dfrac{(y - y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1} - y_j)} < u < x, \ v \in (y_j, y) \right\}. \end{cases}$$

$$\iint_{\mathrm{T}_1} \left| K_1(x,y;u,v) \right| du dv = \int_{x_i}^{x} \int_{y_j}^{y} \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right) \times$$
$$\times du dv = \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right) \left(x - x_i \right) \left(y - y_j \right);$$

$$\iint_{\mathrm{T}_2} \left| K_2(x,y;u,v) \right| du dv =$$
$$= \int_{x_i}^{x} \int_{y}^{y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}}} \left| -\frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right| du dv =$$
$$= \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \cdot \left(x - x_i \right) \times$$
$$\times \left(y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}} - y \right) =$$
$$= (y - y_j) \cdot (x - x_i) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right);$$

$$\iint_{\mathrm{T}_3} \left| K_3(x.y;u,v) \right| du dv =$$

$$= \int\limits_{x}^{x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}} \int\limits_{y_j}^{y} \left| -\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \right| du dv =$$

$$= \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \cdot \left(x_{i+1} + \frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)} - x \right) \times$$

$$\times (y-y_j) = (x-x_i)(y-y_j) \times$$

$$\times \left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} - \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} \right).$$

Отже, застосувавши лему, одержимо

$$|Rf(x,y)| \le \left\| f^{(1,1)}(x,y) \right\|_{L_\infty(\mathrm{T}_{ij})} \times$$

$$\times \left| (x-x_i)(y-y_j) \left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} - \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} \right) \right|,$$

$$(x,y) \in \mathrm{T}_{ij} \, (p=\infty, \ p'=1).$$

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. Якщо виконуються умови теорем 2 та 3, то функція $f(x,y) =$ $= (x-x_i)(y-y_j) \left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} - \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} \right)$ перетворює нерівність (2) у рівність.

Доведення. Знайдемо $f^{(1,1)}(x,y)$.

$$f^{(1,0)}(x,y) = (y-y_j) \left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} - \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} \right) +$$

$$+ \frac{(x-x_i)(y-y_j)}{(x_i-x_{i+1})};$$

$$f^{(1,1)}(x,y) = \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} - \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} - \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} +$$

$$+ \frac{x-x_i}{(x_i-x_{i+1})} = -2\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} + \frac{2x-(x_i+x_{i+1})}{x_i-x_{i+1}} =$$

$$= 1 - 2\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} - 2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}.$$

Згідно з означенням простору $L_\infty(\mathrm{T}_{ij})$, маємо

$$\left\| \left[(x-x_i)(y-y_j) \left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} - \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j} \right) \right]^{(1,1)} \right\|_{L_\infty(\mathrm{T}_{ij})} = 1,$$

$$f(x,y)\big|_{\partial \mathrm{T}_{ij}} = 0.$$

Після підстановки одержаного результату у формулу (2) отримаємо рівність в цій формулі.

Теорему 4 доведено.

Приклад 1. Нехай $\mathrm{T} = \{x, y > 0, 1-x-y > 0\}$ – область визначення $f(x,y)$. Функція неперервно-диференційовна всередині заданого трикутника T. Тоді, за теоремою 1, оператор поліноміальної інтерлінації матиме вигляд

$$Of(x,y) = (1-x-y)\big(\psi p(x) + \varphi p(y) - \varphi p(0)\big) +$$

$$+ y\big(\eta m(x) - \varphi p(1-x) + \varphi p(y)\big) +$$

$$+ x\big(\eta m(1-y) - \psi p(1-y) + \psi p(x)\big).$$

Для залишку $R_0 f(x,y) = (I - L_0)f$, за теоремою 2, справедлива рівність

$$R_0 f(x,y) = (1-x-y)\int\limits_0^x \int\limits_0^y f^{(1,1)}(u,v) du dv +$$

$$+ y\int\limits_0^x \int\limits_{1-x}^y f^{(1,1)}(u,v) du dv + x\int\limits_{1-y}^x \int\limits_0^y f^{(1,1)}(u,v) du dv.$$

А оцінка похибки, за теоремою 3, має вигляд

$$|R_0 f(x,y)| \le |xy(1-x-y)|,$$

$$\forall (x,y) \in \mathrm{T}, \ \forall f(x,y) \in L_\infty^{1,1}(\mathrm{T}).$$

Величина $|xy(1-x-y)|$ завжди додатна, тому можемо оцінити цю величину зверху, знайшовши найбільше значення функції $f(x,y)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1-x-y) - xy = 0 \\ x(1-x-y) - xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - 2xy - x^2 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо чотири стаціонарні точки: $(0,0), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), (0,1), (1,0)$.

Після підстановки точок у функцію $f(x,y) =$ $= xy(1-x-y)$, знаходимо найбільше значення цієї функції, яке дорівнює $\frac{1}{27}$, в точці $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Тому $\left|R_0 f(x,y)\right| \le \left|xy(1-x-y)\right| \le \frac{1}{27}$.

Приклад 2. Нехай функція $f(x,y)$ визначена в області $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2 \cup \mathrm{T}_3 \cup \mathrm{T}_4$, представленій на рис. 2.

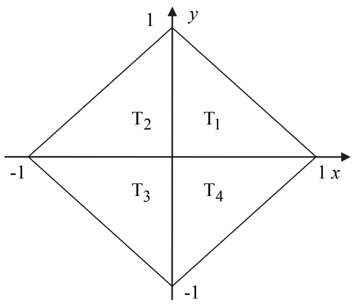

Рис. 2. Область визначення наближуваної функції $f(x, y)$

$$\mathrm{T}_1 = \{x, y > 0,\ 1-x-y > 0\},$$
$$\mathrm{T}_2 = \{x < 0,\ y > 0,\ 1+x-y > 0\},$$
$$\mathrm{T}_3 = \{x, y < 0,\ 1+x+y > 0\},$$
$$\mathrm{T}_4 = \{x > 0,\ y < 0,\ 1-x+y > 0\}.$$

Нехай функція $f(x,y)$ має розриви першого роду на лініях триангуляції, та має на цих лініях наступні сліди:

$$\varphi p(y) = f(+0, y) = y,\ \ \varphi m(y) = f(-0, y) = -y,$$
$$\psi p(x) = f(x, +0) = 2x,\ \ \psi m(x) = f(x, -0) = x,$$
$$\eta m_1(x) = f(x, 1-x-0) = 1+x,$$
$$\eta m_2(x) = f(x, 1+x-0) = -1+x,$$
$$\eta m_3(x) = f(x, -1-x-0) = 1+2x,$$
$$\eta m_4(x) = f(x, -1+x-0) = -1+2x.$$

Ці сліди задовольняють умови теореми 1 в кожному з чотирьох трикутників.

Розривний сплайн-інтерлінант будуватимемо у вигляді:

$$S(x,y) = \begin{cases} O_1 f(x,y), & (x,y) \in \mathrm{T}_1 \\ O_2 f(x,y), & (x,y) \in \mathrm{T}_2 \\ O_3 f(x,y), & (x,y) \in \mathrm{T}_3 \\ O_4 f(x,y), & (x,y) \in \mathrm{T}_4 \end{cases}, \qquad (3)$$

де

$$O_1 f(x,y) = (1-x-y)\big(\psi p(x) + \varphi p(y) - \varphi p(0)\big) +$$
$$+ y\Big(\eta m_1(x) - \varphi p\big(1-x\big) + \varphi p(y)\Big) +$$
$$+ x\Big(\eta m_1\big(1-y\big) - \psi p\big(1-y\big) + \psi p(x)\Big),$$

$$O_2 f(x,y) = (1+x-y)\big(\psi p(x) + \varphi m(y) - \varphi m(0)\big) +$$
$$+ y\Big(\eta m_2(x) - \varphi m\big(1+x\big) + \varphi m(y)\Big) -$$
$$- x\Big(\eta m_2\big(-1+y\big) - \psi p\big(-1+y\big) + \psi p(x)\Big),$$

$$O_3 f(x,y) = (1+x+y)\big(\psi m(x) + \varphi m(y) - \varphi m(0)\big) -$$
$$- y\Big(\eta m_3(x) - \varphi m\big(-1-x\big) + \varphi m(y)\Big) -$$
$$- x\Big(\eta m_3\big(-1-y\big) - \psi m\big(-1-y\big) + \psi m(x)\Big),$$

$$O_4 f(x,y) = (1-x+y)\big(\psi m(x) + \varphi p(y) - \varphi p(0)\big) -$$
$$- y\Big(\eta m_4(x) - \varphi p\big(-1+x\big) + \varphi p(y)\Big) +$$
$$+ x\Big(\eta m_4\big(1+y\big) - \psi m\big(1+y\big) + \psi m(x)\Big).$$

Підставимо у визначений розривний сплайн значення слідів функції $f(x,y)$ на відповідних лініях. В результаті отримаємо:

$$S(x,y) = \begin{cases} (1-x-y)(2x+y) + y(1+x-1+x+y) + \\ \quad + x(1+1-y-2+2y+2x), \quad (x,y) \in \mathrm{T}_1 \\ (1+x-y)(2x-y) + y(-1+x+1+x-y) - \\ \quad - x(-1-1+y+2x-2y), \quad (x,y) \in \mathrm{T}_2 \\ (1+x+y)(x-y) - y(1+2x-1-x-y) - \\ \quad - x(1-2-2y+1+y+x), \quad (x,y) \in \mathrm{T}_3 \\ (1-x+y)(x+y) - y(-1+2x+1-x) + \\ \quad x(-1+2+2y-1-y+x), \quad (x,y) \in \mathrm{T}_4 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x+y, & (x,y) \in \mathrm{T}_1 \\ 2x-y, & (x,y) \in \mathrm{T}_2 \\ x-y, & (x,y) \in \mathrm{T}_3 \\ x+y, & (x,y) \in \mathrm{T}_4 \end{cases}.$$

Як бачимо з формули (3), функція $S(x,y)$ на границі між елементами T_1 і T_4 матиме наступні сліди:

$$S(+0,y) = (1-y)\big(\psi p(0) + \varphi p(y) - \varphi p(0)\big) +$$
$$+ y\Big(\eta m_1(0) - \varphi p\big(1\big) + \varphi p(y)\Big),\ \ (x,y) \in \mathrm{T}_1,$$
$$S(-0,y) = (1-y)\big(\psi p(0) + \varphi m(y) - \varphi m(0)\big) +$$
$$+ y\Big(\eta m_2(0) - \varphi m\big(1\big) + \varphi m(y)\Big),\ (x,y) \in \mathrm{T}_2.$$

Тобто, якщо $\varphi p(0) \ne \varphi m(0)$, $\varphi p(1) \ne \varphi m(1)$, то функція $f(x, y)$ буде розривною на лінії $x = 0$.

Висновки. Отже, в статті запропоновано метод побудови розривних поліноміальних сплайн-інтерлінантів, які як частинний випадок включають в себе розривні сплайни для випадку, коли область визначення досліджуваної функції триангульована. Сформульовано і доведено теореми про інтерлінаційні властивості таких розривних конструкцій. Визначено загальний вигляд похибки наближення побудованими сплайн-інтерлінантами та її оцінка в кожному елементі розбиття.

1. *Гаврилюк І.П.*, *Макаров В.Л.* Методи обчислень: Підручник: У 2 ч. – К.: Вища шк., 1995. – 215 с.
2. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
3. *Стечкин С.Б.*, *Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 194 с.
4. *Завьялов Ю.С.*, *Квасов Б.И.*, *Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
5. *Литвин О.М.*, *Першина Ю.І.* Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайнами (прямокутні елементи) // Праці V міжнар. шк.-сем. «Теорія прийняття рішень», 27 вер. – 1 жовт. 2010 р., Ужгород, 2010 – С. 141–142.
6. *Литвин О.М.* Методи обчислень. Додат. розд. – К.: Наук. думка, 2005. – 333 с.

Поступила .30.11.2010

Тел. для справок: (057) 771-0545, (050) 222-6979 (Харьков)
E-mail: *academ@kharkov.ua*, *yulia_pershina@mail.ru*

●

Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области

О.Н. Литвин, Ю.И. Першина

Введение. Классическая теория приближения дифференцированных функций многих переменных использует оценки погрешностей, которые базируются на предположении, что приближаемая функция имеет ограниченные производные достаточно высокого порядка. Например, в работе [1] оценка приближения полиномами Лагранжа степени n требует непрерывность производной порядка $n + 1$, в работах [2–4] погрешность приближения сплайнами требует непрерывность r-й ($1 \le r \le n + 1$) производной, где n – степень сплайна. Для приближения непрерывных функций вместо производных используются модули непрерывности.

В то же время практика показывает, что необходимо уметь с достаточной точностью приближать разрывные функции, в частности, разрывные функции, имеющие в области задания разрывы первого рода в отдельных точках или на отдельных линиях. Например, при исследовании внутренней структуры тела человека методами компьютерной томографии в заданной плоскости необходимо учитывать, что разные части тела имеют свою форму и свою плотность, т.е. плотность внутренней структуры всего тела описывается разрывной функцией от трех переменных, имеющей разрывы первого рода на поверхностях между разными частями тела (сердце, желудок, печень и др.). В некоторых случаях исследователю известна форма этих поверхностей (как правило, приближенно).

Поэтому актуальна задача приближения такого рода функций с помощью конструкций, которые на указанных линиях или поверхностях сохраняют свойства приближаемой функции, т.е. имеют разрывы первого рода (вообще говоря, с неизвестными значениями разрывов).

В работе [5] рассматривается метод построения интерлинационных полиномиальных сплайнов, которыми можно приблизить как непрерывно-дифференцируемые функции, так и разрывные функции двух переменных с разрывами первого рода на линиях ректангуляции в областях, которые являются объединением прямоугольников. В данной статье описано построение сплайн-интерлинантов для приближения разрывных функций двух переменных, имеющих разрывы первого рода на линиях триангуляции двумерной области.

Постановка задачи

Пусть задана разрывная функция двух переменных $f(x, y)$ в области D. Будем считать, что область D разбивается прямыми $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < < y_2 < \ldots < y_n = 1$ на прямоугольные элементы, а каждый прямоугольник разбивается диагональю на два прямоугольных треугольника. Треугольники не вкладываются один в другой, а их стороны не пересекаются. Функция $f(x, y)$ имеет разрывы первого рода на границах между этими прямоугольными треугольниками (не обязательно между всеми). Цель работы – построение и исследование операторов разрывной кусочно-полиномиальной интерлинации таких, которые в каждом треугольнике есть операторами полиномиальной интерлинации функции $f(x, y)$.

Метод построения приближаемого разрывного сплайн-интерлинанта

Рассмотрим треугольный элемент $\mathrm{T}_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$ (рис. 1), образованный прямыми

$$\omega 1_i(x, y) = 0,\ \omega 2_j(x, y) = 0,\ \omega 3_{ij}(x, y) = 0,$$

где

$$\omega 1_i := x - x_i,\ \omega 2_j := y - y_j,$$

$$\omega 3_{ij} := \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}.$$

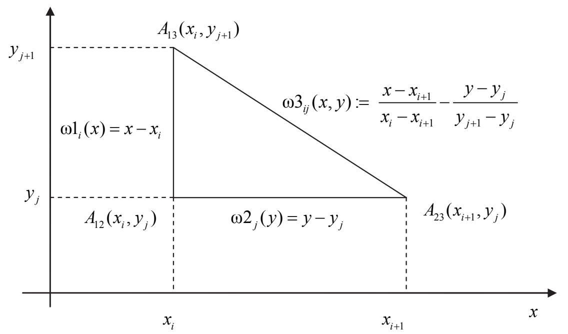

Рис. 1. Изображение треугольного элемента T_{ij}

Считаем заданными:

• Следы функции $f(x, y)$ на прямой $x = x_i$ (справа и слева прямой соответственно):

$$\varphi p_i\,(y) = \lim_{x\to x_i+0} f(x,y) = f(x_i+0, y),$$

$$\varphi m_i\,(y) = \lim_{x\to x_i-0} f(x,y) = f(x_i-0, y);$$

$$\varphi pp_{ij} = \varphi p_i\,(y_j) = \lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j+0}} f(x,y) = f(x_i+0, y_j+0),$$

$$\varphi mp_{ij} = \varphi m_i\,(y_j) = \lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j+0}} f(x,y) = f(x_i+0, y_j+0)\,.$$

• Следы функции $f(x, y)$ на прямой $y = y_j$ (над и под прямой соответственно):

$$\psi p_j\,(x) = \lim_{y\to y_j+0} f(x,y) = f(x, y_j+0),$$

$$\psi m_j\,(x) = \lim_{y\to y_j-0} f(x,y) = f(x, y_j-0),$$

$$\psi pp_{ij} = \psi p_j\,(x_i) = \lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j+0}} f(x,y) = f(x_i+0, y_j+0),$$

$$\psi pm_{ij} = \psi m_j\,(x_i) = \lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j-0}} f(x,y) = f(x_i+0, y_j-0)\,.$$

• Следы функции $f(x, y)$ на прямой

$$y = \frac{(y_j - y_{j+1})(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} + y_{j+1}$$ (под и над прямой соответственно):

$$\eta m_{ij}(x) = f\left(x, \frac{(y_j - y_{j+1})(x-x_i)}{x_{i+1}-x_i} + y_{j+1} - 0\right),$$

$$\eta p_{ij}(x) = f\left(x, \frac{(y_j - y_{j+1})(x-x_i)}{x_{i+1}-x_i} + y_{j+1} + 0\right);$$

$$\eta pm_{ij} = \eta m_{ij}(x_i) = f\left(x_i+0, y_{j+1}-0\right),$$

$$pp_{ij} = \eta p_{ij}(x_i) = f\left(x_i+0, y_{j+1}+0\right)$$

или

$$\eta m_{ij}(y) = f\left(\frac{(y-y_j)(x_i - x_{i+1})}{y_{j+1}-y_j} + x_{i+1} + 0, y\right),$$

$$\eta p_{ij}(y) = f\left(\frac{(y-y_j)(x_i - x_{i+1})}{y_{j+1}-y_j} + x_{i+1} - 0, y\right);$$

$$\eta pm_{ij} = \eta m_{ij}(y_j) = f\left(x_{i+1}+0, y_j-0\right),$$

$$\eta mp_{ij} = \eta p_{ij}(y_j) = f\left(x_{i+1}-0, y_j+0\right).$$

Теорема 1. Если следы функции $f(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$\psi p_j(x_i) = \varphi p_i(y_j),\ \eta m_{ij}(x_i) = \varphi p_i\left(y_{j+1}\right),\ \eta m_{ij}\left(x_{i+1}\right) = \psi p_j\left(x_{i+1}\right),$$

то оператор

$$Of(x,y) = \frac{\omega 3_{ij}(x,y)}{\omega 3_{ij}(A_{12})}\Big(\psi p_j(x) + \varphi p_i\,(y) - \varphi p_i(y_j)\Big) + \frac{\omega 2_j(y)}{\omega 2_j(A_{13})}\times$$

$$\times\left(\eta m_{ij}(x) - \varphi p_i\left(y_j + \frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{(x_i - x_{i+1})}\right) + \varphi p_i\,(y)\right) +$$

$$+\frac{\omega 1_i(x)}{\omega 1_i(A_{23})}\left(\eta m_{ij}\left(x_{i+1} + \frac{(y-y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right) -\right.$$

$$\left.-\psi p_j\left(x_{i+1} + \frac{(y-y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right) + \psi p_j(x)\right)$$

интерлинирует $f(x, y)$ на $\partial\mathrm{T}_i : Of(x,y)\big|_{\partial\mathrm{T}_i} = f(x,y)\big|_{\partial\mathrm{T}_i}$.

Доказательство

$$Of(x,y)\big|_{x=x_i} = \frac{\omega 3_{ij}(x,y)}{\omega 3_{ij}(A_{12})}\bigg|_{x=x_i}\times$$

$$\times\Big(\psi p_j(x) + \varphi p_i\,(y) - \varphi p_i(y_j)\Big)\Big|_{x=x_i} +$$

$$+\frac{\omega 2_j(y)}{\omega 2_j(A_{13})}\bigg|_{x=x_i}\times$$

$$\times\left(\eta m_{ij}(x) - \varphi p_i\left(y_j + \frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{(x_i - x_{i+1})}\right) + \varphi p_i\,(y)\right)\bigg|_{x=x_i} +$$

$$+\frac{\omega 1_i(x)}{\omega 1_i(A_{23})}\bigg|_{x=x_i}\cdot\left(\eta m_{ij}\left(x_{i+1} + \frac{(y-y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right) -\right.$$

$$\left.-\psi p_j\left(x_{i+1} + \frac{(y-y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right) + \psi p_j(x)\right)\bigg|_{x=x_i} =$$

$$=\left(1 - \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_i}\right)\cdot\Big(\psi p_j(x_i) + \varphi p_i\,(y) - \varphi p_i(y_j)\Big) +$$

$$+\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}\cdot\Big(\eta m_{ij}(x_i) - \varphi p_i\left(y_{j+1}\right) + \varphi p_i\,(y)\Big) =$$

$$=\left(1 - \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_i}\right)\cdot\varphi p_i\,(y) + \frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}\cdot\varphi p_i\,(y) = \varphi p_i\,(y)\,.$$

Итак, доказано, что $O\,f(x,y)\big|_{x=x_i} = \varphi p_i(y)$. Аналогично

$$Of(x,y)\big|_{y=y_j} = \frac{\omega 3_{ij}(x,y)}{\omega 3_{ij}(A_{12})}\bigg|_{y=y_j}\times$$

$$\times\left(\psi p_j(x)+\varphi p_i(y)-\varphi p_i(y_j)\right)\Big|_{y=y_j}+$$

$$+\frac{\omega 2_j(y)}{\omega 2_j(A_{13})}\Bigg|_{y=y_j}\cdot\Bigg(\eta m_{ij}(x)-$$

$$-\varphi p_i\left(y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{(x_i-x_{i+1})}\right)+\varphi p_i(y)\Bigg)\Bigg|_{y=y_j}+$$

$$+\frac{\omega 1_i(x)}{\omega 1_i(A_{23})}\Bigg|_{y=y_j}\cdot\Bigg(\eta m_{ij}\left(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right)-$$

$$-\psi p_j\left(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right)+\psi p_j(x)\Bigg)\Bigg|_{y=y_j}=$$

$$=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdot\left(\psi p_j(x)+\varphi p_i(y_j)-\varphi p_i(y_j)\right)+$$

$$+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\cdot\left(\eta m_{ij}(x_{i+1})-\psi p_j(x_{i+1})+\psi p_j(x)\right)=$$

$$=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdot\psi p_j(x)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\cdot\psi p_j(x)=\psi p_j(x).$$

Итак, доказано, что $Of(x,y)\big|_{y=y_J}=\psi p_j(x)$.

$$Of(x,y)\Big|_{y=y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}=$$

$$=\frac{\omega 3_{ij}(x,y)}{\omega 3_{ij}(A_{12})}\Bigg|_{y=y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}\times$$

$$\times\left(\psi p_j(x)+\varphi p_i(y)-\varphi\, p_i(y_j)\right)\Bigg|_{y=y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}+$$

$$+\frac{\omega 2_j(y)}{\omega 2_j(A_{13})}\Bigg|_{y=y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}\times$$

$$\times\Bigg(\eta m_{ij}(x)-\varphi p_i\left(y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{(x_i-x_{i+1})}\right)+$$

$$+\varphi p_i(y)\Bigg)\Bigg|_{y=y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}+\frac{\omega 1_i(x)}{\omega 1_i(A_{23})}\Bigg|_{y=y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}\times$$

$$\times\Bigg(\eta m_{ij}\left(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right)-$$

$$-\psi p_j\left(x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right)+\psi p_j(x)\Bigg)\Bigg|_{y=y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}=$$

$$=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdot\Bigg(\eta m_{ij}(x)-\varphi p_i\left(y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{(x_i-x_{i+1})}\right)+$$

$$+\varphi p_i\left(y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{(x_i-x_{i+1})}\right)\Bigg)+$$

$$+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\cdot\left(\eta m_{ij}(x)-\psi p_j(x)+\psi p_j(x)\right)=$$

$$=\eta m_{ij}(x)\cdot\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)=\eta m_{ij}(x),$$

т.е. $Of(x,y)\big|_{\Gamma_k}=f(x,y)\big|_{\Gamma_k}$, $k=\overline{1,3}$, где Γ_k – стороны треугольника.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если $f(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно внутри треугольного элемента T_{ij}, то для остатка $Rf=(I-O)f$ справедливо равенство

$$Rf(x,y)=\frac{\omega 3_{ij}(x,y)}{\omega 3_{ij}(A_{12})}\int_{x_i}^{x}\int_{y_j}^{y}f^{(1,1)}(u,v)dudv+$$

$$+\frac{\omega 2_j(y)}{\omega 2_j(A_{13})}\int_{x_i}^{x}\int_{y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}^{y}f^{(1,1)}(u,v)dudv+\qquad(1)$$

$$+\frac{\omega 1_i(x)}{\omega 1_i(A_{23})}\int_{x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}}^{x}\int_{y_j}^{y}f^{(1,1)}(u,v)dudv,\ (x,y)\in\mathrm{T}_{ij}.$$

Доказательство. Вычислим каждый из трех интегралов. В результате получим

$$\int_{x_i}^{x}\int_{y_j}^{y}f^{(1,1)}(u,v)dudv=\int_{x_i}^{x}\left(f^{(1,0)}(u,y)-f^{(1,0)}(u,y_j)\right)du=$$

$$=f(x,y)-f(x_i,y)-f(x,y_j)+f(x_i,y_j)=$$

$$=f(x,y)-\varphi p_i(y)-\psi p_j(x)+\varphi p_i(y_j);$$

$$\int_{x_i}^{x}\int_{y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}}^{y}f^{(1,1)}(u,v)dudv=$$

$$=\int_{x_i}^{x}\left(f^{(1,0)}(u,y)-f^{(1,0)}\left(u,y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}\right)\right)du=$$

$$=f(x,y)-f\left(x,y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}\right)-$$

$$-f(x_i,y)+f\left(x_i,y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}\right)=$$

$$=f(x,y)-\eta m_{ij}(x)-\varphi p_i(y)+$$

$$+\varphi p_i\left(y_j+\frac{(x-x_{i+1})(y_{j+1}-y_j)}{x_i-x_{i+1}}\right);$$

$$\int_{x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}}^{x}\int_{y_j}^{y}f^{(1,1)}(u,v)dudv=$$

$$=\int_{x_{i+1}+\frac{(y-y_j)(x_i-x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}}^{x}\left(f^{(1,0)}(u,y)-f^{(1,0)}(u,y_j)\right)=$$

$$= f(x,y) - f\left(x_{i+1} + \frac{(y-y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}, y\right) -$$

$$- f(x, y_j) + f\left(x_{i+1} + \frac{(y-y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}, y_j\right) =$$

$$= f(x,y) - \eta m_{ij}\left(x_{i+1} + \frac{(y-y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right) -$$

$$- \psi p_j(x) + \psi p_j\left(x_{i+1} + \frac{(y-y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1}-y_j)}\right).$$

После подстановки результатов интегрирования в выражение для погрешности получим тождество

$$f(x,y) - Of(x,y) \equiv f(x,y) - Of(x,y).$$

Теорема 2 доказана.

В случае, когда область треангулирована, остаток инетрлинации в каждом из треугольников не равняется произведению остатков одномерной интерполяции в отличие от случая разбиения области на прямоугольные элементы. Поэтому для оценки погрешности целесообразна лемма.

Лемма [6, с. 202]. Пусть $\xi, x \in R^n$, $\mathrm{T}_i \subset \mathrm{T} \subset R^n$, $i = \overline{1, M}$, $\mathrm{mes}(\mathrm{T}_i \cap \mathrm{T}_j = 0)$.

$$K(x,\xi) = \begin{cases} K_i(x,\xi), & \xi \in \mathrm{T}_i, \ i = \overline{1,M} \\ 0, & \xi \in \mathrm{T} \setminus \bigcup_i \mathrm{T}_i \end{cases},$$

$$1 \le p, q \le \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \ \ g \in L_p(\mathrm{T}),$$

$$\left(\int_{\mathrm{T}_i} |K_i(x,\xi)|^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}} \in L_q(\mathrm{T}).$$

Если

$$\left(\int_{\mathrm{T}_i} |K_i(x,\xi)|^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}} = \lambda(x), \ i = \overline{1,M},$$

$$\sum_{i=1}^{M}\left(\int_{\mathrm{T}_i} |g(\xi)|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathrm{T}} |g(\xi)|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}},$$

то получим неравенство

$$\left(\int_{\mathrm{T}}\left|\int_{\mathrm{T}} g(\xi) K(x,\xi) d\xi\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le \|g\|_{L_p(\mathrm{T})} \|\lambda(x)\|_{L_q(\mathrm{T})}.$$

Оценим погрешность, общий вид которой получен в теореме 2.

Теорема 3. Пусть $f(x,y) \in L_\infty^{1,1}(\mathrm{T}_{ij})$, $\forall (x,y) \in \mathrm{T}_{ij}$. Тогда справедлива такая оценка погрешности:

$$|Rf(x,y)| \le \left\|f^{(1,1)}(x,y)\right\|_{L_\infty(\mathrm{T}_{ij})} \cdot \left|\left(x - x_i\right)\left(y - y_j\right) \times \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}\right)\right|, \ \forall (x,y) \in \mathrm{T}_{ij}, \qquad (2)$$

где $L_\infty(\mathrm{T}_{ij}) = \lim_{p\to\infty} L_p(\mathrm{T}_{ij}) = \sup vrai |f(x,y)|$ – существенная верхняя грань функции $|f(x,y)|$ на T_{ij}, т.е. наименьшее из чисел $K \ge 0$, для которых неравенство $|f(x,y)| > K$ выполняется на множестве меры ноль.

Доказательство. Запишем погрешность (1) в следующем виде:

$$Rf(x,y) = \iint_{\mathrm{T}_{ij}} f^{(1,1)}(u,v) \cdot K(x,y,u,v) du dv,$$

где

$$K(x,y;u,v) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \dfrac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} := K_1(x,y;u,v), \ (u,v) \in \mathrm{T}_1 = \\ \qquad = \{u \in (x_i, x), \ v \in (y_j, y)\}, \\ -\dfrac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} := K_2(x,y;u,v), \ (u,v) \in \mathrm{T}_2 = \\ \qquad = \left\{u \in (x_i, x); \ y_j + \dfrac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}} < v < y\right\} \\ -\dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} := K_3(x,y;u,v), \ (u,v) \in \mathrm{T}_3 = \\ \qquad = \left\{x_{i+1} + \dfrac{(y - y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1} - y_j)} < u < x, \ v \in (y_j, y)\right\} \end{cases}.$$

$$\iint_{\mathrm{T}_1} |K_1(x,y;u,v)| du dv = \int_{x_i}^{x}\int_{y_j}^{y}\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}\right) du dv =$$

$$= \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}\right)\left(x - x_i\right)\left(y - y_j\right);$$

$$\iint_{\mathrm{T}_2} |K_2(x,y;u,v)| du dv =$$

$$= \int_{x_i}^{x} \int_{y}^{y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}}} \left|-\frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}\right| du dv =$$

$$= \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \cdot \left(x - x_i\right)\left(y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}} - y\right) =$$

$$= (y - y_j) \cdot \left(x - x_i\right)\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}\right);$$

$$\iint_{\mathrm{T}_3} |K_3(x,y;u,v)| du dv =$$

$$= \int_{x}^{x_{i+1} + \frac{(y - y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1} - y_j)}} \int_{y_j}^{y} \left|-\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right| du dv =$$

$$= \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot \left(x_{i+1} + \frac{(y - y_j)(x_i - x_{i+1})}{(y_{j+1} - y_j)} - x \right)(y - y_j) =$$

$$= \left(x - x_i\right)\left(y - y_j\right) \cdot \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right);$$

Таким образом, применив лемму, получим

$$\left|Rf(x,y)\right| \le \left\| f^{(1,1)}(x,y) \right\|_{L_\infty(\mathrm{T}_{ij})} \cdot \left| (x - x_i)(y - y_j) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right) \right|, \ (x,y) \in \mathrm{T}_{ij} \, (p = \infty, \ p' = 1).$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Если выполняются условия теорем 2 и 3, то функция

$$f(x,y) = (x - x_i)(y - y_j)\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right)$$

преобразует неравенство (2) в равенство.

Доказательство. Найдем $f^{(1,1)}(x,y)$.

$$f^{(1,0)}(x,y) = (y - y_j)\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right) +$$

$$+ \frac{(x - x_i)(y - y_j)}{(x_i - x_{i+1})};$$

$$f^{(1,1)}(x,y) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} +$$

$$+ \frac{x - x_i}{(x_i - x_{i+1})} = -2\frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + \frac{2x - (x_i + x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} =$$

$$= 1 - 2\frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} - 2\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

Согласно определению пространства $L_\infty(\mathrm{T}_{ij})$, имеем

$$\left\| \left[(x - x_i)(y - y_j)\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} - \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right) \right]^{(1,1)} \right\|_{L_\infty(\mathrm{T}_{ij})} = 1,$$

$$f(x,y)\big|_{\partial \mathrm{T}_{ij}} = 0.$$

После подстановки полученного результата в формулу (2) получим равенство в этой формуле.

Теорема 4 доказана.

Пример 1. Пусть $\mathrm{T} = \{x, y > 0, 1 - x - y > 0\}$ – область определения $f(x,y)$. Функция непрерывно дифференцируема внутри заданного треугольника T. Тогда, по теореме 1, оператор полиномиальной интерлинации будет иметь вид

$$Of(x,y) = (1 - x - y)\left(\psi p(x) + \varphi p(y) - \varphi p(0)\right) + y\left(\eta m(x) - \right.$$

$$\left. - \varphi p\left(1 - x\right) + \varphi p(y)\right) + x\left(\eta m\left(1 - y\right) - \psi p\left(1 - y\right) + \psi p(x)\right).$$

Для остатка $R_0 f(x,y) = (I - L_0)f$, по теореме 2, справедливо равенство

$$R_0 f(x,y) = (1 - x - y)\int_0^x \int_0^y f^{(1,1)}(u,v)\,dudv +$$

$$+ y\int_0^x \int_{1-x}^y f^{(1,1)}(u,v)\,dudv + x\int_{1-y}^x \int_0^y f^{(1,1)}(u,v)\,dudv.$$

А оценка погрешности, по теореме 3, имеет вид $\left|R_0 f(x,y)\right| \le \left|xy(1 - x - y)\right|$, $\forall (x,y) \in \mathrm{T}$, $\forall f(x,y) \in L_\infty^{1,1}(\mathrm{T})$.

Величина $\left|xy(1 - x - y)\right|$ всегда положительна, поэтому можно оценить ее сверху с помощью нахождения наибольшего значения функции $f(x,y)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1 - x - y) - xy = 0 \\ x(1 - x - y) - xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - 2xy - x^2 = 0 \end{cases}.$$

Решив эту систему, получим четыре стационарные точки: $\left(0,0\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $(0,1)$, $(1,0)$. После подстановки этих точек в функцию $f(x,y) = xy(1 - x - y)$, найдем наибольшее значение этой функции, равное $\frac{1}{27}$, в точке $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Поэтому $\left|R_0 f(x,y)\right| \le \left|xy(1 - x - y)\right| \le \frac{1}{27}$.

Пример 2. Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2 \cup \mathrm{T}_3 \cup \mathrm{T}_4$, представленной на рис. 2.

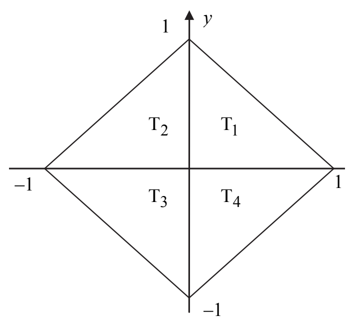

Рис 2. Область определения приближаемой функции $f(x,y)$

$$\mathrm{T}_1 = \{x, y > 0, 1 - x - y > 0\},\ \mathrm{T}_2 = \{x < 0, y > 0, 1 + x - y > 0\},$$

$$\mathrm{T}_3 = \{x, y < 0, 1 + x + y > 0\},\ \mathrm{T}_4 = \{x > 0, y < 0, 1 - x + y > 0\}.$$

Пусть функция $f(x,y)$ имеет разрывы первого рода на линиях треангуляции, и на этих линиях имеет следующие следы:

$$\varphi p(y) = f(+0,y) = y, \quad \varphi m(y) = f(-0,y) = -y,$$

$$\psi p(x) = f(x,+0) = 2x, \quad \psi m(x) = f(x,-0) = x,$$

$$\eta m_1(x) = f(x, 1 - x - 0) = 1 + x,$$

$$\eta m_2(x) = f(x, 1 + x - 0) = -1 + x,$$

$$\eta m_3(x) = f(x, -1 - x - 0) = 1 + 2x,$$

$$\eta m_4(x) = f(x, -1 + x - 0) = -1 + 2x.$$

Эти следы удовлетворяют условиям теоремы 1 в каждом из четырех треугольников.

Разрывный сплайн-интерлинант построим в виде

$$S(x,y)=\begin{cases} O_1 f(x,y), & (x,y)\in T_1\\ O_2 f(x,y), & (x,y)\in T_2\\ O_3 f(x,y), & (x,y)\in T_3\\ O_4 f(x,y), & (x,y)\in T_4\end{cases}, \qquad (3)$$

где

$$O_1 f(x,y)=(1-x-y)\big(\psi p(x)+\varphi p(y)-\varphi p(0)\big)+$$
$$+y\big(\eta m_1(x)-\varphi p(1-x)+\varphi p(y)\big)+$$
$$+x\big(\eta m_1(1-y)-\psi p(1-y)+\psi p(x)\big),$$

$$O_2 f(x,y)=(1+x-y)\big(\psi p(x)+\varphi m(y)-\varphi m(0)\big)+$$
$$+y\big(\eta m_2(x)-\varphi m(1+x)+\varphi m(y)\big)-$$
$$-x\big(\eta m_2(-1+y)-\psi p(-1+y)+\psi p(x)\big),$$

$$O_3 f(x,y)=(1+x+y)\big(\psi m(x)+\varphi m(y)-\varphi m(0)\big)-$$
$$-y\big(\eta m_3(x)-\varphi m(-1-x)+\varphi m(y)\big)-$$
$$-x\big(\eta m_3(-1-y)-\psi m(-1-y)+\psi m(x)\big),$$

$$O_4 f(x,y)=(1-x+y)\big(\psi m(x)+\varphi p(y)-\varphi p(0)\big)-$$
$$-y\big(\eta m_4(x)-\varphi p(-1+x)+\varphi p(y)\big)+$$
$$+x\big(\eta m_4(1+y)-\psi m(1+y)+\psi m(x)\big).$$

Подставим в определенный разрывный сплайн значения следов функции $f(x,y)$ на соответствующих линиях. В результате получим:

$$S(x,y)=\begin{cases} (1-x-y)(2x+y)+y(1+x-1+x+y)+\\ \quad +x(1+1-y-2+2y+2x), \quad (x,y)\in T_1\\ (1+x-y)(2x-y)+y(-1+x+1+x-y)-\\ \quad -x(-1-1+y+2x-2y), \quad (x,y)\in T_2\\ (1+x+y)(x-y)-y(1+2x-1-x-y)-\\ \quad -x(1-2-2y+1+y+x), \quad (x,y)\in T_3\\ (1-x+y)(x+y)-y(-1+2x+1-x)+\\ \quad +x(-1+2+2y-1-y+x), \quad (x,y)\in T_4\end{cases} =$$

$$=\begin{cases} 2x+y, & (x,y)\in T_1\\ 2x-y, & (x,y)\in T_2\\ x-y, & (x,y)\in T_3\\ x+y, & (x,y)\in T_4\end{cases}.$$

Как видим из формулы (3), функция $S(x,y)$ на границе между элементами T_1 и T_4 будет иметь следующие следы:

$$S(+0,y)=(1-y)\big(\psi p(0)+\varphi p(y)-\varphi p(0)\big)+$$
$$+y\big(\eta m_1(0)-\varphi p(1)+\varphi p(y)\big),\ (x,y)\in T_1,$$
$$S(-0,y)=(1-y)\big(\psi p(0)+\varphi m(y)-\varphi m(0)\big)+$$
$$+y\big(\eta m_2(0)-\varphi m(1)+\varphi m(y)\big),\ (x,y)\in T_2,$$

т.е., если $\varphi p(0)\neq\varphi m(0)$, $\varphi p(1)\neq\varphi m(1)$, то функция $f(x,y)$ будет разрывной на линии $x=0$.

Заключение. Итак, в статье предложен метод построения разрывных полиномиальных сплайн-интерлинантов, как частный случай включающих в себя разрывные сплайны для случая, когда область исследуемой функции треангулирована. Сформулированы и доказаны теоремы об интерлинационных свойствах таких разрывных конструкций. Определен общий вид погрешности приближения построенными сплайн-интерлинантами и ее оценка в каждом элементе разбиения.

●