УДК 519.2/339.9

Ю.А. Зак

Математические модели и алгоритмы оптимального распределения грузопотоков доставки товаров в сети объединенных в концерн супермаркетов и специализированных магазинов

Предложены математические модели оптимальной доставки товаров в сети объединенных в концерн или компанию супермаркетов, универсамов или специализированных магазинов.

Mathematical model of the optimal delivery of the goods in the network united in the same group or company, supermarkets, department stores or specialty shops.

Запропоновано математичні моделі оптимальної доставки товарів у мережу об'єднаних у концерн або компанію супермаркетів, універсамів або спеціалізованих магазинів.

Введение. Организация доставки товаров в сети объединенных в концерн или компанию супермаркетов, универсамов или специализированных магазинов связана с большими финансовыми затратами, привлечением значительных объемов материальных и трудовых ресурсов, требует четкой координации усилий всех звеньев управленческого аппарата и современной системы менеджмента. Такие концерны внутри страны или крупного региона могут объединять от нескольких сотен до тысячи магазинов, расположенных на значительных расстояниях друг от друга, несколько десятков крупных региональных складов, через которые происходит снабжение магазинов данного региона. Ассортимент продаваемых в магазинах товаров может достигать сотен и даже нескольких тысяч наименований. Договоры на поставки товаров заключаются с поставщиками и производителями продукции, расположенными в различных регионах страны или даже за ее пределами. Количество таких поставщиков также может достигать нескольких тысяч.

Доставка товаров по звеньям сети может осуществляться как автомобильным, так авиационным и железнодорожным транспортом. Функции затрат в зависимости от объемов перевозок по каждой из представленной дуге сети различны и зависят от расстояний, видов используемого транспорта, состояния сети дорог, особенностей местности и региона. Хранение, прием и отгрузка товаров со складов связаны также с определенными затратами, которые в зависимости от технической оснащенности складских помещений, организации работ и квалификации обслуживающего персонала в различных регионах страны существенно отличаются друг от друга. Кроме того, на возможные объемы хранения и распределения товаров по торговым центрам также накладываются определенные ограничения.

Рассматриваемая трехуровневая сеть поставки товаров состоит из очень большого количества узлов и дуг. Следовательно, задача распределения грузовых потоков в сети содержит сотни тысяч переменных. Эффективное решение сформулированной проблемы может принести значительный экономический эффект, исчисляемый десятками и даже сотнями миллионов рублей в год. Изменяющиеся во времени фактические потребности потребителей, изменения в номенклатуре поставляемых товаров, предложения поставщиков и связанные с этим изменения в необходимых объемах перевозок требуют оперативного решения сформулированной задачи, что накладывает дополнительные ограничения на эффективность используемых алгоритмов.

С учетом всех ограничений рассматриваемая задача может быть сформулирована как *NP*-полная задача нелинейного целочисленного программирования очень большой размерности, точные методы решения которой связаны с большим объемом вычислений. Автору известно лишь незначительное количество публика-

Ключевые слова: распределение грузопотоков в сети, целочисленное нелинейное программирование, декомпозиция, метод ветвей и границ.

ций по вопросам построения математических моделей и алгоритмов решения задач оптимального распределения грузовых потоков в сетях, учитывающие реальные ограничения, связанные с поставкой и хранением товаров. Предлагаются приближенные методы и эвристические алгоритмы решения задачи, основанные на распределении потоков в сети [1–3]. К недостаткам этих методов можно отнести отсутствие оценок, насколько полученное приближенное решение задачи на каждом шаге отличается от нижней границы оптимального решения, что затрудняет выбор момента остановки итеративного процесса. Кроме того, предлагаемые методы обладают некоторыми недостатками, связанными с организацией параллельных вычислений.

В статье предлагаются несколько математических моделей рассматриваемой проблемы, изучаются специфические свойства задачи, позволяющие вычислить точные и грубые оценки значения критерия оптимальности на различных этапах решения, осуществить процесс декомпозиции и представить процесс решения задачи в виде некоторого итеративного процесса решения двух задач меньшего размера и более простой структуры. Каждая из этих задач решается разработанной автором некоторой модификацией метода «ветвей и границ», учитывающей конкретные специфические особенности общей проблемы.

Постановка и математическая модель задачи

Рассматривается задача оптимального распределения грузовых потоков в 3-х уровневой сети, включающей следующие виды узлов:

• производители и оптовые поставщики различных видов товаров (ПТ);

• региональные склады (РС), куда поступают товары от поставщиков и с которых производится поставка товаров в торговые центры;

• торговые центры (ТЦ).

Введем следующие обозначения:

$k \in \widetilde{K} = \{1,2,...,,k,...,K\}$ – множество ПТ; $i \in \widetilde{I} = \{1,2,...,i,...,N\}$ – множество различных видов товаров, продаваемых торговым концерном; $\widetilde{J}_k$ – подмножество видов товаров, производимых и (или) поставляемых k-м ПТ; $s \in \tilde{S} = \{1, 2,..., s,..., S\}$ – множество РС; $t \in \tilde{T} = \{1, 2,...,T\}$ – множество ТЦ; b_i^t, $i \in \widetilde{I}$, $t \in \widetilde{T}$, – количество i-го вида товара, которое необходимо поставить t-му ТЦ.

Как правило, поставки товаров от ПТ в РС и из РС в ТЦ осуществляются партиями, минимальные размеры которых соответственно равны g_{iks} и g_{is}^t.

Объемы принимаемых и обрабатываемых грузов каждым РС ограничены некоторыми предельными значениями Q_s, $s \in \widetilde{S}$. Следовательно, справедливы ограничения

$$\sum_{k \in \tilde{K}} \sum_{i \in \tilde{J}_k} \beta_{ik} D_{iks} \le Q_s, \quad \sum_{t \in \tilde{T}} \sum_{i \in \tilde{I}} \beta_{ik} D_{is}^t \le Q_s \quad s \in \widetilde{S}, \qquad (1)$$

где β_{ik} – переводной коэффициент, с помощью которого необходимые площади или объемы работ для хранения и выполнения погрузочно-разгрузочных операций с товарами различных видов переводятся в одни те же единицы измерения; D_{iks}, D_{is}^t – соответственно суммарные поставки i-го вида товара от k-го ПТ в s-й РС и из s-го РС в t-й ТЦ.

Возможности поставщиков по каждому виду товаров также могут быть ограничены некоторыми предельными значениями H_{ik}, т.е.

$$\sum_{s \in \widetilde{S}} D_{iks} \le H_{ik}, \ i \in \widetilde{I}, \ k \in \widetilde{K}. \qquad (2)$$

Вычислим суммарные количества каждого вида товаров, которые должны быть поставлены различными поставщиками ТЦ концерна

$$B_i = \sum_{t \in \widetilde{T}} b_i^t, \ i \in \widetilde{I}. \qquad (3)$$

Условиями задачи могут накладываться дополнительные ограничения, что все поставки товаров в каждый ТЦ t должны осуществляться только из единственного РС s.

Пусть заданы некоторые функции определения затрат по перевозке товаров (в зависимости от объемов поставок товаров (величины b)) по каждой из дуг (k,s), (s,t) транспортной сети или хранения и обслуживания потоков грузов на каждом из РС, которые могут иметь вид

$$f_1(b)=\begin{cases} d_0+\alpha b, if\ b>0,\\ 0, \mathrm{const}, \end{cases}$$

$$f_2(b)=\begin{cases} d_0+\varphi(b), if\ b>0,\\ 0, \mathrm{const}, \end{cases} \tag{4}$$

$$f_3(b)=\begin{cases} 0, if\ b=0,\\ d_1+\alpha_1 b, if\ 0<b\le \overline{b}_1,\\ \ldots\ldots\\ d_R+\alpha_R b, if\ \overline{b}_{R-1}<b\le \overline{b}_R, \end{cases}$$

$$f_4(b)=\begin{cases} 0, if\ b=0,\\ d_1+\varphi_1(b), if\ 0<b\le \overline{b}_1,\\ \ldots\ldots\\ d_R+\varphi_R(b), if\ \overline{b}_{R-1}<b\le \overline{b}_R. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $\varphi(b)$, $\varphi_r(b)$, $r=1,...,R$, – некоторые неубывающие функции своих аргументов.

Следовательно, могут быть определены следующие величины:

– стоимости перевозки различных объемов грузов $D_{ks}=\sum_{i\in\widetilde{J}_k} D_{iks}$ из k-го ПТ в s-й РС и объемов грузов $D_s^t=\sum_{i\in\widetilde{J}} D_{is}^t$ из s-го РС в t-й ТЦ

$$c_{ks}=\begin{cases} f_{ij}(D_{ks}), if\ D_{ks}\le Q_s,\\ \infty,, if\ D_{ks}>Q_s, \end{cases},\ i\in\widetilde{I}, s\in\widetilde{S};$$

$$c_s^t=f_s^t(D_s^t),\ s\in\widetilde{S},\ t\in\widetilde{T}; \tag{6}$$

– стоимости затрат на хранение и обслуживание потоков грузов на каждом из РС

$$\overline{c}_s=\left\{ f_s\left[\max\left(\sum_{k\in\tilde{K}} D_{ks}, \sum_{t\in\tilde{T}} D_s^t\right)\right]: \max\left(\sum_{k\in\tilde{K}} D_{ks}, \sum_{t\in\tilde{T}} D_s^t\right)\le Q_s\right\},\quad s\in\tilde{S}. \tag{7}$$

Введем следующие целочисленные переменные x_{iks} и y_{is}^t.

– переменная $x_{iks}\ge 0$ определяет количество партий товара i-го вида в объеме g_{iks}, поставляемого из k-го ПТ в s-й РС,

– переменная $y_{is}^t\ge 0$ определяет количество партий товара i-го вида в объеме g_{is}^t, которое поставляется из s-го РС в t-й ТЦ.

На выбор значений целочисленных переменных накладываются следующие ограничения:

– суммарные объемы поставок каждого вида товаров на каждый РС от различных ПТ не должны быть меньше чем объемы доставки этого вида товаров различным ТЦ

$$\sum_{k\in\widetilde{K}} g_{iks}x_{iks}\ge \sum_{t\in\widetilde{T}} g_{is}^t y_{is}^t,\ i\in\widetilde{I},\ s\in\widetilde{S}, \tag{8}$$

и не должны превышать значений возможности поставщиков

$$\sum_{s\in\widetilde{S}}\sum_{k\in\widetilde{K}} g_{iks}x_{iks}\le H_{ik},\ i\in\widetilde{I},\ k\in\widetilde{K}; \tag{9}$$

– объемы принимаемых и (или) обрабатываемых грузов каждым РС не должны превышать их предельных значений Q_s, $s\in\widetilde{S}$,

$$\max\left[\sum_{k\in\widetilde{K}}\sum_{i\in\widetilde{J}_k}\beta_{ik}g_{iks}x_{iks}, \sum_{t\in\widetilde{T}}\sum_{i\in\widetilde{I}}\beta_i g_{is}^t y_{is}^t\right]\le Q_s,\quad s\in\widetilde{S}; \tag{10}$$

– объемы поставок каждого i-го вида товаров в каждый ТЦ не должен быть меньше установленного заказами количества b_i^t

$$\sum_{s\in\widetilde{S}} g_{is}^t y_{is}^t\ge b_i^t,\ i\in\widetilde{I},\ t\in\overline{T}. \tag{11}$$

Введем вспомогательные переменные

$$z_{iks}=\begin{cases} 1, if\ x_{iks}>0,\\ 0, if\ x_{iks}=0, \end{cases}\quad z_{is}^t=\begin{cases} 1, if\ y_{is}^t>0,\\ 0, if\ y_{is}^t=0. \end{cases} \tag{12}$$

Если предусмотрены ограничения, что каждый ТЦ должен получать все товары только от одного РС, а каждый ПТ должен поставлять свои товары только в один РС, то эти ограничения могут быть записаны в виде нелинейных неравенств на целочисленные переменные y_{is}^t и x_{iks} и булевы переменные z_{is}^t и z_{iks} следующего вида

$$\prod_{s\in\widetilde{S}} z_{iks}=1,\ i\in\widetilde{I},\ k\in\widetilde{K};$$

$$\prod_{i\in\widetilde{J}_k} z_{iks}=1,\ k\in\widetilde{K},\ s\in\widetilde{S}. \tag{13}$$

$$\prod_{s\in\widetilde{S}} z_{is}^t=1,\ i\in\widetilde{I},\ t\in\widetilde{T};$$

$$\prod_{i\in\widetilde{I}} z_{is}^t=1,\ s\in\widetilde{S},\ t\in\widetilde{T}. \tag{14}$$

В качестве критерия оптимальности выбирается функционал минимизации суммарных затрат на перевозку товара по всем дугам транспортной сети и обслуживание региональных складов.

$$F = \sum_{k\in\tilde{K}}\sum_{i\in\tilde{J}_k}\sum_{s\in\tilde{S}} f_{iks}(\lambda_{is}g_{iks}x_{iks}) + \\ + \sum_{s\in\tilde{S}} f_s\left\{\max[\sum_{k\in\tilde{K}}\sum_{i\in\tilde{J}_k} g_{iks}x_{iks}; \sum_{t\in\tilde{T}}\sum_{i\in\tilde{I}} g^t_{is}y^t_{is}]\right\} + \\ + \sum_{t\in\tilde{T}}\sum_{s\in\tilde{S}} f^t_s\left(\sum_{i\in\tilde{I}}\lambda_{is}g^t_{is}y^t_{is}\right). \quad (15)$$

Здесь и в дальнейшем λ_{is} – некоторый коэффициент, учитывающий различные удельные стоимости перевозки продуктов.

Следовательно, сформулированная задача оптимального распределения транспортных потоков сводится к решению задачи нелинейного целочисленного программирования очень большого размера.

Методы декомпозиции и приближенные методы решения общей проблемы

Решение описанной выше задачи может быть представлено в виде последовательного решения нескольких частных задач существенно меньшей размерности и более простой структуры. Рассмотрим следующие частные критерии оптимальности:

– минимизация суммарных затрат на поставки товаров в РС от различных ПТ

$$E_1 = \sum_{k\in\tilde{K}}\sum_{i\in\tilde{J}_k}\sum_{s\in\tilde{S}} f_{iks}(\lambda_{is}g_{iks}x_{iks}) \to \min; \quad (16)$$

– минимизация суммарных затрат на поставки товаров из РС в различные ТЦ

$$E_2 = \sum_{s\in\tilde{S}} f_s\left(\sum_{t\in\tilde{T}}\sum_{i\in\tilde{I}} g^t_{is}y^t_{is}\right) \to \min; \quad (17)$$

– минимизация двух составляющих суммарных затрат на поставки товаров в РС от различных ПТ и на содержание РС

$$E_3 = \sum_{k\in\tilde{K}}\sum_{i\in\tilde{J}_k}\sum_{s\in\tilde{S}} f_{iks}(\lambda_{is}g_{iks}x_{iks}) + \\ + \sum_{s\in\tilde{S}} f_s\left\{\sum_{k\in\tilde{K}}\sum_{i\in\tilde{J}_k} g_{iks}x_{iks}\right\} \to \min; \quad (18)$$

– минимизация двух составляющих суммарных затрат на поставки товаров из РС в различные ТЦ и на содержание РС

$$E_4 = \sum_{s\in\tilde{S}} f_s\left(\sum_{t\in\tilde{T}}\sum_{i\in\tilde{I}} g^t_{is}y^t_{is}\right) + \\ + \sum_{t\in\tilde{T}}\sum_{s\in\tilde{S}} f^t_s\left(\sum_{i\in\tilde{I}}\lambda_{is}g^t_{is}y^t_{is}\right) \to \min. \quad (19)$$

Сформулируем следующие задачи.

Задача 1. Определить (16) в условиях ограничений на целочисленные переменные x_{iks} (9), (12), (13), а также ограничений вида

$$\sum_{k\in\tilde{K}} g_{iks}x_{iks} \ge \sum_{t\in\tilde{T}} D^t_i,\ i\in\tilde{I}, \quad (20)$$

$$\sum_{k\in\tilde{K}}\sum_{i\in\tilde{J}_k} \beta_{ik}g_{iks}x_{iks} \le Q_s,\ s\in\tilde{S}. \quad (21)$$

Задача 2. Минимизировать (17) в условиях ограничений на целочисленные переменные y^t_{is} (12), (14), а также ограничений вида

$$\sum_{t\in\tilde{T}} g^t_{is}y^t_{is} \ge D^t_i,\ i\in\tilde{I},\ t\in\overline{T}; \quad (22)$$

$$\sum_{t\in\tilde{T}}\sum_{i\in\tilde{I}} \beta_i g^t_{is}y^t_{is} \le Q_s,\ s\in\overline{S}. \quad (23)$$

В результате решения задачи 1 будут определены объемы поставок различных видов товаров от каждого поставщика в каждый из РС (т.е. значения целочисленных переменных x_{iks}) и, следовательно, рассчитаны объемы поставок всех видов товаров на каждый из РС

$$G^1_{is} = \sum_{k\in\tilde{J}_k} \beta_i g_{iks}x_{iks},\ i\in\tilde{I},\ s\in\tilde{S}, \quad (24)$$

причем $\sum_{i\in\tilde{I}} G^1_{is} \le Q_s,\ s\in\tilde{S}$.

Следовательно, может быть решена и сформулирована задача 2-го этапа вида.

Задача 3. Минимизировать критерий оптимальности (19) в условиях ограничений на целочисленные переменные y^t_{is} (12), (14), (23), а также ограничений на поставки различного вида товаров с каждого РС вида

$$\sum_{t\in\tilde{T}} \beta_i g^t_{is}y^t_{is} \le G^1_{is},\ i\in\tilde{I},\ s\in\overline{S}, \quad (25)$$

где значения G^1_{is} определяются согласно (24).

В результате решения задачи 2 будут определены объемы поставок различных видов товаров с каждого РС в различные торговые центры (т.е. значения целочисленных переменных y^t_{is}) и, следовательно, рассчитаны требуемые объемы поставок всех видов товаров в каждый из РС для обеспечения этой возможности поставок.

$$G_{is}^2 = \sum_{t \in \widetilde{T}} g_{is}^t y_{is}^t \,,\ i \in \widetilde{I} \,,\ s \in \overline{S} \,, \tag{26}$$

причем $\sum_{i \in \widetilde{I}} G_{is}^2 \le Q_s \,,\ s \in \widetilde{S}$.

Следовательно, может быть решена и сформулирована другая задача 2-го этапа вида.

Задача 4. Минимизировать функционал (18) в условиях ограничений на целочисленные переменные x_{iks} (9), (12), 13), а также ограничения, связанные с объемами поставок различных видов товаров на каждый РС вида

$$\sum_{k \in \widetilde{I}_k} g_{iks} x_{iks} \ge G_{is}^2 ,\ i \in \overline{I} \,,\ s \in \widetilde{S} \,, \tag{27}$$

где значения G_{is}^2 определяются по формулам (26).

Последовательное решение задач 1, 4 и (или) задач 2, 3 обеспечит получение допустимых и достаточно эффективных приближенных решений общей задачи. Пусть E_1^1 и E_1^2 – соответственно значения критериев оптимальности в решении задач 1 и 4, а E_2^1 и E_2^2 – задач 2 и 3. Если $E_1^1 + E_2^2 \le E_2^1 + E_1^2$, то в качестве приближенного решения общей проблемы выбирается решение пары задач 1, 4. Если $E_1^1 + E_2^2 > E_2^1 + {}$ ${}+E_1^2$, то в качестве приближенного решения общей проблемы выбирается решение пары задач 2, 3.

Свойства допустимых и оптимальных решений задачи

Пусть $\psi(b) = \begin{cases} 0, if\ b \le 0, \\ a_1 + \gamma b, if\ b > 0, \end{cases}$ – некоторая миноранта функции $f(b)$, т.е. $\psi(b) \le f(b)\ \ \forall\, b \in B$.

Обозначим P_{is} – выбранный на данном шаге объем товаров i-го вида, поставляемый в РС.

Положим $\hat{B}_i = B_i$, $\hat{Q}_s = Q_s$, $\hat{H}_{ik} = H_{ik}$, $\hat{D}_i^t = D_i^t$ и $\hat{K} = \tilde{K}$, $\hat{I} = \tilde{I}$, $\hat{S} = \tilde{S}$, $\hat{T} = \tilde{T}$, а также $\xi_1(E_l) = 0$, $l = 1,2,3$.

Для каждой пары индексов (k,i), где $k \in \hat{K}$, $i \in \hat{I}$ выполним алгоритмы $A1$, $A2$ и $A3$.

Алгоритм *A*1.

1. Найдем

$$\begin{aligned} \psi_{\overline{i}\overline{k}\overline{s}}(P_{\overline{i}\overline{s}}^*) = \min_{k \in \hat{K}} \{ \psi_{iks}(g_{iks} x_{iks}) \mid \hat{B}_i \le \\ \le g_{iks} x_{iks} \le \min(\hat{Q}_s, \hat{H}_{ik}) \},\quad i \in \hat{I}. \end{aligned} \tag{28}$$

$$\xi_1(E_1) = \xi_1(E_1) + \psi_{\overline{i}\overline{k}\overline{s}}(P_{\ddot{i}\ddot{s}}^*) \,. \tag{29}$$

а) Если $P_{\overline{i}\overline{s}}^* \ge \hat{B}_{\ddot{i}}$, то полагаем $\hat{I} = \hat{I} / \overline{i}$ и переходим к другой паре индексов.

Если $\hat{I} = \varnothing$, то алгоритм заканчивает работу. Если $\hat{I} = \varnothing$, то полагаем $\hat{B}_{\ddot{i}} = \hat{B}_{\ddot{i}} - P_{\overline{i}\overline{s}}^*$, выбираем следующую пару индексов из скорректированного подмножества индексов $i \in \hat{I}$, $k \in \hat{K}$.

б) Если $P_{\ddot{i}\ddot{s}}^* + g_{\ddot{i}\overline{k}\overline{s}} > H_{\ddot{i}\overline{k}}$, то полагаем $\hat{K} = \hat{K} / \overline{k}$. Если $\hat{K} = \varnothing$ и $\hat{I} \ne \varnothing$, то алгоритм заканчивает работу с сообщением, что задача не содержит допустимых решений. В противном случае для скорректированного подмножества индексов $i \in \hat{I}$, $k \in \hat{K}$ и значения $\hat{B}_{\overline{i}}$ выполняем п.1 алгоритма и вычисления (28), (29).

в) Если $P_{\ddot{i}\ddot{s}}^* + g_{\overline{i}\overline{k}\overline{s}} > Q_{\ddot{s}}$, то полагаем $\hat{B}_i = \hat{B}_{\overline{i}} - P_{\overline{i}\overline{s}}^*$, $\hat{H}_{\overline{i}\overline{k}} = \hat{H}_{\overline{i}\overline{k}} - P_{\overline{i}\overline{s}}^*$, $\hat{S} = \hat{S} / \overline{s}$. Если $\hat{S} = \varnothing$, а $\hat{I} \ne \varnothing$, то алгоритм заканчивает свою работу с сообщением, что задача не имеет допустимых решений, положив $\xi_1(E_1) = \infty$. В противном случае выполняем п.1 алгоритма и вычисления (28), (29).

В результате выполнения алгоритма $A1$ для каждой пары индексов $i \in \widetilde{I}$, $k \in \widetilde{K}$, значение $\xi(E_1)$ определит грубую нижнюю границу величины суммарных затрат на транспортировку товаров из ПТ в РС.

Для каждой пары индексов $(i,t) \in (\hat{I}, \hat{T})$, выполним следующий алгоритм $A2$.

Алгоритм *A*2.

В начале работы алгоритма полагаем $\xi_1(E_2) = {}$ ${}= 0$; $\hat{I} = \tilde{I}$, $\hat{T} = \tilde{T}$, $\hat{S} = \tilde{S}$; $P_{is}^t = 0$, $\hat{b}_i^t = b_i^t$, $(i,\, t) = {}$ ${}\in (\tilde{I}, \tilde{T})$; $\hat{Q}_s = Q_s , s \in \widetilde{S}$; $\xi_1(E_2) = 0$.

1. Найдем

$$\psi_{\overline{i}\overline{s}}^{\overline{t}}(P_{\overline{i}\overline{s}}^{\overline{t}\,*}) = \min_{s \in \hat{S}} \{ \psi_{is}^t (g_{is}^t y_{is}^t) \mid \hat{b}_i^t \le g_{is}^t y_{is}^t \le \hat{Q}_s \} ,$$
$$i \in \hat{I} \,,\ t \in \hat{T} \,. \tag{30}$$

Вычислим

$$\xi_1(E_2)=\xi_1(E_2)+\psi^{\bar t}_{\bar i\bar s}(P^{\bar t*}_{\bar i\bar s}+g^{\bar t}_{\bar i\bar s}y^{\bar t}_{\bar i\bar s})\,. \qquad (31)$$

а) Если $P^{\bar t*}_{\bar i\bar s}+g^{\bar t}_{\bar i\bar s}y^{\bar t}_{\bar i\bar s}\ge \hat b^{\bar t}_{\bar i}$, то полагаем $(\hat I,\hat T)=$ $=(\hat I/\bar i,\hat T/\bar t)$, и переходим к другой паре индексов. Если множество пар индексов $(\hat I,\hat T)=\varnothing$, то алгоритм заканчивает работу, и значение $\xi_1(E_2)$ – нижняя граница суммы минимальных затрат на поставку товаров из РС в ТЦ.

б) Если $P^{\bar t*}_{\bar i}+g^{\bar t}_{\bar i\bar s}y^{\bar t}_{\bar i\bar s}=\hat Q_{\bar s}$, то полагаем $\hat b^{\bar t}_{\bar i}=$ $=\hat b^{\bar t}_{\bar i}-P^{\bar t*}_{\bar i}$, $Q_{\bar s}=Q_{\bar s}-P^{\bar t*}_{\bar i\bar s}$, $\hat S=\hat S/\bar s$. Если $\hat S=\varnothing$, и при этом $(\hat I,\hat T)\ne\varnothing$, то алгоритм заканчивает работу с сообщением, что задача не содержит допустимых решений, положив $\xi_1(E_2)=\infty$. В противном случае переходим к п.1 и снова выполняем вычисления (30), (31) для следующей пары индексов.

Значение $\xi_1(E_2)$ определит грубую нижнюю границу величины суммарных затрат на транспортировку товаров из РС в ТЦ.

Для каждого индекса $s\in\hat S$ выполним алгоритм *А*3.

Алгоритм *А*3.

Положим $\hat S=\tilde S$, $\hat I=\tilde I$; $P_{is}=0$, $i\in\hat I$, $s\in\hat S$; $\xi_1(E_3)=0$.

1. Определим

$$\psi_{\bar i\bar s}(P_{\bar i\bar s})=\min_{s\in\hat S}\min_{i\in\hat I}\psi_{is}(\lambda_{is}*\min\{B_i,\hat Q_s\}),\ (32)$$

$$i\in\hat I,\ s\in\hat S\,.$$

$$\xi_1(E_3)=\xi_1(E_3)+\psi_{\bar i\bar s}(P_{\bar i\bar s})\,. \qquad (33)$$

а) Если $P_{\bar i\bar s}=B_{\bar i}$, то полагаем $\hat I=\hat I/\bar i$. Если $\hat I=\varnothing$, то алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае снова переходим к п.1.

б) Если $P_{\bar i\bar s}=Q_{\bar s}$, то полагаем $\hat S=\hat S/\bar s$, $Bi=$ $=B_{\bar i}-P_{\bar i\bar s}$. Если $\hat S=\varnothing$, а $\hat I\ne\varnothing$, то алгоритм заканчивает работу с сообщением, что задача не содержит допустимых решений, положив $\xi_1(E_3)=\infty$. Если $\hat S\ne\varnothing$ и $\hat I\ne\varnothing$, то снова переходим к п.1.

Значение $\xi_1(E_3)$ определит грубую нижнюю границу величины суммарных затрат на хранение, перегрузки и обслуживание товаров в РС.

Следовательно, значение

$$\xi_1(E)=\xi_1(E_1)+\xi_1(E_2)+\xi_1(E_3) \qquad (34)$$

определит грубую границу значения минимальных суммарных затрат на транспортировку, хранение и обслуживание на региональных складах товаров.

Вычисление более точной оценки нижней границы минимальных суммарных затрат связано с решением следующих ниже задач целочисленного линейного программирования.

Задача *B*1.

$$\xi_1(E_1)=\sum_{k\in\tilde K}\sum_{i\in\tilde J_k}f_{iks}(g_{iks}x_{iks})\to\min \qquad (35)$$

в условиях ограничений

$$\sum_{s\in\tilde S}g_{iks}x_{iks}\le H_{ik},\ i\in\tilde I,\ k\in\tilde K; \qquad (36)$$

$$\sum_{k\in\tilde K}\sum_{i\in\tilde J_k}\beta_{ik}g_{iks}x_{iks}\le Q_s,\ s\in\tilde S; \qquad (37)$$

$$\sum_{k\in\tilde K}\sum_{s\in\tilde S}g_{iks}x_{iks}\ge B_i,\ i\in\tilde I\,. \qquad (38)$$

Задача *B*2.

$$\xi_2(E_2)=\sum_{i\in\tilde I}\sum_{s\in\tilde S}f^t_{is}(g^t_{is}y^t_{is})\to\min \qquad (39)$$

в условиях ограничений

$$\sum_{s\in\tilde S}g^t_{is}y^t_{is}\ge b^t_i,\ i\in\tilde I,\ t\in\tilde T; \qquad (40)$$

$$\sum_{i\in\tilde I}\beta_i g^t_{is}y^t_{is}\le Q_s,\ s\in\tilde S\,. \qquad (41)$$

Задача *B*3.

$$\xi_3(E_3)=\sum_{s\in\tilde S}\sum_{i\in\tilde I}f_{is}(\lambda_{is}x_{is})\to\min \qquad (42)$$

в условиях ограничений

$$\sum_{s\in\tilde S}x_{is}\ge B_i,\ i\in\tilde I; \qquad (43)$$

$$\sum_{i\in\tilde S}\beta_i x_{is}\le Q_s,\ s\in\tilde S\,. \qquad (44)$$

Если выполняются ограничения, что каждый ПТ поставляет свои товары только в один РС, то в задачах *B*1 и *B*3 должны быть предусмотрены ограничения (12), (13). Если выполняются ограничения, что каждый ТЦ должен получать все товары только из одного РС, то в задаче *B*2 должны быть предусмотрены ограничения (12), (14).

Более точная оценка суммы минимальных затрат определяется выражением

$$\xi_2(E) = \xi_2(E_1) + \xi_2(E_2) + \xi_2(E_3),$$
$$\text{где } \xi_2(E) \ge \xi_1(E). \qquad (45)$$

Положим $\hat{H}_{ik} = H_{ik}$, $\hat{B}_i = B_i$, $i \in \widetilde{I}$, $k \in \widetilde{K}$; $\hat{Q}_s = Q_s$, $\hat{b}^t_{is} = b^t_{is}$, $s \in \widetilde{S}$, $t \in \overline{T}$; а также $\bar{I}_1 = \widetilde{I}$, $\overline{S}_1 = \widetilde{S}$, $\overline{K}_1 = \widetilde{K}$, $\overline{T}_1 = \widetilde{T}$ и для пар индексов – $(\bar{I}_1, \overline{K}_1) = (\widetilde{I}, \widetilde{K})$, $(\bar{I}_1, \overline{T}_1) = (\widetilde{I}, \widetilde{T})$.

Для каждой тройки индексов (i,k,s) определим значения

$$c_{iks} = f_{iks}(g_{iks}) + \min_{s \in \widetilde{S}} \min_{t \in \widetilde{T}} \left[\psi_{is}(g_{iks}) + \psi^t_{is}(g_{iks}) \right],$$
$$i \in \bar{I}_1,\ k \in \overline{K}_1,\ s \in \overline{S}_1, \qquad (46)$$

а для каждой тройки (i,s,t) – значения

$$c^t_{is} = f^t_{is}(g^t_{is}) + \min_{s \in \widetilde{S}} \min_{k \in \widetilde{K}} \left[\psi_{iks}(g^t_{is}) + \psi_{is}(g^t_{is}) \right],$$
$$i \in \bar{I}_1,\ s \in \overline{S}_1,\ t \in \overline{T}_1. \qquad (47)$$

Найдем

$$\bar{c}_{iks_1} = \min_{s \in \overline{S}_1} c_{iks},\ k \in \overline{K}_1,\ i \in \bar{I}_1, \qquad (48)$$

$$C^{\min}_{ik_1s_1} = \min_{k \in \overline{K}_1} \bar{c}_{iks_1} = \min_{k \in \overline{K}_1} \min_{s \in \overline{S}_1} c_{iks},$$

$$C^{\min}_{ik_2s_2} = \min_{k \in \overline{K}_1} \min_{s \in \overline{S}_1} \{ c_{iks} \mid (k,s) \ne (k_1,s_1) \},\ i \in \bar{I}_1; \qquad (49)$$

$$\bar{c}^t_{il_1} = \min_{s \in \overline{S}_1} c^t_{is},\ i \in \bar{I}_1,\ t \in \overline{T}_1; \qquad (50)$$

$$C^{t,\min}_{j_1l_1} = \min_{i \in \bar{I}_1} \min_{s \in \overline{S}_1} c^t_{is},$$

$$C^{t,\min}_{j_2l_2} = \min_{i \in \bar{I}_1} \min_{s \in \overline{S}_1} \{ c^t_{is} \mid (i,s) \ne (j_1,l_1) \},\ t \in \overline{T}_1. \qquad (51)$$

Вычислим

$$\overline{D}_{ik_1s_1} = \{ \max_{x_{ik_1s_1}} (g_{ik_1s_1} x_{ik_1s_1}) \mid (g_{ik_1s_1} x_{ik_1s_1}) \le \le \min(\hat{B}_i, \frac{1}{\beta_{ik_1s_1}} \hat{Q}_{s_1}, \hat{H}_{ik_1}) \},\quad i \in \bar{I}_1; \qquad (52)$$

$$\overline{R}^t_{j_1l_1} = \{ \max_{y^t_{j_1l_1}} (g^t_{j_1l_1} y^t_{j_1l_1}) \mid [(g^t_{j_1l_1} - 1) y^t_{j_1l_1} < < \hat{b}^t_{j_1} \le g^t_{j_1l_1} y^t_{j_1l_1} \ \&\ \beta_{j_1l_1} g^t_{j_1l_1} y^t_{j_1l_1} \le \hat{Q}_{l_1}] \},\quad t \in \overline{T}_1. \qquad (53)$$

Рассмотрим алгоритмы $P1$ и $P2$, позволяющие вычислить более точное значение нижней границы функции цели в оптимальном решении. В алгоритмах $P1$ и $P2$ положим $\bar{I}_1 = \widetilde{I}$, $\overline{K}_1 = \widetilde{K}$, $(\bar{I}_1, \overline{K}_1) = (\widetilde{I}, \widetilde{K})$, $\overline{S}_1 = S_1$; $\hat{H}_{ik} = H_{ik}$, $(i,k) \in (\bar{I}_1, \overline{K}_1)$; $\hat{B}_i = B_i$, $i \in \bar{I}_1$; $\hat{Q}_s = Q_s$, $s \in \overline{S}_1$. Начальные значения нижней границы положим $\xi_3(E) = \xi_4(E) = 0$.

Алгоритм *P*1.

Ш а г 1. Выполнив вычисления (46), (48), (49), определим

$$\Delta^1_{i^1} = \max_{i \in \bar{I}_1} [C^{\min}_{ik_2s_2} - C^{\min}_{ik_1s_1}]. \qquad (54)$$

Для индекса $i^1 \in \bar{I}_1$ определим значение $\overline{D}_{i^1k_1s_1}$ по формуле (52). Значение $\xi_3(E)$ определяем

$$\xi_3(E) = \xi_3(E) + f_{i^1k_1s_1}(\overline{D}_{i^1k_1s_1}). \qquad (55)$$

Переходим к шагу 2.

Ш а г 2. Полагаем $\hat{H}_{i^1k_1} = \hat{H}_{i^1k_1} - \overline{D}_{i^1k_1s_1}$, $\hat{B}_{i^1} = \hat{B}_{i^1} - \overline{D}_{i^1k_1s_1}$, $\hat{Q}_{s^1} = \hat{Q}_{s^1} - \beta_{i^1k_1s_1} \overline{D}_{i^1k_1s_1}$.

Если $\hat{H}_{i^1k_1} \le 0$, то полагаем $(\bar{I}_1, \overline{K}_1) = [(\bar{I}_1, \overline{K}_1) / /(i^1, k_1)]$. Если подмножество пар индексов $(\bar{I}_1, \overline{K}_1) = \varnothing$, $\hat{I}_1 \ne \varnothing$, то алгоритм завершает работу с сообщением об отсутствии допустимых решений, положив $\xi_3(E) = \infty$.

Если $\hat{B}_{i^1} \le 0$, то полагаем $(\bar{I}_1, \overline{K}_1) = [(\bar{I}_1, \overline{K}_1) / /(i_1, k_1)]$, $\bar{I}_1 = (\bar{I}_1 / i^1)$. Если $\bar{I}_1 = \varnothing$, то алгоритм завершает работу и значение $\xi_3(E)$ определяет нижнюю границу минимальных затрат на транспортировку грузов.

Если $\hat{Q}_{s^1} \le 0$, то полагаем $\overline{S}_1 = (\overline{S}_1 / i_1)$. Если $\overline{S}_1 = \varnothing$, $\bar{I}_1 \ne \varnothing$, то алгоритм завершает работу с сообщением об отсутствии допустимых решений, положив $\xi_3(E) = \infty$.

Со скорректированными значениями $\hat{H}_{ik}$, $\hat{B}_i$ и $\hat{Q}_s$ и множествами индексов $\bar{I}_1$, $\overline{S}_1$, а также пар индексов $(\bar{I}_1, \overline{K}_1)$ переходим к шагу 1.

Алгоритм *P*2.

Ш а г 1. Выполнив вычисления (50)–(51), (53), определим

$$\Delta^2_{t^1j_1l_1} = \max_{t \in \overline{T}_1} [C^{t^1,\min}_{j_2l_2} - C^{t^1,\min}_{j_1l_1}]. \qquad (56)$$

Для индекса $t^1 \in \overline{T}_1$ определим значение $\overline{R}^{t^1}_{j_1l_1}$ по формуле (53). Значение $\xi_4(E)$ определяем

$$\xi_4(E) = \xi_4(E) + f^{t^1}_{j_1l_1}(\overline{R}^{t^1}_{j_1l_1}). \qquad (57)$$

Переходим к шагу 2.

Ш а г 2. Полагаем $\hat{b}_{j_1}^{t^1} = \max(0; b_{j_1}^{t^1} - \overline{R}_{j_1 l_1}^{t^1})$, $\hat{Q}_{l_1} = \hat{Q}_{l_1} - \overline{R}_{j_1 l_1}^{t^1}$.

Если $\hat{b}_{j_1}^{t^1} = 0$, то корректируем множество пар индексов $(\bar{I}_1, \overline{T}_1) = (\bar{I}_1, \overline{T}_1)/(j_1, t^1)$. Если множество пар индексов $(\bar{I}_1, \overline{T}_1) = \varnothing$, то алгоритм завершает работу и значение $\xi_4(E)$ определяет нижнюю границу минимальных затрат на транспортировку грузов.

Если $\hat{Q}_{l_1} \leq \min_{t \in \overline{T}_1} \min_{i \in \bar{I}_1} (\beta_{il_1} g_{il_1}^t y_{il_1}^t)$, то полагаем $\overline{S}_1 = \overline{S}_1 / l_1$. Если $\overline{S}_1 = \varnothing$, а $(\bar{I}_1, \overline{T}_1) \neq \varnothing$, то алгоритм завершает работу с сообщением об отсутствии допустимых решений, $\xi_4(E) = \infty$.

Если $\overline{S}_1 \neq \varnothing$ и $(\bar{I}_1, \overline{T}_1) \neq \varnothing$, то со скорректированными значениями $\hat{b}_{j_1}^{t^1}$ и $\hat{Q}_{l_1}$, а также множеством индексов $\overline{S}_1$, а также пар индексов $(\bar{I}_1, \overline{T}_1)$ переходим к шагу 1.

Нижняя граница минимальных затрат может быть вычислена по формуле

$$\xi_5(E) = \max[\xi_3(E), \xi_4(E)]. \qquad (58)$$

Наиболее точное значение нижней границы определяется из условий

$$\xi(E) = \max[\xi_2(E), \xi_5(E)]. \qquad (59)$$

При построении приближенных методов решения значение нижней границы позволит оценить целесообразность продолжения дальнейших вычислений и остановить процесс решения при получении приемлемого для пользователя результата.

Алгоритмы решения задачи

Решения задачи как точными, так и приближенными методами будем осуществлять последовательными алгоритмами оптимизации на основе модифицированного метода «метода ветвей и границ» [4–6]. На каждой итерации алгоритма выбирается значение одной какой-либо переменной x_{iks} или y_{is}^t, $i \in \widetilde{I}$, $k \in \widetilde{K}$, $s \in \widetilde{S}$. На этапе ветвления для этой переменной устанавливаются либо первое наиболее эффективное значение для нее, либо принимается второе условие, что значение этой переменной или будет равно нулю, или принимает какое-либо другое значение. Уточняются величины граничных значений ограничений для всех оставшихся для дальнейшего выбора переменных. Из дальнейшего рассмотрения исключаются в каждом из вновь образованных подмножеств вариантов подмножества значений переменных, не содержащих допустимых решений. Вычисляются нижние границы функции цели для каждого из вновь образованных подмножеств вариантов. На каждой итерации выбирается для дальнейшего развития подмножество с наименьшей границей функции цели. Процесс решения останавливается, когда получено множество значений переменных, удовлетворяющих всем ограничениям задачи, и значение функции цели задачи у которого не хуже, чем значение нижней границы для каждого из подмножеств, подлежащих развитию вариантов.

Получение точного решения столь сложной задачи нелинейного булевого программирования очень большой размерности представляет только теоретический интерес и связано с очень большим объемом вычислений. Поэтому в дальнейших разделах статьи основное внимание уделяется рассмотрению приближенных методов решения. Эти методы основаны на последовательном решении задач 1 и 4, а также 2 и 3 и выбора среди них наиболее эффективного, либо решении общей задачи с использованием левосторонней схемы ветвления (т.е. выбор подмножества для дальнейшего развития только среди двух образованных на последнем шаге вариантов) до получения первого допустимого решения. С целью улучшения полученного на основе такой стратегии ветвления приближенного решения задачи может быть осуществлен возврат к любой вершине дерева подлежащих развитию вариантов, значение нижней границы у которой лучше функции цели полученного приближенного решения.

Вычисление нижних границ величины суммарных затрат

Рассмотрим формульные выражения и алгоритмы расчета нижней границы для случаев, когда определены объемы грузопотоков по некоторым дугам сети. Пусть на некотором этапе решения для λ-го частичного плана Π_λ определены значения отдельных переменных $x_{jrp}(\lambda)$, $(j,r,p\,|\,\lambda)\in(\tilde{I},\tilde{K},\tilde{S})$, и $y_{lv}^{\tau}(\lambda)$, $(l,v,\tau\,|\,\lambda)\in(\tilde{I},\tilde{S},\tilde{T})$ и определена сумма связанных со значениями этих переменных части суммарных затрат

$$F(\lambda)=\sum_{(j,r,p|\lambda)\in(\tilde{I},\tilde{K},\tilde{S})} f_{jrp}(\lambda_{jr}g_{jrp}x_{jrp})+$$
$$+\max\left[\sum_{(j,p|\lambda)\in(\tilde{I},\tilde{S})} f_{jp}(\lambda_{jp}g_{jp}x_{jp});\right.$$
$$\left.\sum_{(l,v|\lambda)\in(\tilde{I},\tilde{S})} f_{lv}\Big(\sum_{(l|\lambda)\in\tilde{I}}\lambda_{lv}g_{lv}^{\tau}y_{lv}^{\tau}\Big)\right]+ \qquad (60)$$
$$+\sum_{(v,\tau|\lambda)\in(\tilde{S},\tilde{T})} f_v^{\tau}\left(\sum_{(l|\lambda)\in\tilde{I}}\lambda_{lv}g_{lv}^{\tau}y_{lv}^{\tau}\right).$$

Вычислим значения

$$\hat{Q}_p(\lambda)=\hat{Q}_p-\max\left\{\sum_{(j,p|\lambda)\in(\tilde{I},\tilde{S})}\beta_{jp}g_{jp}x_{jp};\right.$$
$$\left.\sum_{(p,\tau|\lambda)\in(\tilde{S},\tilde{T})}\sum_{(l|\lambda)\in\tilde{I}}\beta_{lp}g_{lp}^{\tau}y_{lv}^{\tau}\right\}. \qquad (61)$$

Если $\hat{Q}_p(\lambda)<\min\{\beta_{jp}x_{jp};\beta_{lp}g_{lp}^{\tau}\}$, то полагаем $\tilde{S}(\lambda)=\tilde{S}(\lambda)/p$.

Определим также значения

$$\hat{H}_{jr}(\lambda)=\hat{H}_{jr}-\sum_{(j,r|\lambda)\in\{\tilde{I}(\lambda),\tilde{S}(\lambda)\}} g_{jr}x_{jr}\,;$$
$$\hat{b}_j^t(\lambda)=\hat{b}_j^t-\sum_{(j,p|\lambda)\in(\tilde{S},\tilde{T})} g_{lp}^t y_{lp}^j\,. \qquad (62)$$

При этом значения $\hat{H}_{is}$, $\hat{b}_i^t$, $\hat{Q}_s$ определяются также, как и в алгоритмах $P1$ и $P2$.

Если $\hat{H}_{jr}(\lambda)<g_{jr}$, то полагаем $\hat{H}_{jr}(\lambda)=0$, $\tilde{J}_r=\varnothing$.

Если $\sum_{p\in\tilde{S}(\lambda)} b_j^t(\lambda)>B_j$, то полагаем $B_j=0$ и все пары индексов $\{\tilde{S}(\lambda),j\}=\varnothing$.

Для вычисления нижней границы суммарных затрат $\xi(F\,|\,\lambda)$ для подмножества еще не установленных значений целочисленных переменных x_{iks}, $(i,k)\in\tilde{J}_k(\lambda)$, $s\in\tilde{S}(\lambda)$, и y_{is}^t, $(i,s,t)\in\{\tilde{I}(\lambda),\tilde{S}(\lambda),\tilde{\tilde{I}}(\lambda)\}$ положим $(i,s,t)\in\{\tilde{I}(\lambda),$ $\tilde{S}(\lambda),\tilde{\tilde{I}}(\lambda)\}$.

Для вычисления нижней границы суммарных затрат для частичного плана Π_λ положим $\hat{H}_{ik}=\tilde{H}_{ik}(\lambda)$, $\hat{J}_k=\tilde{J}_k(\lambda)$; $\hat{b}_i^t=\tilde{b}_i^t(\lambda)$, $i\in\tilde{I}(\lambda)$; $\hat{Q}_s=\tilde{Q}_s(\lambda)$, $s\in\tilde{S}(\lambda)$, а также $\hat{I}=\tilde{I}(\lambda)$, $\hat{S}=\tilde{S}(\lambda)$, $\hat{T}=\tilde{T}(\lambda)$. Сформулировав и решив задачи $B1$ – $B3$, получим значение нижней границы функции цели $\xi_5(F\,|\,\lambda)$ для подлежащего определению подмножества переменных задачи. Тогда значение нижней границы суммарных затрат для частичного плана Π_λ определяется по формуле

$$\psi(F\,|\,\lambda)=F(\lambda)+\xi_5(F\,|\,\lambda)\,. \qquad (63)$$

Разбиение на подмножества

Пусть для некоторого частичного плана Π_λ определены значения отдельных переменных $x_{jrp}(\lambda)$, $(j,r,p\,|\,\lambda)\in(\tilde{I},\tilde{K},\tilde{S})$, и $y_{lv}^{\tau}(\lambda)$, $(l,v,\tau\,|\,\lambda)\in$ $\in(\tilde{I},\tilde{S},\tilde{T})$, образованы подмножества индексов $\tilde{J}_k(\lambda)$, $\tilde{I}(\lambda)$, $\tilde{S}(\lambda)$, $\tilde{T}(\lambda)$, а также вычислены значения $\hat{Q}_s(\lambda)$ и $\hat{H}_{is}(\lambda)$, $\hat{b}_i^t(\lambda)$ по формулам (61), (62). Положив $\hat{Q}_s=\hat{Q}_s(\lambda)$, $\hat{H}_{is}=\hat{H}_{is}(\lambda)$, $\hat{b}_i^t=\hat{b}_i^t(\lambda)$, а также $\bar{J}_{1k}=\tilde{J}_k(\lambda)$, $\bar{K}_1=\tilde{K}(\lambda)$, $\bar{I}_1=\tilde{I}(\lambda)$, $\bar{S}_1=\tilde{S}(\lambda)$, $\bar{T}_1=\tilde{T}(\lambda)$, и определив соответствующим образом подмножества пар индексов $(\bar{I}_1,\bar{K}_1)$ и $(\bar{I}_1,\bar{T}_1)$, выполним вычисления по формулам (46) – (51).

Вычислим $\Delta_{i^1}^1$ и $\Delta_{t^1 j_1 l_1}^2$ соответственно по формулам (54) и (56). При решении задачи 4 в качестве переменной, по которой ведется ветвление, выбираем переменную $x_{i^1k^1s_1}$, а при решении задачи 3 – переменную $y_{j_1}^{t^1}$. При решении задачи точным методом, если $\Delta_{t^1 j_1 l_1}^2>\Delta_{i^1}^1$, то выбираем переменную для ветвления $y_{j_1}^{t^1}$, если $\Delta_{t^1 j_1 l_1}^2\le\Delta_{i^1}^1$, то – переменную $x_{i^1k^1s_1}$.

Рассматриваемое подмножество планов задачи Π_λ разбиваем на два подмножества вида

$$\Pi_\lambda^1=\{\Pi_\lambda\,|\,x_{i^1k_1}^{s_1}=\bar{D}_{i^1k_1}^{s_1}\},\ \ \Pi_\lambda^2=\{\Pi_\lambda\,|\,x_{i^1k_1}^{k_1}\ne\bar{D}_{i^1k_1}^{s_1}\} \qquad (64)$$

или

$$\Pi_\lambda^1 = \{\Pi_\lambda \mid y_{i^1}^{t_1} = \overline{R}_{i^1}^{t_1}\}\,,\ \Pi_\lambda^1 = \{\Pi_\lambda \mid y_{i^1}^{t_1} \neq \overline{R}_{i^1}^{t_1}\}\,, \quad (65)$$

где значения $\overline{D}_{i^1 k_1}^{s_1}$ и $\overline{R}_{i^1}^{t_1}$ вычисляются соответственно по формулам (52) и (53).

Выбор этих переменных обеспечивает наибольшую разность между значениями нижней границы критерия оптимальности среди двух вновь образовавшихся подмножеств.

Вычислительная схема получения приближенных решений предусматривает выполнение следующих этапов:

1. Решение модифицированным методом ветвей и границ задачи 1, в результате чего будут определены значения переменных x_{iks}, $i \in \widetilde{I}$, $k \in \widetilde{K}$, $s \in \widetilde{S}$; вычислено значение критерия эффективности E_1^1, определяемое выражением (16), а также суммарные объемы поставок $D_{iks} = g_{iks} x_{iks}$, $i \in \widetilde{I}$, $k \in \widetilde{K}$, $s \in \widetilde{S}$ и $G_{is}^1 = \sum_{k \in \widetilde{J}_k} \beta_i g_{iks} x_{iks}$, $s \in \widetilde{S}$, удовлетворяющие ограничениям $\sum_{s \in \widetilde{S}} D_{iks} \le D_{ik}$, $i \in \widetilde{I}$, $k \in \widetilde{K}$, $s \in \widetilde{S}$; $\sum_{i \in \widetilde{I}} G_{is}^1 \le Q_s$; $s \in \widetilde{S}$.

2. Решение модифицированным методом ветвей и границ задачи 2, в результате чего будут определены значения переменных y_{is}^t, $s \in \widetilde{S}$, $t \in \widetilde{T}$; вычислено значение критерия эффективности E_2^1, определяемое выражением (17), а также суммарные объемы поставок G_{is}^2 по формулам (26), удовлетворяющие ограничениям $\sum_{i \in \widetilde{I}} G_{is}^2 \le Q_s$, $s \in \widetilde{S}$; а также (22) и $\sum_{s \in \widetilde{S}} G_{is}^2 \ge B_i$.

3. Формулируем и решаем модифицированным методом ветвей и границ задачу 3. Если будет найдено допустимое эффективное решение этой задачи со значением критерия оптимальности E_1^2, определяемое выражением (19), и значения переменных y_{is}^t, $s \in \widetilde{S}$, $t \in \widetilde{T}$, то в результате последовательного решения задач 1 и 3 получено одно из приближенных решений задачи. При этом значения переменных x_{iks}, $i \in \widetilde{I}$, $k \in \widetilde{K}$, $s \in \widetilde{S}$, были вычислены в результате решения задачи 1, а значение комплексного критерия оптимальности (суммы приведенных затрат) определяются выражением $\overline{E}_1 = E_1^1 + E_1^2$.

4. Формулируем и решаем модифицированным методом ветвей и границ задачу 4. Если будет найдено допустимое эффективное решение этой задачи со значением критерия оптимальности E_2^2, определяемое выражением (18), и значения переменных x_{iks}, $i \in \widetilde{I}$, $k \in \widetilde{K}$, $s \in \widetilde{S}$, то в результате последовательного решения задач 2 и 4 получено второе из приближенных решений задачи. При этом значения переменных y_{is}^t, $s \in \widetilde{S}$, $t \in \widetilde{T}$, вычислены в результате решения задачи 1, а значение комплексного критерия оптимальности определяются выражением $\overline{E}_2 = E_2^1 + E_2^2$.

5. Если задачи 3 или 4 не имеют допустимых решений, то полагаем соответственно $\overline{E}_1 = \infty$ и (или) $\overline{E}_2 = \infty$. Если $\overline{E}_1 \le \overline{E}_2$, то в качестве решения задачи принимаются результаты последовательного решения задач 1 и 3. Если $\overline{E}_1 > \overline{E}_2$, то в качестве решения задачи принимаются результаты последовательного решения задач 2 и 4.

6. Если $\overline{E}_1 = \overline{E}_2 = \infty$, в деревьях решения задач 1 и (или) 2 полагаем полученное решение в качестве недопустимого, находим висячую вершину дерева с наименьшим значением нижней границы и продолжаем решение этой задачи до получения следующего оптимального решения. После выполнения этих вычислений переходим к п.п. 3 или 4 алгоритма решения задачи.

Следует отметить, что может быть проведено сравнение полученного приближенного решения со значением вычисленным по формуле (34) и алгоритмами $A1$–$A3$ либо по формуле (45) и алгоритмами $P1$, $P2$ нижней границы суммы минимальных затрат. Если точность полученного приближенного решения не удовлетворяет требованиям лица, принимающего решения, то переходим к п. 6 и выполняем дальнейшие решения последовательностей задач, как и в случае, если $\overline{E}_1 = \overline{E}_2 = \infty$. При этом каждую из вновь образованных вершин дерева решения рассматриваемой задачи полагаем неперспективной, если $\xi(E) \geq \min(\bar{E}_1, \bar{E}_2)$. Если такая процедура будет проведена до состояния, что граничные значения для всех подлежащих развитию (висячих) вершин дерева при последовательном решении задач 1, 3 и 2, 4 будут больше полученного наиболее эффективного допустимого решения (рекорда), то это будет свидетельством того, что получено точное решение задачи.

Заключение. Предложены математические модели оптимальной доставки товаров в сети объединенных в концерн или компанию супермаркетов, универсамов или специализированных магазинов в виде модели нелинейного целочисленного программирования большого размера. Процесс решения сформулированных задач представлен в виде некоторого итеративного процесса решения ряда задач существенно меньшей размерности и более простой структуры. Установлены свойства допустимых и оптимальных решений задачи, позволяющие вычислить точные и грубые оценки значения критерия оптимальности на различных этапах решения, отбрасывать подмножества планов задачи, не содержащих допустимых решений и оценить эффективность получаемых приближенных решений.

В реальных задачах могут не рассматриваться возможности поставки грузов из ПТ в те РС, а также из РС в те ТЦ расстояние, а следовательно, и затраты на транспортировку грузов для которых в несколько (а в некоторых случаях и в десятки раз) превосходят удельные затраты на транспортировку для целого ряда имеющихся в наличие пунктов сети, расположенных на небольших расстояниях друг от друга. Учитывая, что в эффективных решениях проблем такие связи практически никогда не могут быть выбраны, это исключение может быть выполнено на предварительных этапах при подготовке исходных данных для решения задачи. Такая процедура позволит сократить размерность решаемой оптимизационной задачи, что даст возможность на современных компьютерах получать эффективные оперативные решения перераспределения грузопотоков.

1. *Ху Т.* Потоки в сетях. – М.: Мир, 1974. – 519 с.
2. *Алгоритмы*: построение и анализ / Т.Х. Кормен, Ч.И. Лейзерсон, Р.Л. Ривест и др. – М.: Вильямс, 2006. – 1296 с.
3. *Sebastian H.-J.* Optimization of Distribution Networks in Postal Logistics / INFORMS Annual Meeting, Seattle, USA, Nov. 2007.
4. *Зак Ю.А.* Методы многоэкстремальной оптимизации в условиях ограничений для сепарабельно квазимонотонных функций // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2011. – № 2. – С. 38–55.
5. *Зак Ю.А.* Вычислительные схемы последовательных алгоритмов оптимизации // Автоматика и вычислительная техника. – 1980. – № 1. – С. 46–55.
6. *Зак Ю.А.* Об одном классе многоэкстремальных задач и методах их решения // Там же. – 1979. – № 5. – С. 46–55.

Поступила 11.10.2011

Тел. для справок: +49/(0)241-543255 (*Aachen*, *Deutschland*)
E-mail: *yuriy_zack@hotmail.com*
Сайт: *www.optimorum.de*