

О.М. Литвин, Л.С. Лобанова, Г.В. Залужна

Чисельна реалізація методу лінійних інтегро-диференціальних рівнянь для рівняння нестационарної теплопровідності з двома просторовими змінними

Описано распространение метода конечных элементов решения нестационарной задачи теплопроводности с двумя пространственными переменными с использованием формул сплайн-интерполяции, построенных на основе сплайн-интерлинеации функций для областей, ограниченных дугами известных кривых. Рассмотрен пример области, представляющей собой равнобедренную трапецию.

The distribution of the method of finite elements for the decision of non-stationary task of heat-conducting with two spatial variables with the use of formulas of spline interpolation, which are built on the basis of spline interlineations of functions in case of curves arcs limited areas. The example of the area, which is isosceles trapezoid, is considered.

Описано розповсюдження методу скінченних елементів розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними з використанням формул сплайн-інтерполяції, побудованих на основі сплайн-інтерлінації функцій для областей, обмежених дугами відомих кривих. Розглянуто приклад області, що є рівнобічною трапецією.

Вступ. Метод скінченних елементів розв'язання початково-крайової задачі для нестационарного рівняння теплопровідності досліджено в [1–5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + q(x, y)u = f(x, y, t)$$

з двома просторовими змінними з використанням формул сплайн-інтерполяції, побудованих на основі сплайн-інтерлінації функцій $u(x, y, t)$ за просторовими змінними x, y . Суть методу полягає у представленні наближеного розв'язку у вигляді формул сплайн-інтерполяції за просторовими змінними з коефіцієнтами, що є функціями змінної t . Метод ґрунтується на заміні сплайнами слідів наближеного розв'язку у формулах інтерлінації, які використовуються для його представлення, і є скінченно-елементною реалізацією методу *лінійних інтегро-диференціальних рівнянь* (ЛІДР) розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними. Зокрема, в працях [4–7] розглянуто застосування цього методу для розв'язання нестационарної задачі теплопровідності для областей, що є

об'єднанням прямокутників зі сторонами, паралельними осям координат.

В даній статті вказаний метод розповсюджується на області, обмежені дугами відомих кривих. Розглянуто приклад.

Загальний метод побудови функції $u(x, y, t)$, яка точно задовольняє умови Діріхле на границі довільної області $G \subset R^2$

Для побудови структур розв'язків початково-крайових задач використовуємо метод [3] побудови функцій двох змінних x, y , які точно задовольняють граничні умови на межі двовимірних областей складної форми (вважаємо t параметром).

З практичної точки зору важливою є побудова операторів інтерлінації на лініях ректангуляції та триангуляції в областях складної форми, обмежених дугами відомих кривих. Вважатимемо, що $G \subset R^2$ – обмежена область на площині, границя якої ∂G є об'єднанням дуг відомих кривих. Припустимо, без втрати загальності, що область G повністю розміщена в прямокутнику $[a, b] \times [c, d]$. Розіб'ємо G на підобласті прямими $x = x_k, k = \overline{0, M_1}$ та $y = y_l, l = \overline{0, M_2}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{M_1} = b$; $c = y_0 < y_1 < \dots < y_{M_2} = d$. Ці підобласті можуть бути прямокутниками $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G$ або чотирикутниками

Ключові слова: метод скінченних елементів, сплайн-інтерполяція, сплайн-інтерлінація.

$$R_{i,j}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}(y)] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G,$$

$$R_{i,j}^{(2)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \subset G,$$

$$R_{i,j}^{(3)} = [x_i(y), x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G,$$

$$R_{i,j}^{(4)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j(x), y_{j+1}] \subset G,$$

в яких три сторони паралельні осям координат, а одна – криволінійна (взагалі кажучи) сторона – є частиною границі ∂G області G . Крім того, підобласті, на які розбивається область G , можуть бути трикутниками

$$T_{i,j}^{(1)} = \{(x, y) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1},$$

$$y_j \leq y \leq \eta_{j+1}(x), \eta'_{j+1}(x) < 0\},$$

$$T_{i,j}^{(2)} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i,$$

$$y_j \leq y \leq \eta_{j+1}(x), \eta'_{j+1}(x) > 0\},$$

$$T_{i,j}^{(3)} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i,$$

$$\eta_{j-1}(x) \leq y \leq y_j, \eta'_{j-1}(x) < 0\},$$

$$T_{i,j}^{(4)} = \{(x, y) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1},$$

$$\eta_{j-1}(x) \leq y \leq y_j, \eta'_{j-1}(x) > 0\},$$

де одна із сторін є криволінійною (взагалі кажучи) частиною границі ∂G області G .

Напишемо формулу для інтерлінації на чотирикутнику $R_{i,j}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \subset G$, одна із сторін якого є криволінійною частиною границі ∂G області G :

$$O_{i,j}^{(1)}F(x, y, t) = (P_1 + P_2 - P_1P_2)F(x, y, t),$$

$$P_1F(x, y, t) = \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)}F(x, y_j, t) + \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j}F(x, y_{j+1}(x), t),$$

$$P_2F(x, y, t) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}F(x_i, y, t) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}F(x_{i+1}, y, t),$$

$$P_1P_2F(x, y, t) = \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)}P_2F(x, y_j, t) +$$

$$+ \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j}P_2F(x, y_{j+1}(x), t).$$

Теорема 1. Оператор $O_{i,j}^{(1)}F(x, y, t)$ інтерлінує функцію $F(x, y, t) \in C(R_{i,j}^{(1)})$ на границі чотирикутника $R_{i,j}^{(1)}$ з криволінійною стороною:

$$O_{i,j}^{(1)}F(x, y, t) = F(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial R_{i,j}^{(1)}, \quad \text{тобто}$$

$$O_{i,j}^{(1)}F(x_q, y, t) = F(x_q, y, t), \quad q = i, i+1;$$

$$O_{i,j}^{(1)}F(x, y_j, t) = F(x, y_j, t),$$

$$O_{i,j}^{(1)}F(x, y_{j+1}(x), t) = F(x, y_{j+1}(x), t).$$

Доведення здійснюється безпосередньою перевіркою.

Аналогічно будуються інтерлінанти, які інтерлінують функцію $F(x, y, t)$ на сторонах чотирикутників $R_{i,j}^{(2)}$, $R_{i,j}^{(3)}$, $R_{i,j}^{(4)}$ з криволінійними сторонами.

Напишемо тепер формулу для інтерлінації на прямокутному трикутнику з криволінійною гіпотенузою (тобто на трикутнику з катетами, паралельними осям координат, і криволінійною гіпотенузою). Розглядатимемо прямокутний трикутник з вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ і гіпотенузою $\cup AB$, яка визначається рівнянням $f(x) + g(y) = 1$, функції $f(x)$, $g(y)$ неперервні і монотонні на $[0,1]$ та задовольняють умови $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$.

Теорема 2. Хай $F(x, y, t) \in C(T)$,

$$P_1F(x, y, t) = f(x)F(f^{-1}(1 - g(y)), y, t) +$$

$$+ g(y)F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t), \quad P_2F(x, y, t) =$$

$$= F(x, 0, t) + F(0, y, t) - F(0, 0, t). \quad \text{Тоді оператор}$$

$$P_{12}F(x, y, t) = (P_1 \oplus P_2)F(x, y, t) :=$$

$$:= (P_1 + P_2 - P_1P_2)F(x, y, t) =$$

$$= f(x)F(f^{-1}(1 - g(y)), y, t) +$$

$$+ g(y)F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t) + \quad (1)$$

$$+ F(x, 0, t) + F(0, y, t) - F(0, 0, t) -$$

$-f(x)[F(0,y,t)+F(f^{-1}(1-g(y)),0,t)-F(0,0,t)]-g(y)[F(0,g^{-1}(1-f(x)),t)+F(x,0,t)-F(0,0,t)]$
інтерлінує функцію $F(x,y,t)$ на трьох сторонах трикутника $T_{i,j}$, тобто

$$\begin{aligned} P_{12}F(x,0,t) &= F(x,0,t), \\ P_{12}F(0,y,t) &= F(0,y,t), \\ P_{12}F(x,y,t) &= F(x,y,t), \end{aligned} \quad (2)$$

якщо

$$f(x)+g(y)=1. \quad (3)$$

Співвідношення (2) доведено.

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. Хай оператори $OR_{i,j}^{(q)}F(x,y,t)$, $q=0,1,\dots,4$ інтерлінують функцію $F(x,y,t)$ на сторонах чотирикутників $R_{i,j}^{(q)}$, $q=0,1,\dots,4$, а оператори $OT_{i,j}^{(q)}F(x,y,t)$, $q=1,\dots,4$ інтерлінують функцію $F(x,y,t)$ на сторонах трикутників $T_{i,j}^{(q)} \subset G$ з криволінійною (взагалі кажучи) гіпотенузою (означених вище).

Тоді оператор

$$O_G F(x,y,t) = \begin{cases} OR_{i,j}^{(q)}F(x,y,t), & (x,y) \in R_{i,j}^{(q)}, \\ & q=0 \vee 1 \vee \dots \vee 4 \quad \forall t \geq 0 \\ OT_{i,j}^{(q)}F(x,y,t), & (x,y) \in T_{i,j}^{(q)}, \\ & q=1 \vee \dots \vee 4 \end{cases}$$

інтерлінує функцію $F(x,y,t)$ на прямих $x=x_k \in [a,b]$, $y=y_i \in [c,d]$, а також на границі ∂G довільної області G , тобто $O_G F(x_k,y,t) = F(x_k,y,t)$, $O_G F(x,y_i,t) = F(x,y_i,t)$, $O_G F(x,y,t) = F(x,y,t)$, $(x,y) \in \partial G$. При цьому $O_G F(x,y,t) \in C(G) \quad \forall F(x,y,t) \in C(G) \quad \forall t \geq 0$. Це дозволяє стверджувати, що $O_G F(x,y,t) \in W_2^1(G) \quad \forall t \geq 0$, оскільки

$$\iint_G \left[(O_G F)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{R_{ij}^{(q)} \subset G} \iint_{R_{ij}^{(q)}} \left[(O_G F)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \\ &+ \sum_{T_{ij}^{(q)} \subset G} \iint_{T_{ij}^{(q)}} \left[(O_G F)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy < \infty. \end{aligned}$$

Теорему 3 доведено.

Зауваження. Якщо сліди $F(x_k,y,t) = \varphi_k(y,t)$, $F(x,y_i,t) = \psi_i(x,t)$ невідомі, то їх можна замінити на деякі функції (поліноми, сплайни тощо) з невідомими параметрами. В результаті $O_G F(x,y,t)$ перетвориться на функцію, що збігається з функцією $F(x,y,t)$ на границі ∂G області G незалежно від вибору вказаних вище параметрів. Такого типу функції можна використовувати для наближення функції $F(x,y,t)$, виходячи з тих або інших вимог до вибору невідомих параметрів.

Відносно інтерлінації на трикутнику наявні наступні твердження.

Теорема 4. Хай

$$\begin{aligned} P_{12}F(x,y,t) &= (1-f(x)-g(y))[F(x,0,t)+F(0,y,t)-F(0,0,t)] + \\ &+ f(x)[F(f^{-1}(1-g(y)),y,t)-F(f^{-1}(1-g(y)),0,t)+F(x,0,t)] + \\ &+ g(y)[F(x,g^{-1}(1-f(x)),t)-F(0,g^{-1}(1-f(x)),t)+F(0,y,t)]. \end{aligned}$$

Тоді для залишку $R_{12}F(x,y,t) = (I - P_{12})F(x,y,t) \quad \forall F \in C^{1,1}(T)$ виконується співвідношення

$$\begin{aligned} R_{12}F(x,y,t) &= (1-f(x)-g(y)) \times \\ &\times \int_0^x \int_0^y F^{(1,1,0)}(\xi,\eta,t) d\xi d\eta + \\ &+ f(x) \int_{\xi=x}^{f^{-1}(1-g(y))} \int_{\eta=0}^y F^{(1,1,0)}(\xi,\eta,t) d\xi d\eta + \\ &+ g(y) \int_{\xi=0}^x \int_{\eta=y}^{g^{-1}(1-f(x))} F^{(1,1,0)}(\xi,\eta,t) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (5)$$

Теорему 4 доведено.

Наведемо два важливих приклади.

Приклад 1. В методі скінченних елементів при розв'язанні крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними для об-

ластей складної форми суттєвим є питання задовільнення крайових умов (особливо неоднорідних). У таких задачах використання операторів інтерлінації функцій є необхідним.

Приклад 2. Використання операторів інтерлінації функцій є корисним також у методі найменших квадратів при наближенні функції за допомогою скінченної кількості її значень у внутрішніх точках області G і за допомогою її слідів на дугах відомих кривих всередині області G або таких кривих, об'єднання яких є границею області G , тощо. Слід відзначити, що класичний варіант методу найменших квадратів для наближення функцій двох змінних використовує лише значення функції у деякій системі точок (або деяку іншу систему функціоналів від наближуваної функції) і не використовує сліди наближуваної функції на деяких лініях. Очевидно, така інформація, як сліди наближуваної функції на деякій системі ліній, є значно більш інформативною, але до появи інтерлінації функцій дослідники не мали змоги її використати.

З огляду на це наведемо ще два твердження.

Теорема 5. Нехай G – трикутник з криволінійною границею ∂G , $G = \{x \geq 0, y \geq 0, f(x) + g(y) \leq 1\}$ і $F(x, y, 0) = \varphi(x, y)$. Тоді функція $H(x, y, t) = \varphi(x, y) + U(x, y, t) - U(x, y, 0)$, де $U(x, y, t) = P_{12}F(x, y, t)$, задовольняє початкову $H(x, y, 0) = \varphi(x, y)$ та граничну $H(x, y, t) = U(x, y, t)$, $(x, y) \in \partial G$ умови ($F(x, y, t)$ – довільна неперервна в G функція), тобто $P_{12}F(x, y, 0)|_{\partial G} = \varphi(x, y)|_{\partial G}$, $P_{12}F(x, y, t) = F(x, y, t) \forall (x, y) \in \partial G$ та $\forall t \geq 0$.

Теорему 5 доведено.

Доведення отримується використанням теореми 5 та безпосередньою підстановкою $F(x, y, t)$ в рівняння (6) з урахуванням рівності (7).

Приклад. Розглянемо задачу нестационарної теплопровідності в області G , яка являє собою рівнобічну трапецію

$$G = \left\{ (x, y) \mid x + y \geq 0, 1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta} \geq 0, x \leq \Delta, y \leq \Delta \right\} :$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & \Delta u - e^{-t} \left((x+y)(x-\Delta)(y-\Delta) \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta} \right) + \right. \\ & \left. + 4(x-\Delta) \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{3y}{2\Delta} \right) + 4(y-\Delta) \left(1 - \frac{3x}{2\Delta} - \frac{y}{\Delta} \right) \right), \\ & (x, y) \in G, t > 0, \end{aligned}$$

$$u(x, y, 0) = (x+y)(x-\Delta)(y-\Delta) \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta} \right),$$

$$u(x, y, t)|_{\partial G} = 0.$$

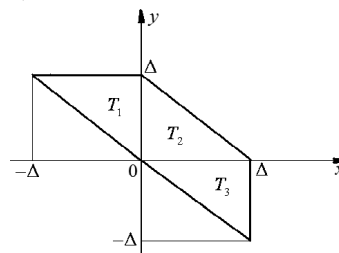
Розіб'ємо область G осями координат на трикутники T_1, T_2, T_3 (рисунок):

$$G = T_1 \cup T_2 \cup T_3,$$

$$T_1 = \left\{ (x, y) \mid -\Delta \leq x \leq 0, -x \leq y \leq \Delta \right\},$$

$$T_2 = \left\{ (x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \Delta \right\},$$

$$T_3 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \Delta, -x \leq y \leq 0 \right\}.$$



Позначимо $u(0, y, t) = \psi(y, t)$, $u(x, 0, t) = \varphi(x, t)$. Враховуючи симетрію задачі, отримаємо $\varphi(x, t) = \psi(y, t)$.

Користуючись викладеним, побудуємо функцію $u(x, y, t)$:

$$u(x, y, t) = \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{\Delta} \right) \varphi(y, t) - \left(1 - \frac{y}{\Delta} \right) \varphi(-x, t), \\ \quad -\Delta \leq x \leq 0, -x \leq y \leq \Delta, \\ \left(1 - \frac{x}{\Delta} \right) \varphi(y, t) + \left(1 - \frac{y}{\Delta} \right) \varphi(x, t) - \\ \quad - \frac{x}{\Delta} \varphi(\Delta - y, t) - \frac{y}{\Delta} \varphi(\Delta - x, t), \\ \quad x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \Delta, \\ \left(1 + \frac{y}{\Delta} \right) \varphi(x, t) - \left(1 - \frac{x}{\Delta} \right) \varphi(-y, t), \\ \quad 0 \leq x \leq \Delta, -x \leq y \leq 0. \end{cases}$$

Ця функція задовольняє однорідні граничні умови незалежно від вибору функції $\varphi(x, t)$ і збігається з $\varphi(x, t)$ на лінії $y = 0$ та з функцією $\varphi(y, t)$ на лінії $x = 0$, якщо $\varphi(0, t) = 0$, $\varphi(\Delta, t) = 0 \forall t \geq 0$.

Шукатимемо функцію $\varphi(x, t)$ у вигляді сплайну першого степеня:

$$\varphi(x, t) = \sum_{k=1}^{M-1} C_k(t) h_k(Mx - k),$$

$$h(z) = \frac{1}{2} (|z-1| - 2|z| + |z+1|).$$

Функції $C_k(t)$, $k = \overline{1, M-1}$ знайдемо, мінімізуючи вираз

$$J(u) = \iint_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - f(x, y, t) \right) u \right) dx dy$$

і використовуючи метод локального потенціалу (згідно з яким варіація виразу $J(u)$ за функцією u проводиться так, що члену $u \frac{\partial u}{\partial t}$ у рівнянні Ейлера відповідає $\frac{\partial u}{\partial t}$). Це приводить до системи лінійних диференціальних рівнянь відносно $C_k(t)$, $k = \overline{1, M-1}$:

$$A \frac{\partial C(t)}{\partial t} = BC(t) + F(t), \quad t > 0,$$

$$C(0) = C_0, \quad C(t) = (C_1(t), \dots, C_{M-1}(t)).$$

Матриці A, B, F знаходимо шляхом інтегрування по області G виразів

$$\frac{\partial}{\partial x} w_i(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} w_j(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} w_i(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} w_j(x, y), \quad w_i(x, y) w_j(x, y),$$

$$f(x, y, t) w_\delta(x, y) \quad (i, j = \overline{1, M-1}),$$

де вважається, що $u(x, y, t) = \sum_{i=1}^{M-1} C_i(t) w_i(x, y)$.

Конкретні явні вирази для функцій $w_i(x, y)$ опускаємо.

Для цієї задачі був проведений обчислювальний експеримент, результати якого наведено

далі. При $\Delta = 0,5$, $M = 5$ отримано наступні значення наближеного розв'язку (табл. 1) та точного розв'язку (табл. 2).

Таблиця 1

t	u(0,1; 0; t)	u(0,2; 0; t)	u(0,3; 0; t)	u(0,4; 0; t)
0	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0001	0,0159	0,0181	0,0121	0,0041
0,0002	0,0159	0,0181	0,0122	0,0041
0,0003	0,0158	0,0182	0,0122	0,0042
0,0004	0,0157	0,0182	0,0123	0,0043
0,0005	0,0157	0,0183	0,0124	0,0043
0,0006	0,0156	0,0184	0,0125	0,0044
0,0007	0,0156	0,0184	0,0126	0,0045
0,0008	0,0155	0,0185	0,0126	0,0046
0,0009	0,0155	0,0185	0,0127	0,0046
0,001	0,0154	0,0186	0,0128	0,0047

Таблиця 2

t	ut(0,1; 0; t)	ut(0,2; 0; t)	ut(0,3; 0; t)	ut(0,4; 0; t)
0	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0001	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0002	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0003	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0004	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0005	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0006	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0007	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0008	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0009	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,001	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040

Також наведено значення наближеного розв'язку $u(x_i; y_j; 0,001)$ (табл. 3) та точного розв'язку $ut(x_i; y_j; 0,001)$ (табл. 4) у вузлах сітки $x_i = -\Delta + \frac{\Delta}{M}(i-1)$, $y_j = -\Delta + \frac{\Delta}{M}(j-1)$, $i = \overline{1, 2M+1}$, $j = \overline{1, 2M+1}$, які належать області G .

Таблиця 3

$\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1											0
2										0	0
3								0	-0,0007		0
4							0	0,0002	-0,0009		0
5						0	0,0056	0,0041	0,0007		0
6					0	0,0154	0,0186	0,0128	0,0047		0
7				0	0,0154	0,0228	0,0197	0,0099	0		
8			0	0,0056	0,0186	0,0197	0,0120	0			
9		0	0,0002	0,0041	0,0128	0,0099	0				
10	0	-0,0007	-0,0009	0,0007	0,0047	0					
11	0	0	0	0	0						

Висновки. Аналізуючи результати цього прикладу, можна зробити висновок, що узагальнення запропонованого в роботах [1–5] методу розв'язання нестационарної задачі теплопровідно-

Таблиця 4

$\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1											0
2										0	0
3									0	0,0064	0
4								0	0,0112	0,0084	0
5						0	0,0144	0,0144	0,0072	0	0
6					0	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040	0	0
7				0	0,0160	0,0192	0,0144	0,0064	0		
8			0	0,0144	0,0180	0,0144	0,0072	0			
9		0	0,0112	0,0144	0,0120	0,0064	0				
10	0	0,0064	0,0084	0,0072	0,0040	0					
11	0	0	0	0	0						

сті для областей складної форми може бути проведено за стандартною технологією для різних областей, що зручно для чисельної реалізації.

1. Сергієнко І.В., Литвин О.М. Чисельна реалізація методу ЛІДР для рівняння нестационарної теплопровідності // Доп. АН УРСР. Сер.А. 1990. – № 10. – С. 69–73.
2. Дробот Є.І., Литвин О.М., Сергієнко І.В. Метод розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними з використанням інтерлінації функцій // Доп. НАНУ. – 2000. – № 2. – С. 67–73.
3. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи: Навч. посібник. – К.: Наук. думка, 2005. – 303 с.

4. Литвин О.М., Лобанова Л.С., Залужна Г.В. Розв'язання нестационарної задачі теплопровідності для пластини інтерлінаційним методом скінченних елементів // Пр. Міжнар. симп. «Питання оптимізації обчислень (ПОО – ХХХV)». – К.: Ін-т ім. В.М. Глушкова НАН України, 2009. – С. 14–19.
5. Литвин О.М., Лобанова Л.С., Залужна Г.В. Чисельна реалізація методу ЛІДР розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними. Матеріали XLIII наук.-практ. конф., Харків, УПА, 2009. – С. 47.
6. Литвин О.М., Лобанова Л.С., Залужна Г.В. Математичне моделювання поширення тепла за допомогою інтерлінації // Матеріали XV Всеукр. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів. нац. ун-т ім. Франка. 2008. – С. 77.
7. Про один підхід до розв'язання задачі нестационарної теплопровідності з двома просторовими змінними за допомогою кластера / О.М. Литвин, О.М. Хіміч, М.Ф. Яковлев та ін. // Інформатика та системні науки (ІСН-2010): матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2010. – С. 114–117.

Поступила 03.11.2011

Тел. для справок: (0572) 63-5923, 52-4389,

(057) 771-0545 (Харьков)

(0627) 44-7997, 3-7007, (050) 176-3623 (Артемовск)

E-mail: academ@kharkov.ua, ludmila_lobanova@mail.ru,
zal_artem@mail.ru

© О.Н. Литвин, Л.С. Лобанова, Г.В. Залужная, 2012

Литвин О.Н., Лобанова Л.С., Залужная Г.В.

Численная реализация метода линейных интегро-дифференциальных уравнений для уравнения нестационарной теплопроводности с двумя пространственными переменными

Введение. Метод конечных элементов решения начально-краевой задачи для нестационарного уравнения теплопроводности исследован в [1–5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + q(x, y)u = f(x, y, t)$$

с двумя пространственными переменными с использованием формул сплайн-интерполяции, построенных на основе сплайн-интерликации функций $u(x, y, t)$ с пространственными переменными x, y . Суть метода заключается в представлении приближенного решения в виде формул сплайн-интерполяции с пространственными переменными с коэффициентами, которые есть функциями переменной t . Метод основан на замене сплайнами следов приближенного решения в формулах интерликации, используемых для его представления, и представляет собой конечно-элементную реализацию метода *линейных интегро-дифференциальных уравнений* (ЛИДУ) реше-

ния дифференциальных уравнений с частными производными. В частности, в трудах [4–7] рассмотрено применение этого метода для решения нестационарной задачи теплопроводности для областей, которые есть объединением прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

В данной статье указанный метод распространяется на области, ограниченные дугами известных кривых. Рассмотрен пример.

Общий метод построения функции $u(x, y, t)$, точно удовлетворяющей условиям Дирихле на границе произвольной области $G \subset R^2$

Для построения структур решений начально-краевых задач используем метод [3] построения функций двух переменных x, y , точно удовлетворяющих граничным условиям на границе двумерных областей сложной формы (считаем t параметром).

С практической точки зрения существенным есть построение операторов интерликации на линиях ректангу-

ляции и триангуляции в областях сложной формы, ограниченных дугами известных кривых. Считаем, что $G \subset R^2$ – ограниченная область на плоскости, граница которой ∂G – объединение дуг известных кривых. Допустим, без потери общности, область G полностью размещена в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$. Разобьем G на подобласти прямыми $x = x_k, k = \overline{0, M_1}, y = y_l, l = \overline{0, M_2}, a = x_0 < x_1 < \dots < x_{M_1} = b; c = y_0 < y_1 < \dots < y_{M_2} = d$. Эти подобласти могут быть прямоугольниками $R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G$ или четырехугольниками $R_{i,j}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}(y)] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G, R_{i,j}^{(2)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \subset G, R_{i,j}^{(3)} = [x_i(y), x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G, R_{i,j}^{(4)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j(x), y_{j+1}] \subset G$, где три стороны параллельны осям координат, а одна – криволинейная (в общем случае) сторона – часть границы ∂G области G . Кроме того, подобласти, на которые разбивается область G , могут быть треугольниками

$$T_{i,j}^{(1)} = \{(x, y) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq \eta_{j+1}(x), \eta'_{j+1}(x) < 0\},$$

$$T_{i,j}^{(2)} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_j \leq y \leq \eta_{j+1}(x), \eta'_{j+1}(x) > 0\},$$

$$T_{i,j}^{(3)} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, \eta_{j-1}(x) \leq y \leq y_j, \eta'_{j-1}(x) < 0\},$$

$$T_{i,j}^{(4)} = \{(x, y) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}, \eta_{j-1}(x) \leq y \leq y_j, \eta'_{j-1}(x) > 0\},$$

где одна из сторон – криволинейная (в общем случае) часть границы ∂G области G .

Напишем формулу для интерликации на четырехугольнике $R_{i,j}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)]$, одна из сторон которого – криволинейная часть границы ∂G области G :

$$O_{i,j}^{(1)}F(x, y, t) = (P_1 + P_2 - P_1P_2)F(x, y, t),$$

$$P_1F(x, y, t) = \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)}F(x, y_j, t) +$$

$$+ \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j}F(x, y_{j+1}(x), t),$$

$$P_2F(x, y, t) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}F(x_i, y, t) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}F(x_{i+1}, y, t),$$

$$P_1P_2F(x, y, t) = \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)}P_2F(x, y_j, t) +$$

$$+ \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j}P_2F(x, y_{j+1}(x), t).$$

Теорема 1. Оператор $O_{i,j}^{(1)}F(x, y, t)$ интерлинирует функцию $F(x, y, t) \in C(R_{i,j}^{(1)})$ на границе четырехугольника $R_{i,j}^{(1)}$ с криволинейной стороной: $O_{i,j}^{(1)}F(x, y, t) = F(x, y, t), (x, y) \in \partial R_{i,j}^{(1)},$ т.е. $O_{i,j}^{(1)}F(x_q, y, t) = F(x_q, y, t), q = i, i+1;$

$$O_{i,j}^{(1)}F(x, y_j, t) = F(x, y_j, t), O_{i,j}^{(1)}F(x, y_{j+1}(x), t) = F(x, y_{j+1}(x), t).$$

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой.

Аналогично строятся интерлианты, которые интерлинируют функцию $F(x, y, t)$ на сторонах четырехугольников $R_{i,j}^{(2)}, R_{i,j}^{(3)}, R_{i,j}^{(4)}$ с криволинейными сторонами.

Напишем теперь формулу для интерликации на прямоугольном треугольнике с криволинейной гипотенузой (т.е. на треугольнике с катетами, параллельными осям координат, и криволинейной гипотенузой). Будем рассматривать прямоугольный треугольник с вершинами $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ и гипотенузой $\cup AB$, определяемой уравнением $f(x) + g(y) = 1$, функции $f(x), g(y)$ непрерывны и монотонны на $[0,1]$ и удовлетворяют условиям $f(0) = 0, f(1) = 1, g(0) = 0, g(1) = 1$.

Теорема 2. Пусть $F(x, y, t) \in C(T), P_1F(x, y, t) = f(x)F(f^{-1}(1 - g(y)), y, t) + g(y)F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t), P_2F(x, y, t) = F(x, 0, t) + F(0, y, t) - F(0, 0, t)$. Тогда оператор $P_{12}F(x, y, t) = (P_1 \oplus P_2)F(x, y, t) := (P_1 + P_2 - P_1P_2) \times F(x, y, t) = f(x)F(f^{-1}(1 - g(y)), y, t) + g(y) \times F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t) + F(x, 0, t) + F(0, y, t) - F(0, 0, t) - f(x)[F(0, y, t) + F(f^{-1}(1 - g(y)), 0, t) - F(0, 0, t)] - g(y)[F(0, g^{-1}(1 - f(x)), t) + F(x, 0, t) - F(0, 0, t)]$ (1)

интерлинирует функцию $F(x, y, t)$ на трех сторонах треугольника $T_{i,j}$, т.е.

$$P_{12}F(x, 0, t) = F(x, 0, t), P_{12}F(0, y, t) = F(0, y, t), (2)$$

$$P_{12}F(x, y, t) = F(x, y, t), \text{ если } f(x) + g(y) = 1. (3)$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть операторы $OR_{i,j}^{(q)}F(x, y, t), q = 0, 1, \dots, 4$ интерлинируют функцию $F(x, y, t)$ на сторонах четырехугольников $R_{i,j}^{(q)}, q = 0, 1, \dots, 4$, а операторы $OT_{i,j}^{(q)}F(x, y, t), q = 1, \dots, 4$ интерлинируют функцию $F(x, y, t)$ на сторонах треугольников $T_{i,j}^{(q)} \subset G$ с криволинейной (в общем случае) гипотенузой (определенных ранее).

Тогда оператор

$$O_GF(x, y, t) = \begin{cases} OR_{i,j}^{(q)}F(x, y, t), & (x, y) \in R_{i,j}^{(q)}, q = 0 \vee 1 \vee \dots \vee 4 \\ OT_{i,j}^{(q)}F(x, y, t), & (x, y) \in T_{i,j}^{(q)}, q = 1 \vee \dots \vee 4 \end{cases} \forall t \geq 0$$

интерлирует функцию $F(x, y, t)$ на прямых $x = x_k \in [a, b]$ $y = y_i \in [c, d]$, а также на границе ∂G произвольной области G , т.е. $O_G F(x_k, y, t) = F(x_k, y, t)$, $O_G F(x, y_i, t) = F(x, y_i, t)$, $O_G F(x, y, t) = F(x, y, t)$, $(x, y) \in \partial G$. При этом $O_G F(x, y, t) \in C(G) \quad \forall F(x, y, t) \in C(G) \quad \forall t \geq 0$. Это позволяет утверждать, что $O_G F(x, y, t) \in W_2^1(G) \quad \forall t \geq 0$, поскольку

$$\begin{aligned} & \iint_G \left[(O_G F)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ & = \sum_{R_{ij}^{(q)} \subset G} \iint_{R_{ij}^{(q)}} \left[(O_G F)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \\ & + \sum_{T_{ij}^{(q)} \subset \partial G} \iint_{T_{ij}^{(q)}} \left[(O_G F)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial O_G F}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy < \infty. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. Если неизвестны следы $F(x_k, y, t) = \varphi_k(y, t)$, $F(x, y_i, t) = \psi_i(x, t)$, то их можно заменить на некоторые функции (полиномы, сплайны) с неизвестными параметрами. В результате $O_G F(x, y, t)$ преобразуется в функцию, сходящуюся с функцией $F(x, y, t)$ на границе ∂G области G независимо от выбора указанных параметров. Такого типа функции можно использовать для приближения функции $F(x, y, t)$, исходя из тех или других требований к выбору неизвестных параметров.

Относительно интерлиации на треугольнике имеют следующие утверждения.

Теорема 4. Пусть

$$\begin{aligned} P_{12} F(x, y, t) = & (1 - f(x) - g(y)) [F(x, 0, t) + F(0, y, t) - \\ & - F(0, 0, t)] + f(x) [F(f^{-1}(1 - g(y)), y, t) - \\ & - F(f^{-1}(1 - g(y)), 0, t) + F(x, 0, t)] + \\ & + g(y) [F(x, g^{-1}(1 - f(x)), t) - \\ & - F(0, g^{-1}(1 - f(x)), t) + F(0, y, t)]. \end{aligned}$$

Тогда для остатка $R_{12} F(x, y, t) = (I - P_{12}) F(x, y, t)$ $\forall F \in C^{1,1}(T)$ выполняется соотношение:

$$\begin{aligned} R_{12} F(x, y, t) = & (1 - f(x) - g(y)) \times \\ & \times \int_0^x \int_0^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + f(x) \times \\ & \times \int_{\xi=x}^{f^{-1}(1-g(y))} \int_{\eta=0}^y F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + g(y) \times \\ & \times \int_{\xi=0}^x \int_{\eta=y}^{g^{-1}(1-f(x))} F^{(1,1,0)}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема 4 доказана.

Приведем два примера.

Пример 1. В методе конечных элементов при решении краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными для областей сложной формы значителен вопрос удовлетворения краевым условиям (особенно неоднородным). В таких задачах использование операторов интерлиации функций необходимо.

Пример 2. Использование операторов интерлиации функций полезно также в методе наименьших квадратов при приближении функции с помощью конечного количества ее значений во внутренних точках области G и с помощью ее следов на дугах известных кривых внутри области G или таких кривых, объединение которых – граница области G , и др. Следует отметить, что классический вариант метода наименьших квадратов для приближения функций двух переменных использует лишь значение функции в некоторой системе точек (или некоторую другую систему функционалов от приближенной функции) и не использует следы приближенной функции на некоторых линиях. Очевидно, такая информация, как следы приближенной функции на некоторой системе линий, значительно более информативна, но до появления интерлиации функций исследователи не имели возможность ее использовать.

Учитывая это, приведем еще два утверждения.

Теорема 5. Пусть G – треугольник с криволинейной границей ∂G , $G = \{x \geq 0, y \geq 0, f(x) + g(y) \leq 1\}$ и $F(x, y, 0) = \varphi(x, y)$ Тогда функция $H(x, y, t) = \varphi(x, y) + U(x, y, t) - U(x, y, 0)$, где $U(x, y, t) = P_{12} F(x, y, t)$ удовлетворяет начальные $H(x, y, 0) = \varphi(x, y)$ и граничные $H(x, y, t) = U(x, y, t)$, $(x, y) \in \partial G$ условия ($F(x, y, t)$ – произвольная непрерывная в G функция), т.е. $P_{12} F(x, y, 0)|_{\partial G} = \varphi(x, y)|_{\partial G}$, $P_{12} F(x, y, t) = F(x, y, t) \quad \forall (x, y) \in \partial G$ и $\forall t \geq 0$.

Теорема 5 доказана.

Доказательство получается при использовании теоремы 5 и непосредственной подстановкой $F(x, y, t)$ в уравнение (6) с учетом равенства (7).

Пример. Рассмотрим задачу нестационарной теплопроводности в области G , представляющую собой равнобедренную трапецию

$$\begin{aligned} G = & \left\{ (x, y) \mid x + y \geq 0, 1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta} \geq 0, \right. \\ & \left. G = x \leq \Delta, y \leq \Delta \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & \Delta u - e^{-t} \left((x+y)(x-\Delta)(y-\Delta) \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta} \right) + \right. \\ & \left. + 4(x-\Delta) \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{3y}{2\Delta} \right) + 4(y-\Delta) \left(1 - \frac{3x}{2\Delta} - \frac{y}{\Delta} \right) \right), \\ & (x, y) \in G, t > 0, \end{aligned}$$

$$u(x, y, 0) = (x + y)(x - \Delta)(y - \Delta) \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta}\right),$$

$$u(x, y, t)|_{\partial G} = 0.$$

Разобьем область G осями координат на треугольники T_1, T_2, T_3 (рисунок): $G = T_1 \cup T_2 \cup T_3$,

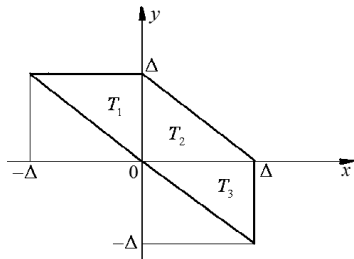
$$T_1 = \{(x, y) | -\Delta \leq x \leq 0, -x \leq y \leq \Delta\},$$

$$T_2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \Delta\},$$

$$T_3 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \Delta, -x \leq y \leq 0\}.$$

Обозначим $u(0, y, t) = \psi(y, t)$, $u(x, 0, t) = \varphi(x, t)$.

Учитывая симметрию задачи, получаем $\varphi(x, t) = \psi(x, t)$.



Пользуясь изложенным, построим функцию $u(x, y, t)$:

$$u(x, y, t) = \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{\Delta}\right)\varphi(y, t) - \left(1 - \frac{y}{\Delta}\right)\varphi(-x, t), \\ \quad -\Delta \leq x \leq 0, -x \leq y \leq \Delta, \\ \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right)\varphi(y, t) + \left(1 - \frac{y}{\Delta}\right)\varphi(x, t) - \\ \quad - \frac{x}{\Delta}\varphi(\Delta - y, t) - \frac{y}{\Delta}\varphi(\Delta - x, t), \\ \quad x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \Delta, \\ \left(1 + \frac{y}{\Delta}\right)\varphi(x, t) - \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right)\varphi(-y, t), \\ \quad 0 \leq x \leq \Delta, -x \leq y \leq 0. \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет однородным граничным условиям независимо от выбора функции $\varphi(x, t)$ и сходится с $\varphi(x, t)$ на линии $y = 0$ и с функцией $\varphi(y, t)$ на линии $x = 0$, если $\varphi(0, t) = 0$, $\varphi(\Delta, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

Будем искать функцию $\varphi(x, t)$ в виде сплайна первой степени

$$\varphi(x, t) = \sum_{k=1}^{M-1} C_k(t) h_k(Mx - k), \quad h(z) = \frac{1}{2}(|z-1| - 2|z| + |z+1|).$$

Функции $C_k(t)$, $k = \overline{1, M-1}$ найдем, минимизируя выражение

$$J(u) = \iint_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - f(x, y, t)\right) u \right) dx dy,$$

с использованием метода локального потенциала (согласно которому вариация выражения $J(u)$ по функции u проводится так, что члену $u \frac{\partial u}{\partial t}$ в уравнении Эйлера соответствует $\frac{\partial u}{\partial t}$). Это приводит к системе линейных дифференциальных уравнений относительно $C_k(t)$, $k = \overline{1, M-1}$:

$$A \frac{\partial C(t)}{\partial t} = BC(t) + F(t), \quad t > 0, \quad C(0) = C_0, \quad C(t) = (C_1(t), \dots, C_{M-1}(t)).$$

Матрицы A, B, F находим путем интегрирования по области G выражений $\frac{\partial}{\partial x} w_i(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} w_j(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} w_i(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} w_j(x, y)$, $w_i(x, y) w_j(x, y)$, $f(x, y, t) \times w_8(x, y)$ ($i, j = \overline{1, M-1}$), где считается, что $u(x, y, t) = \sum_{i=1}^{M-1} C_i(t) w_i(x, y)$.

Конкретные явные выражения для функций $w_i(x, y)$ опускаем.

Для этой задачи проведен вычислительный эксперимент, результаты которого приведены далее. При $\Delta = 0,5$, $M = 5$ получены следующие значения приближенного (табл. 1) и точного решений (табл. 2).

Таблица 1

t	$u(0,1; 0; t)$	$u(0,2; 0; t)$	$u(0,3; 0; t)$	$u(0,4; 0; t)$
0	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0001	0,0159	0,0181	0,0121	0,0041
0,0002	0,0159	0,0181	0,0122	0,0041
0,0003	0,0158	0,0182	0,0122	0,0042
0,0004	0,0157	0,0182	0,0123	0,0043
0,0005	0,0157	0,0183	0,0124	0,0043
0,0006	0,0156	0,0184	0,0125	0,0044
0,0007	0,0156	0,0184	0,0126	0,0045
0,0008	0,0155	0,0185	0,0126	0,0046
0,0009	0,0155	0,0185	0,0127	0,0046
0,001	0,0154	0,0186	0,0128	0,0047

Таблица 2

t	$ut(0,1; 0; t)$	$ut(0,2; 0; t)$	$ut(0,3; 0; t)$	$ut(0,4; 0; t)$
0	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0001	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0002	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0003	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0004	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0005	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0006	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0007	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0008	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,0009	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040
0,001	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040

Окончание на стр. 24

Также приведены значения приближенного решения $u(x_i; y_j; 0,001)$ (табл.3) и точного решения $ut(x_i; y_j; 0,001)$ (табл. 4) в узлах сетки $x_i = -\Delta + \frac{\Delta}{M}(i-1)$, $y_j = -\Delta + \frac{\Delta}{M}(j-1)$, $i = \overline{1, 2M+1}$, $j = \overline{1, 2M+1}$, принадлежащие области G .

Таблица 3

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1											0
2										0	0
3									0	-0,0007	0
4								0	0,0002	-0,0009	0
5						0	0,0056	0,0041	0,0007	0	0
6					0	0,0154	0,0186	0,0128	0,0047	0	0
7				0	0,0154	0,0228	0,0197	0,0099	0		
8			0	0,0056	0,0186	0,0197	0,0120	0			
9		0	0,0002	0,0041	0,0128	0,0099	0				
10	0	-0,0007	-0,0009	0,0007	0,0047	0					
11	0	0	0	0	0						

Таблица 4

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1											0
2										0	0
3									0	0,0064	0
4								0	0,0112	0,0084	0
5							0	0,0144	0,0144	0,0072	0
6						0	0,0160	0,0180	0,0120	0,0040	0
7					0	0,0160	0,0192	0,0144	0,0064	0	
8			0	0,0144	0,0180	0,0144	0,0072	0			
9		0	0,0112	0,0144	0,0120	0,0064	0				
10	0	0,0064	0,0084	0,0072	0,0040	0					
11	0	0	0	0	0	0					

Заключение. Анализируя результаты этого примера, можно сделать вывод, что обобщение предложенного в работах [1–5] метода решения нестационарной задачи теплопроводности для областей сложной формы может быть проведено по стандартной технологии для разных областей, что удобно для численной реализации.