

А.А. Родионов, Е.Ф. Перлов, И.В. Устенко

Расчет прочности протеза тазобедренного сустава

Предпринята попытка создания математической модели силового расчета протеза тазобедренного сустава как в статическом, так и в динамическом режиме.

An attempt is made of creating a mathematical model of the durability of the joint prosthetic device in static and dynamic modes.

Здійснено спробу створення математичної моделі силового розрахунку протеза тазостегнового суглоба як у статичному, так і в динамічному режимі.

Введение. Одним из самых травмоопасных участков костно-мышечной системы организма человека при падении есть область таза и особенно тазобедренный сустав. Наибольшие издержки при этом испытывают пожилые люди, у которых падение часто приводит к перелому тазобедренного сустава, что трудно поддается лечению, а иногда приводит к инвалидности. В подобных случаях приходится прибегать к протезированию, а значит, необходим силовой математический расчет прочной и легкой конструкции протеза, надежной как в режиме статики, так и в динамическом режиме.

Силовой расчет в статике

Рассматривается стоячее, без движения, положение человека.

Силовые воздействия показаны в виде эпюр на рис. 1 в двух ортогональных направлениях x и y .

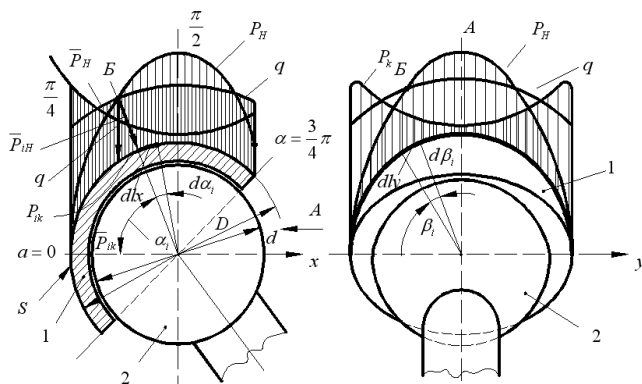


Рис. 1

Масса m человека под действием гравитации составляет его вес P . Этот вес действует на наружную сферическую обойму 1, закрепленную на кости таза, внутри которой находится опора 2 в виде шара, закрепляемая на бедренной кости.

Эпюра q представляет собой среднюю распределенную нагрузку на обойму 1, а через нее – и на шаровую опору 2 от воздействия массы тела. Рассмотрим какой-либо силовой элемент q_i , действующий в пределах угла α_i . Этот элемент может быть представлен векторной суммой, нормально направленной к обойме силы \bar{P}_{iH} и касательной силы \bar{P}_{ik} :

$$P_H = Kq \sin \alpha, \quad (1)$$

$$P_k = Kq \cos \alpha, \quad (2)$$

где K – коэффициент, обеспечивающий равенство площадей эпюр P_H и q .

Определим суммарное воздействия на опору 2 от действия нормальной силы P_{iH} . Очевидно, что это воздействие можно определить как интегральное произведение закона изменения нормальной силы \bar{P}_{iH} в соответствии с (1) на суммарную площадь воздействия. Выделим на поверхности S элементарную площадку $ds = dx \cdot dy$:

$$ds = \left(\frac{D}{2} \cdot d\alpha_i \right) \left(\frac{D}{2} \cdot d\beta_i \right), \quad (3)$$

тогда суммарное усиление P можно представить с учетом (1) и (3):

$$P = \frac{D^2}{4} Kq \int \int \sin \alpha d\alpha \cdot \sin \beta d\beta$$

и при условии, что диапазон изменения углов равен

$$\begin{aligned} \alpha_0 \leq \alpha_i \leq \alpha, \quad P &= \frac{D^2}{4} Kq \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sin \alpha d\alpha \int_{\beta_0}^{\beta} \sin \beta d\beta = \\ \beta_0 \leq \beta_i \leq \beta, \quad &= \frac{D^2 Kq}{4} \left[\left(-\cos \alpha \Big|_{\alpha_0}^{\alpha} \right) \left(-\cos \beta \Big|_{\beta_0}^{\beta} \right) \right]. \end{aligned}$$

Окончательно после преобразований получим:

$$P = \frac{D^2 K q}{4} (\cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta_0 - \cos \beta \cos \alpha_0 - \cos \alpha_0 \cos \beta_0). \quad (4)$$

Величина q средней распределенной нагрузки составит: $q = m/F$, где F – площадь, на которую воздействует масса m , и тогда (4) окончательно примет вид

$$P = \frac{D^2 K m}{4S} (\cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta_0 - \cos \beta \cos \alpha_0 - \cos \alpha_0 \cos \beta_0). \quad (5)$$

Из эпюр видно, что максимальное значение P_H значительно превышает среднераспределенную нагрузку q . Найдем величину этого превышения, т.е. величину коэффициента K . Величину этого коэффициента найдем из условия равенства площадей эпюр q и P_H . Площадь S_q эпюры q равна

$$S_q = \frac{D}{2} \alpha q \quad (6)$$

Площадь S_{PH} эпюр P_H равна $S_{PH} = Kq \frac{D}{2} \int_0^\alpha \sin \alpha d\alpha = -Kq \frac{D}{2} \cos \alpha \Big|_0^\alpha$, а наибольшее (амплитудное) значение K будет при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, тогда

$$S_{PH} = Kq \frac{D}{2}. \quad (7)$$

При $S_q = S_{PH}$

$$\frac{D}{2} \alpha q = Kq \frac{D}{2} \text{ и } K = \frac{\pi}{2}, \quad (8)$$

т.е. амплитудное значение распределенного нормального усилия будет в 1,57 раза превышать среднее значение распределенного усилия q .

Определим зону действия этого превышающего усилия. Найдем угол α , при котором $q = P_H$. Подставив в (1) значения $K = \frac{\pi}{2}$, получим $q = \frac{\pi}{2} q \sin \alpha$, т.е. $\sin \alpha = \frac{2}{\pi} = 0,639$, при этом $\alpha = 44,1^\circ$.

Радиус r площадки, на которой действует усилие P_H , превышающее равномернораспределенное усилие q , равен:

$$r = \frac{D}{2} \cos \alpha = 0,769 \frac{D}{2} = 0,385D,$$

а площадь, на которую воздействует это усилие, будет равна

$$F = 0,465D^2 \quad (9)$$

Именно эта площадь и находится под действием наибольшего усилия, именно она – концентратор напряжений и именно исходя из нее следует выполнять силовой расчет в статике, увеличив тем самым в 1,57 раза расчетное значение нагрузки.

Силовой расчет в динамике

При движении человека возникают скорости и ускорения и связанные с этим дополнительные усилия, действующие на протез тазобедренного сустава. Аксонометрическое изображение этих скоростей и ускорений представлено на рис. 2, где \bar{v}_0 – относительная линейная

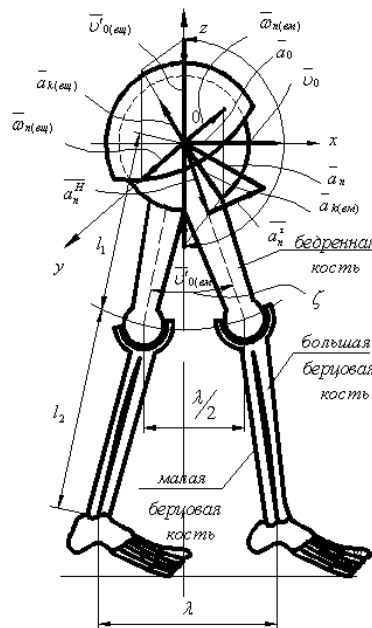


Рис. 2

скорость движения человека, $\bar{\omega}$ – переносная угловая скорость поворота бедренной кости, линейные переносные ускорения: суммарное \bar{a}_n , нормальное \bar{a}_n^H , тангенциальное \bar{a}_n^τ и поворотное (Кориолисово) ускорение \bar{a}_k .

Обозначения: вщ, вв – соответственно ведущая (делающая шаг) нога и ведомая нога.

Рассмотрим каждую из этих составляющих

- Относительное ускорение a_0 :

$$v_{0cp} = \frac{v_{0max} - v_{0min}}{2}, v_{0min} = 0$$
 (начало движения), $v_{0max} = 2v_{0cp}$ (v_{0cp} – средняя скорость движения человека), тогда,

$$\alpha_0 = \frac{v_{max}}{t} = \frac{2v_{0cp}}{t}, \quad (10)$$

где t – время одного шага, с.

- Переносное ускорение a_n :

Угловая скорость $\omega_n = \frac{\zeta}{t}$ где ζ – угол поворота бедренной кости, рад.

$\zeta \cong \frac{\lambda}{2l_1}$, следовательно, переносная угловая

скорость и угловое ускорение таковы:

$$\omega_n = \frac{\lambda}{2l_1 t}, \quad \varepsilon_n \cong \frac{\omega_n}{2t}. \quad (11)$$

Центробежное переносное ускорение a_n^H :

$$a_n^H = l_1 \omega_n^2. \quad (12)$$

Касательное переносное ускорение a_n^τ :

$$a_n^\tau = l_1 \omega_n. \quad (13)$$

Суммарное переносное ускорение a_n :

$$a_n = \sqrt{(a_n^H)^2 + (a_n^\tau)^2}. \quad (14)$$

- Кориолисово ускорение a_k :

$$a_k = 2\omega_n v_{0max} \sin(\bar{\omega}_n \cdot \bar{v}_{0max}). \quad (15)$$

- Абсолютное ускорение a_a , отнесенное к точке приведения О:

$$a_a = \sqrt{a_0^2 + a_n^2 + a_k^2}. \quad (16)$$

Динамическая составляющая усилия, прикладываемая к точке приведения О с учетом (16)

$$F = m\sqrt{a_0^2 + a_n^2 + a_k^2}.$$

Расчет с учетом реальных данных применительно к параметрам человека средней антропометрии (масса $m=70$ кг, $l_1=l_2=0,4$ – длина бедренной кости, $\lambda=0,4$ – длина одного шага, $t=0,5$ с – время одного шагового цикла (два

шага), что соответствует относительной скорости $v_{0cp}=0,8$ м/с = 3 км/ч) показывает, что динамическая составляющая дает увеличение усилия на 30 процентов.

Таким образом, получены исходные данные для комплексного расчета с учетом не только статического, но и динамического воздействия на шарнирную часть протеза тазобедренного сустава. Далее проводится непосредственно силовой расчет протеза этого сустава, выполняемый с использованием традиционных методов теории сопротивления материалов в зависимости от конструкции этого протеза: обойма рассматривается либо как криволинейная балка, нагружаемая неравномерно, либо как элемент сферы, находящийся под действием той же нагрузки (теория оболочек). В обоих случаях расчет может быть выполнен достаточно просто с учетом [1] или [2].

Заключение. Полученные результаты предостерегают от упрощенного подхода к решению проблемы, опираясь на усредненное распределенное усилие, и показывают, что реальные нагрузки могут значительно превышать это среднее значение: в статике – до 60 процентов, в динамике – до 30 процентов. Следовательно, суммарное нагружение в зоне экстремального воздействия достигает двукратного увеличения в сравнении со среднеарифметической распределенной нагрузкой и действует на локальной площади.

Указанные факторы необходимо учитывать при создании протеза тазобедренного сустава с целью получения корректного результата и создания достаточно прочной, надежной и в то же время легкой конструкции протеза.

1. Писаренко Г.С., Азарев В.А., Квитка А.Л. Сопротивление материалов. – Киев: Вища шк., 1986. – 776 с.
2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 608 с.

Поступила 11.07.2012

Тел. для справок: +38 044 526-0688 (Киев)

© А.А. Родионов, Е.Ф. Перлов, И.В. Устенко, 2013