УДК 519.718

Б.Є. Рицар

Числова теоретико-множинна інтерпретація поліномів Ріда–Маллера з фіксованою та змішаною полярністю

Рассмотрена числовая теоретико-множественная интерпретация полиномов Рида–Маллера с фиксированной и смешанной полярностью, на основе которой разработан простой метод непосредственного преобразования логической функции от *n* переменных из дизъюнктивного формата в полиномиальный, и наоборот. Преимущества метода подтверждены примерами.

A numeric set-theoretical interpretation of Reed-Muller expressions with fixed and mixed polarity has been considered. On the basis of this a simple method of direct converting the logical function of *n* variables from the disjunctive in polynomial format and vice versa has been devised. The advantages of the suggested method are illustrated by the examples.

Розглянуто числову теоретико-множинну інтерпретацію поліномів Ріда–Маллера з фіксованою та змішаною полярністю, на основі якої розроблено простий метод безпосереднього перетворення логікової функції від *n* змінних з диз'юнктивного формату в поліномний, і навпаки. Переваги методу підтверджено прикладами.

Вступ. Стаття є логічним продовженням роботи [1], де розглянуто числову теоретико-множинну інтерпретацію поліномів Жеґалкіна, і присвячена числовій теоретико-множинній інтерпретації *RM*-поліномів з фіксованою (*FPRM*) і змішаною (*MPRM*) полярністю та основаному на цьому новому методі взаємного перетворення диз'юнктивного і поліномного форматів зображення логікових функцій від *n* змінних.

Теоретичні основи

Довільну логікову функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна зобразити у поліномній нормальній формі (ПНФ) (*Exclusive-OR Sum-Of-Product form – ESOP*), утвореній двомісними операціями – кон'юнкцією (*AND*) і сумою за mod 2 (*EXOR*) та константою одиниці; інверсія довільної змінної одержується операцією $x \oplus 1 = \bar{x}$. При цьому, залежно від того, які змінні кон'юнктермів ПНФ *f* (усі чи деякі з них) мають або не мають знак інверсії, що визначає так звану *полярність змінних*, розрізняють певні класи *AND-EXOR* виразів ПНФ *f*. У загальному випадку їх називають *поліномами* (*виразами*) *Ріда–Маллера* (*Reed–Muller expressions – RM*-поліноми). Класифікація *RM*-поліномів, відношення між різними класами і складність їх реалізації описано в [2–4].

Довільну логікову функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна розкласти до одного з видів:

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = \bar{x}_i f_0 \oplus x_i f_1, \tag{1}$$

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = f_0 \oplus x_i f_2, \tag{2}$$

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = f_1 \oplus \bar{x}_i f_2, \tag{3}$$

де $f_0 = f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$, $f_1 = f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)$, $f_2 = f_0 \oplus f_1$.

Вирази (1) – (3) – це відповідно розклад Шеннона (*Shannon expansion*), позитивний розклад Давія (*positive Davio expansion*) і негативний розклад Давія (*negative Davio expansion*). Причому, (2) і (3) одержуються з (1), якщо в першому випадку замість $\bar{x}_i$ записати $x_i \oplus 1$, а в другому – замість x_i записати $\bar{x}_i \oplus 1$. Наприклад, (2) одержимо так: $\bar{x}_i f_0 \oplus x_i f_1 = (x_i \oplus 1) f_0 \oplus x_i f_1 = f_0 \oplus$ $\oplus x_i (f_0 \oplus f_1) = f_0 \oplus x_i f_2$. Застосовуючи розклади (1) – (3) до всіх або до деяких змінних заданої функції *f*, одержимо різні класи *RM*-поліномів.

Порівняно з традиційним диз'юнктивним зображенням *RM*-поліноми мають чимало переваг [2–8]. У цій статті розглянуто *RM*-поліноми, найчастіше застосовувані в різних оптимізаційних задачах логікового синтезу цифрових пристроїв.

RM-поліном, утворений довільним вибором полярності *n* змінних логікової функції *f*, називають *узагальненим RM-поліномом* (*Generalized Reed–Muller expression – GRM*-поліном):

$$f = c_0 \oplus c_1\tilde{x}_1 \oplus c_2\tilde{x}_2 \oplus \ldots \oplus c_n\tilde{x}_n \oplus c_{12}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \oplus \ldots$$
$$\ldots \oplus c_{13}\tilde{x}_1\tilde{x}_3 \oplus \ldots \oplus c_{1,2,\ldots,k}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \cdots \tilde{x}_k \oplus \ldots$$
$$\ldots \oplus c_{1,2,\ldots,n}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \cdots \tilde{x}_n = \bigoplus_{I=0}^{2^n-1} c_I \theta_I\,, \tag{4}$$

де $\tilde{x}_i \in \{\bar{x}_i, x_i\}$ означає, що кожна змінна в кон'юнктермах ПНФ *f* (4) має нефіксовану полярність; $c_I \in \{0,1\}$ – коефіцієнти кон'юнктермів θ_I, $I \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, причому $\theta_0 = 1$.

Різних *GRM*-поліномів (4) для функції *f* від *n* змінних можна отримати не більше $2^{n2^{n-1}}$ [3].

Вираз ПНФ *f*, утворений розкладом (2) до одних змінних і розкладом (3) до решти змінних, унаслідок чого кожна змінна функції *f* матиме певну зафіксовану (позитивну або негативну) полярність, називають *поліномом Ріда–Маллера з фіксованою полярністю* (*Fixed Polarity Reed–Muller expression – FPRM*-поліном):

$$f = c_0 \oplus c_1\hat{x}_1 \oplus c_2\hat{x}_2 \oplus \ldots \oplus c_n\hat{x}_n \oplus c_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2 \oplus \ldots$$
$$\ldots \oplus c_{13}\hat{x}_1\hat{x}_3 \oplus \ldots \oplus c_{1,2,\ldots,k}\hat{x}_1\hat{x}_2 \ldots$$
$$\cdots\hat{x}_k \oplus \ldots \oplus c_{1,2,\ldots,n}\hat{x}_1\hat{x}_2 \cdots \hat{x}_n = \bigoplus_{I=0}^{2^n-1} c_I \theta_I, \qquad (5)$$

де позначення кожної змінної (з «випуклим дашком») $\hat{x}_i$ означає, що в кон'юнктермах ПНФ *f* одні змінні не мають знаку інверсії, а інші мають цей знак; $c_I \in \{0,1\}$, $\theta_0 = 1$.

Різних *FPRM*-поліномів (5) функція *f* від *n* змінних може мати не більше 2^n [3].

Якщо задану функцію *f* розкладати до вигляду (2), то одержимо *PPRM*-поліном (*Positive Polarity Reed–Muller expression*), тобто поліном (*n*-го степеня) Жеґалкіна, усі змінні якого мають позитивну полярність. Відповідно, якщо задану функцію *f* розкладати до вигляду (3), то одержимо *NPRM*-поліном (*Negative Polarity Reed–Muller expression*), усі змінні якого мають негативну полярність. Зазначимо, що *PPRM*-поліном (поліном Жеґалкіна) і *NPRM*-поліном (на практиці зустрічається зрідка) – єдині (канонічні) вирази ПНФ будь-якої функції *f*, для яких проблема мінімізації не існує.

Якщо (2) і (3) застосовувати до кожної змінної заданої функції *f*, то одержимо так званий *RM-поліном зі змішаною полярністю* (*Mixed Polarity Reed–Muller expression – MPRM*-поліном; у [3–5] називають *поліномом Кронекера* (*Kronecker expression*)), де в (5) $\hat{x}_i = \{\bar{x}_i, x_i\}$, тобто всі змінні мають обидві полярності. Порівняно з *FPRM*-поліномом (5) *MPRM*-поліном є більш загальним виразом. Для функції від *n* змінних існує не більше 3^n різних *MPRM*-поліномів [3]. Оскільки в цьому випадку змінні не обмежені тією чи іншою полярністю, то серед *MPRM*-поліномів більш імовірно знайти такий, який буде компактніший, ніж будь-який *FPRM*-поліном.

Клас *GRM*-поліномів, як бачимо, містить всі розглянуті класи *RM*-поліномів. Але серед *AND-EXOR* виразів найбільш загальним є вираз ПНФ *f* (*ESOP*), утворений кон'юнктермами довільних рангів $r \in \{0,1,\ldots,n\}$:

$$f = \bigoplus_I \tilde{x}_1\tilde{x}_2 \cdots \tilde{x}_n, \qquad (6)$$

де індекс *I* символізує множину всіх можливих кон'юнктермів, а $\tilde{x}_i \in \{1, \bar{x}_i, x_i\}$, тобто кожна змінна $\tilde{x}_i$ може бути вибрана як одиниця, $\bar{x}_i$ або x_i, незалежно від іншого вибору для $\tilde{x}_i$; причому, якщо $\tilde{x}_i \in \{\bar{x}_i, x_i\}$, то це досконала ПНФ *f*, яка, до речі, дорівнює досконалій ДНФ *f* після заміни символа $\oplus$ на $\vee$.

Як зазначено в [3], ефективних алгоритмів мінімізації ПНФ *f* не існує.

Для порівняння проілюструємо згадані поліноми прикладами:

- $x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3$ – *PPRM*-поліном, тобто поліном Жеґалкіна;
- $\bar{x}_1\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ – *NPRM*-поліном;
- $\bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_1x_2x_3$ – *FPRM*-поліном;
- $\bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$ – *MPRM*-поліном (або поліном Кронекера);
- $x_1 \oplus x_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2$ – *GRM*-поліном.

Постановка задачі

Для розв'язання різних оптимізаційних задач логікового синтезу потрібно мати *RM*-поліноми з мінімальною кількістю кон'юнктермів заданої функції *f*. При цьому, якщо існує можливість вибору *RM*-полінома (за винятком *PPRM*- і *NPRM*-поліномів), то в разі однакової кількості кон'юнктермів перевага надається *RM*-поліному з мінімальною сумарною кількістю літералів, а коли кількість останніх однакова *мінімальним RM-поліномом* уважається той, що має мінімальну кількість негативно споляризованих літералів. Отже, *кошт реалізації RM*-полінома заданої функції *f* можна оцінювати числовим співвідношенням $k_\theta / k_l / k_{in}$, де k_θ, k_l, k_{in} – кількість кон'юнктермів, літералів та інверторів відповідно.

На відміну від функцій, заданих в диз'юнктивній формі зображення, у поліномному форматі існує можливість розв'язувати оптимізаційну задачу логікового синтезу за допомогою пошуку такої полярності *RM*-полінома функції *f*, яка б забезпечувала мінімальний кошт реалізації $k_\theta/k_l/k_{in}$. Така властивість *RM*-поліномів, порівняно з ДНФ *f*, є ще одною з переваг поліномного формату [8–13].

Пошук оптимальної полярності *RM*-поліномів належить до складних комбінаторних задач. Тому важливо, щоб цей процес був забезпечений простими, швидкими засобами перетворення функції з заданого диз'юнктивного формату зображення у поліномний, і навпаки. Разом з тим заміна логікових базисів призводить до необхідності розв'язання нових оптимізаційних задач. Відомі методи взаємного перетворення логікових базисів переважно ґрунтуються на аналітичному [3, 5, 6, 11], табличному [9, 10, 14] або матрично-векторному [5, 7, 8, 13] підходах, які з відомих причин мають певні обмеження в комп'ютерній реалізації.

Основна частина

Як показано в [15], будь-який аналітичний кон'юнктерм рангу $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ логікової функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна зобразити в теоретико-множинному вигляді як трійкове (або двійкове) число або як множину десяткових чисел. Наприклад, кон'юнктерм третього рангу $\bar{x}_1 x_3 \bar{x}_5 \equiv$ $\equiv (0-1-0) \equiv (4,6,12,14)$. Над числовими кон'юнктермами порівняно простіше виконувати різні операції і процедури [15]. Диз'юнктивному формату (ДНФ) задання логікової функції *f* відповідає теоретико-множинний формат (ТМФ). У загальному випадку ТМФ Y^1 – це множина числових кон'юнктермів різних рангів $r \in \{1, 2, \ldots$ $\ldots, n\}$, якій у поліномному форматі відповідає ПТМФ $Y^\oplus$ [1] за умови, якщо всі її члени взаємно ортогональні. Натомість досконалій ТМФ Y^1, що є множиною числових мінтермів (кон'юнктермів *n*-рангу), у поліномному форматі відповідає досконала ПТМФ $Y^\oplus$.

Виходячи з [1], не важко передбачити, що числова теоретико-множинна інтерпретація *RM*-поліномів з певною поляризацією відрізнятиметься від аналогічної інтерпретації поліномів Жеґалкіна тим, що числові кон'юнктерми, що складають ПТМФ $Y^\oplus$ згаданих *RM*-поліномів, матимуть замість одиниці значення нуль саме у тих позиціях, які відповідають негативній поляризації змінних функції *f*.

Оскільки *MPRM*-поліноми містять різні класи *FPRM*-поліномів функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то полярність змінних *RM*-поліномів задаватимемо так званим *кодом полярності* $C = (\rho_1\rho_2\ldots\rho_n)$, де $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n \in \{0,1,2\}$. Причому, якщо значення $\rho_i = 0$, то *i*-та змінна нехай має негативну ($\bar{x}_i$) полярність, якщо $\rho_i = 1$ – позитивну (x_i) полярність, а якщо $\rho = 2$ – змішану (x_i і $\bar{x}_i$) полярність. У разі *FPRM*-поліномів код полярності $C = (\rho_1\rho_2\ldots\rho_n)$, де $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n \in \{0,1\}$. Отже, якщо шуканим є *PPRM*-поліном (поліном Жеґалкіна), то потрібно задавати код полярності $C = (11\cdots1)$, якщо *NPRM*-поліном, то – $C = (00\cdots0)$, а якщо *MPRM*-поліном, то – $C = (22\cdots2)$. При цьому, якщо в перших двох випадках теоретико-множинними відповідниками є ПТМФ $Y^\oplus$, то в останньому – досконала ПТМФ $Y^\oplus$. У довільному випадку, якщо, наприклад, для деякої функції $f(x_1, x_2, x_3)$ необхідно знайти *RM*-поліном з полярністю $C = (012)$, то в утвореному аналітичному поліномі змінна x_1 в усіх виразах кон'юнктермів матиме негативну ($\bar{x}_1$) полярність, x_2 – позитивну (x_2) полярність, а x_3 – змішану (x_3 і $\bar{x}_3$). Відповідно, у теоретико-множинному зображенні числові (трійкові і/чи двійкові) кон'юнктерми ПТМФ $Y^\oplus$ матимуть значення нуль в позиції з вагою 2^2, значення одиниця в позиції з вагою 2^1 і значення нуль та одиниця в позиції з вагою 2^2 у комплементарних кон'юнктермах.

Отже, код полярності *C* визначає різновид *RM*-поліномів – усталює, яка саме змінна функції *f* матиме позитивну, негативну або обидві полярності. При цьому загальна кількість *RM*-поліномів з певною *C*-полярністю дорівнює 2^n. Для $f(x_1, x_2, x_3)$ різних *FPRM*-поліномів з *C*-полярністю буде вісім. Наприклад, для функції $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$ властиві такі чотири види *FPRM*-поліномів:

з (111)-полярністю (поліном Жеґалкіна)

$$1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3,$$

з (011)-полярністю $\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_1x_2 \oplus \bar{x}_1x_3 \oplus x_2x_3$,

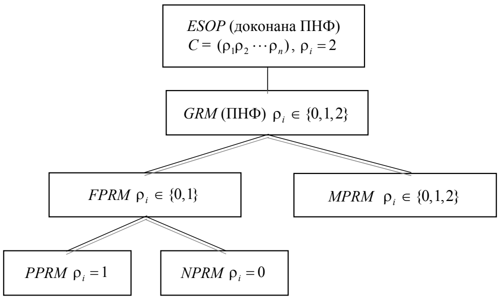
з (001)-полярністю $x_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1x_3 \oplus \bar{x}_2x_3$,

з (000)-полярністю

$$1 \oplus \bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2 \oplus \bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_3 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3.$$

MPRM-поліном з (222)-полярністю цієї функції – це її досконала ПНФ $f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus x_1x_2x_3$.

На рисунку показано класифікацію розглянутих *RM*-поліномів.



Процедуру задання *C*-полярності позначатимемо оператором $\overset{C}{\Rightarrow}$. Наприклад, для функції $f(x_1, x_2, x_3)$ оператор $\overset{011}{\Rightarrow}$ означає, що шуканим є *FPRM*-поліном з (011)-полярністю, аналітичні вирази кон'юнктермів якого задає кортеж $\langle \bar{x}_1, x_2, x_3 \rangle$, а числових кон'юнктермів – значення нуль і одиниця числового кортежа $\langle 0,1,1 \rangle$. За наявності оператора $\overset{012}{\Rightarrow}$ шуканим є *MPRM*-поліном з (012)-полярністю, аналітичні кон'юнктерми якого визначають два кортежі $\langle \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3 \rangle$ і $\langle \bar{x}_1, x_2, x_3 \rangle$, а числові кон'юнктерми – значення нуль і одиниця числових кортежів $\langle 0,1,0 \rangle$ і $\langle 0,1,1 \rangle$. Якщо маємо оператор $\overset{122}{\Rightarrow}$, то шуканим є *MPRM*-поліном з (122)-полярністю, аналітичні кон'юнктерми якого визначають чотири кортежі $\langle x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \rangle$, $\langle x_1, \bar{x}_2, x_3 \rangle$, $\langle x_1, x_2, \bar{x}_3 \rangle$ і $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, а числові кон'юнктерми відповідно – числові кортежі $\langle 1,0,0 \rangle$, $\langle 1,0,1 \rangle$, $\langle 1,1,0 \rangle$ і $\langle 1,1,1 \rangle$, і т.ін.

У роботі [1] перетворення «досконала ТМФ $Y^1 \Rightarrow$ поліном Жегалкіна» виконується так: усі нулі у двійкових мінтермах досконалої ТМФ Y^1 заданої функції f замінюються на символ поглинання (−), а утворені трійкові кон'юнктерми замінюються на їх твірні числові мінтерми; з множини останніх усуваються однакові пари чисел, унаслідок чого одержується ТМФ $Y^{\oplus}$ полінома Жегалкіна (ТМФЖ $Y^{\oplus}$). Зауважимо, якщо такий підхід застосовувати до перетворення «(досконала) ТМФ $Y^1 \overset{C}{\Rightarrow}$ *RM*-поліном», то *RM*-поліном з потрібною *C*-полярністю утворювався б тільки через код поляризації $C = (11\ldots1)$, тобто через ТМФЖ $Y^{\oplus}$.

У даній статті запропоновано *метод безпосереднього перетворення* диз'юнктивного формату в поліномний, який відрізняється від [1] тим, що кожний двійковий і/чи трійковий кон'юнктерм рангу $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (досконалої) ТМФ Y^1 заданої функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ перетворюється безпосередньо (без заміни трійкових кон'юнктермів на їх твірні та ТМФЖ $Y^{\oplus}$) у деяку множину двійкових і/чи трійкових кон'юнктермів рангів $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ поліномного формату зі заданою *C*-полярністю змінних. ПТМФ $Y^{\oplus}$ шуканого *RM*-полінома з *C*-полярністю утворюється після усунення пар однакових елементів із згаданої множини. Аби одержати аналітичний вираз *RM*-полінома заданої функції *f*, досить застосувати правило [1]:

$(1)_i \to x_i, (0)_i \to \bar{x}_i$, $(-)_i \to$ відсутня x_i, кома (,) $\to \oplus$.

Формування числових кон'юнктермів ПТМФ $Y^{\oplus}$ *RM*-поліномів зі заданою *C*-полярністю пропонованим методом ґрунтується на аналітичних перетвореннях кожної *i*-ї змінної заданої функції *f*, а саме: заміна $(1)_i \to (0)_i$ відповідає виразу $x_i = \bar{x}_i \oplus 1$, заміна $(0)_i \to (1)_i$ – виразу $\bar{x}_i = x_i \oplus 1$, заміна $(-)_i \to \big((0)_i, (1)_i\big)$ – виразу $1 = \bar{x}_i \oplus x_i$. Відповідно до заданого коду полярності *C* числова теоретико-множинна процедура формування *C*-полярності у *RM*-поліномів виконується над кожною *i*-ю позицією числових кон'юнктермів ПТМФ $Y^{\oplus}$ функції *f* за такими правилами:

- у разі позитивної полярності

$$(0)_i \to \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix}_i, \ (1)_i \to (1)_i, \ (-)_i \to (-)_i; \qquad (7)$$

- у разі негативної полярності

$$(\bar{0})_i \to (0)_i,\ (\bar{1})_i \to \begin{pmatrix} 0 \\ - \end{pmatrix}_i,\ (-)_i \to (-)_i; \qquad (8)$$

• у разі змішаної полярності

$$(\tilde{0})_i \to (0)_i,\ (\tilde{1})_i \to (1)_i,\ (-)_i \to \big((0)_i, (1)_i\big). \qquad (9)$$

Для одержання *FPRM*-поліномів застосовуються правила (7) і (8), причому, в утворюваних трійкових кон'юнктермах ПТМФ $Y^{\oplus}$ символ (–) комбінаторно займає по одному, по два і так далі – тільки значимі позиції твірного кон'юнктерма (досконалої) ТМФ Y^1, починаючи з наймолодшої. Отже, якщо в перетворенні ТМФ $Y^1 \overset{C}{\Rightarrow}$ *FPRM*-поліном твірним є мінтерм, то (–) в утворюваних кон'юнктермах розставляються комбінаторно по всіх позиціях, а якщо твірним є кон'юнктерм рангу $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, то його значимі позиції в утворюваних кон'юнктермах замінюють символи (–), а його власні символи (–) переписуються. Наприклад, нехай задано перетворення $x_1 x_2 \bar{x}_3 \overset{010}{\Rightarrow} f(\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3)$ і $x_1 \bar{x}_3 \overset{010}{\Rightarrow} f(\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3)$. Аналітичним методом маємо такі вирази:

$$x_1 x_2 \bar{x}_3 \overset{010}{\Rightarrow} (\bar{x}_1 \oplus 1) x_2 \bar{x}_3 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \oplus x_2 \bar{x}_3 \text{ і}$$

$$x_1 \bar{x}_3 \overset{010}{\Rightarrow} (\bar{x}_1 \oplus 1) \bar{x}_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \oplus \bar{x}_3 .$$

Числовим теоретико-множинним методом одержимо відповідно:

$$(110) \overset{010}{\Rightarrow} (\bar{1}\,1\,\bar{0}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 010 \\ -10 \end{pmatrix} \text{ і}$$

$$(1-0) \overset{010}{\Rightarrow} (\bar{1} - \bar{0}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0-0 \\ --0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1. Методом безпосереднього перетворення знайти поліном Жеґалкіна для ДНФ функції $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee x_3$.

Розв'язання. Оскільки кон'юнктерми заданої функції f взаємно ортогональні, то перетворивши ДНФ у ТМФ Y^1, за описаним тут методом одержимо ТМФЖ $Y^{\oplus}$:

$$Y^1 = \{(100), (-10), (--1)\}^1 \overset{111}{\Rightarrow}$$

$$\overset{111}{\Rightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} 111 \\ 11- \\ 1-1 \\ 1-- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ -1- \end{pmatrix}, (--1) \right\}^{\oplus} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{(111), (11-), (1-1), (-11), (1--), (-1-), (--1)\}^{\oplus}.$$

Звідси поліном Жеґалкіна заданої функції $f = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

Приклад 2. Для функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданої досконалою ТМФ $Y^1 = \{2,7,9,12,15\}^1$, методом безпосереднього перетворення знайти *FPRM*-поліноми: з (1111)-полярністю (поліном Жеґалкіна), з (1110)-полярністю і (1010)-полярністю (у [12, с. 476] цей приклад розв'язано методом карт Карно).

Розв'язання

$$Y^1 = \{(0010), (0111), (1001), (1100), (1111)\}^1 \overset{1111}{\Rightarrow}$$

$$\overset{1111}{\Rightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} 1111 \\ 111- \\ 1-11 \\ -111 \\ 1-1- \\ -11- \\ --11 \\ --1- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1111 \\ -111 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1111 \\ 11-1 \\ 1-11 \\ 1--1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1111 \\ 111- \\ 11-1 \\ 11-- \end{pmatrix}, (1111) \right\}^{\oplus} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{(1-1-), (-11-), (--11),$$
$$(--1-), (1--1), (11--), (1111)\}^{\oplus}.$$

Отже, *FPRM*-поліном з (1111)-полярністю функції $f = x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_3 x_4 \oplus x_3 \oplus x_1 x_4 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 x_4$.

FPRM-поліном з (1110)-полярністю простіше одержати з ПТМФ $Y^{\oplus}$ *FPRM*-полінома з (1111)-полярністю, ніж з досконалої ТМФ Y^1 заданої функції. Для цього досить застосувати правило (8) тільки до кон'юнктермів, що мають одиницю у наймолодшій позиції (з вагою 2^0):

$$(--11) \overset{1110}{\Rightarrow} (--1\,\bar{1}) \Rightarrow \begin{pmatrix} --10 \\ --1- \end{pmatrix},$$

$$(1--1) \overset{1110}{\Rightarrow} (1--\bar{1}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1--0 \\ 1--- \end{pmatrix},$$

$$(1111) \overset{1110}{\Rightarrow} (111\,\bar{1}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1110 \\ 111- \end{pmatrix}.$$

Замінивши цими множинами несполяризовані кон'юнктерми ПТМФ $Y^{\oplus}$ *FPRM*-полінома з (1111)-полярністю, після процедур спрощення одержимо ПТМФ $Y^{\oplus}$ шуканого *FPRM*-полінома:

$$Y^{\oplus}=\{(1-1-),(-11-),(--11),(--1-),(1--1),$$
$$(11--),(1111)\}^{\oplus}\Rightarrow(1-1-),(-11-),(--1-),$$
$$(11--),\begin{pmatrix}--10\\--1-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1--0\\1---\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1110\\111-\end{pmatrix}\Bigg\}^{\oplus}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{(1-1-),(-11-),(11--),(--10),$$
$$(1--0),(1---),(1110),(111-)\}^{\oplus}.$$

Отже, *FPRM*-поліном з (1110)-полярністю

$$f(x_1,x_2,x_3,\overline{x}_4)=x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus$$
$$\oplus x_3\overline{x}_4\oplus x_1\overline{x}_4\oplus x_1\oplus x_1x_2x_3\overline{x}_4\oplus x_1x_2x_3.$$

FPRM-поліном з (1010)-полярністю визначимо на основі ПТМФ $Y^{\oplus}$ *FPRM*-полінома з (1110)-полярністю, виконавши процедуру (8) тільки над кон'юнктермами, що мають одиницю у позиції з вагою 2^2:

$$(-11-)\overset{1010}{\Rightarrow}(-\overline{1}\,1-)\Rightarrow\begin{pmatrix}-01-\\--1-\end{pmatrix},$$
$$(11--)\overset{1010}{\Rightarrow}(1\overline{1}--)\Rightarrow\begin{pmatrix}10--\\1---\end{pmatrix},$$
$$(1110)\overset{1010}{\Rightarrow}(1\overline{1}10)\Rightarrow\begin{pmatrix}1010\\1-10\end{pmatrix},$$
$$(111-)\overset{1010}{\Rightarrow}(1\overline{1}1-)\Rightarrow\begin{pmatrix}101-\\1-1-\end{pmatrix}.$$

Після відповідних замін у ПТМФ $Y^{\oplus}$ *FPRM*-полінома з (1110)-полярністю та спрощення одержаної множини, одержимо ПТМФ $Y^{\oplus}$ *FPRM*-полінома з (1010)-полярністю:

$$Y^{\oplus}=\{(--10),(-11-),(11--),(1-1-),$$
$$(1--0),(1---),(1110),(111-)\}^{\oplus}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{(--10),(1-1-),(1--0),(1---),$$
$$\begin{pmatrix}-01-\\--1-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10--\\1---\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\1-10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}101-\\1-1-\end{pmatrix}\Bigg\}^{\oplus}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{(--10),(1--0),(-01-),(--1-),$$
$$(10--),(1010),(1-10),(101-)\}^{\oplus}.$$

Отже, *FPRM*-поліном з (1010)-полярністю

$$f(x_1,\overline{x}_2,x_3,\overline{x}_4)=x_3\overline{x}_4\oplus x_1\overline{x}_4\oplus\overline{x}_2x_3\oplus$$
$$\oplus x_3\oplus x_1\overline{x}_2\oplus x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4\oplus x_1x_3\overline{x}_4\oplus x_1\overline{x}_2x_3.$$

Покажемо, що останній результат буде такий самий, якщо пропонований метод застосувати до досконалої ТМФ Y^1 заданої функції

$$Y^1=\{(0010),(0111),(1001),(1100),(1111)\}^1\overset{1010}{\Rightarrow}$$
$$\overset{1010}{\Rightarrow}\{(0\overline{0}1\overline{0}),(0\overline{1}1\overline{1}),(1\overline{0}0\overline{1}),(1\overline{1}0\overline{0}),(1\overline{1}1\overline{1})\}^{\oplus}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}1010\\-010\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\101-\\1-10\\-010\\1-1-\\-01-\\--10\\--1-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\101-\\10-0\\10--\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\10-0\\1-10\\1--0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\101-\\1-10\\1-1-\end{pmatrix}\right\}^{\oplus}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{(-01-),(--10),(--1-),(10--),$$
$$(1--0),(1010),(101-),(1-10)\}^{\oplus}.$$

Покажемо зворотне перетворення ПТМФ $Y^{\oplus}\Rightarrow$ досконала ТМФ Y^1:

$$Y^{\oplus}=\{(-01-),(--10),(--1-),(10--),$$
$$(1--0),(1010),(101-),(1-10)\}^{\oplus}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\{(2,3,10,11),(2,6,10,14),(2,3,6,7,10,11,14,15),$$
$$(8,9,10,11),(8,10,12,14),(10),(10,11),(10,14)\}^{\oplus}=$$
$$=\{2,7,9,12,15\}^{\oplus}\equiv\{2,7,9,12,15\}^1.$$

Отже, розглянуті чотири різновиди *FPRM*-поліномів функції $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\vee x_1x_2x_3$, яка має досконалу ТМФ $Y^1=\{0,7\}^1$, можна інтерпретувати в числовому теоретико-множинному форматі такими ПТМФ $Y^{\oplus}$:

з (111)-полярністю (поліном Жеґалкіна)

$$Y^{\oplus}=\{(11-),(1-1),(-11),$$
$$(1--),(-1-),(--1),(---)\}^{\oplus},$$

з (011)-полярністю

$$Y^{\oplus}=\{(01-),(0-1),(0--),(-11)\}^{\oplus},$$

з (001)-полярністю

$$Y^{\oplus}=\{(00-),(0-1),(-01),(--1)\}^{\oplus},$$

з (000)-полярністю

$$Y^{\oplus}=\{(00-),(0-0),(-00),$$
$$(0--),(-0-),(--0),(---)\}^{\oplus}.$$

Досконала ПТМФ $Y^{\oplus}$ *MPRM*-полінома цієї функції з (222)-полярністю $Y^{\oplus} = \{(000),(111)\}^{\oplus}$.

У перетворенні ТМФ $Y^1 \overset{C}{\Rightarrow}$ *MPRM*-поліном, причому для $N \neq (22\cdots2)$, правила (7) і (8) застосовуються так само, як у випадку *FPRM*-поліномів, але тільки до тих позицій твірних, які не підлягають змішаній поляризації. Натомість правило (9) застосовується тільки до позицій, що мають символ (–), значимі позиції твірних у цьому випадку переносяться без змін. Наприклад, у перетворенні $\bar{x}_1\bar{x}_3 \overset{1222}{\Rightarrow} f(x_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4)$ аналітичним шляхом одержимо

$$\bar{x}_1\bar{x}_3 \overset{1222}{\Rightarrow} (x_1 \oplus 1)(\bar{x}_2 \oplus x_2)\bar{x}_3(\bar{x}_4 \oplus x_4) =$$
$$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3x_4 \oplus$$
$$\oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \oplus x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_2\bar{x}_3x_4,$$

а числовим теоретико-множинним методом –

$$(0-0-) \overset{1222}{\Rightarrow} (0-\tilde{0}-) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1000 \\ -000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1001 \\ -001 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1100 \\ -100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1101 \\ -101 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(1000),(1001),(1100),(1101),$$
$$(-000),(-001),(-100),(-101)\}^{\oplus}.$$

Приклад 3. Методом безпосереднього перетворення знайти всі *RM*-поліноми з фіксованою та змішаною полярністю для функції $f(x_1, x_2, x_3)$, заданої досконалою ТМФ $Y^1 = \{0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 7\}^1$, та визначити їх кошт реалізації [11].

Розв'язання. Далі наведено таблицю результатів визначення ПТМФ $Y^{\oplus}$ і коштів реалізації усіх *RM*-поліномів з фіксованою та змішаною *C*-полярністю, одержаних методом безпосереднього перетворення для функції, заданої досконалою ТМФ $Y^1 = \{(000),(001),(010),(101),(111)\}^1$.

Жирним шрифтом виділено коди полярності *C*, які належать ПТМФ $Y^{\oplus}$ *RM*-поліномів, що мають мінімальний кошт реалізації; позначкою * виділено уточнені автором дані [11]. Наприклад, ПТМФ $Y^{\oplus}$ *RM*-полінома з (210)-полярністю одержано так:

$$Y^1 = \{(000),(001),(010),(101),(111)\}^1 \overset{210}{\Rightarrow}$$
$$\overset{210}{\Rightarrow} \{(\tilde{0}0\bar{0}),(\tilde{0}0\bar{1}),(\tilde{0}1\bar{0}),(\tilde{1}0\bar{1}),(\tilde{1}1\bar{1})\}^{\oplus} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 010 \\ 0-0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 010 \\ 01- \\ 0-0 \\ 0-- \end{pmatrix}, (010), \begin{pmatrix} 110 \\ 11- \\ 1-0 \\ 1-- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 110 \\ 11- \end{pmatrix} \right\}^{\oplus} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(0--),(01-),(010),(1--),(1-0)\}^{\oplus}.$$

На прикладі розглянутої функції проілюструємо взаємні перетворення *RM*-поліномів різних *C*-полярностей описаним методом. Зокрема, для ПТМФ $Y^{\oplus} = \{(0--),(0\,1\,-),(0\,1\,0),(1--),(1-0)\}^{\oplus}$, що відображає *MPRM*-поліном з (210)-полярністю, визначимо (порівняти з даними таблиці):

- перехід (210) ⇒ (211)

$$Y^{\oplus} = \{(0--),(01-),(010),(1--),(1-0)\}^{\oplus} \overset{211}{\Rightarrow}$$
$$\overset{211}{\Rightarrow} \left\{ (0--),(01-), \begin{pmatrix} 011 \\ 01- \end{pmatrix}, (1--), \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-- \end{pmatrix} \right\}^{\oplus} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(0--),(011),(1-1)\}^{\oplus};$$

- перехід (210) ⇒ (110)

$$Y^{\oplus} = \{(0--),(01-),(010),(1--),(1-0)\}^{\oplus} \overset{110}{\Rightarrow}$$
$$\overset{110}{\Rightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} 1-- \\ --- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11- \\ -1- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 110 \\ -10 \end{pmatrix}, (1--),(1-0) \right\}^{\oplus} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(---),(-1-),(-10),(1-0),(11-),(110)\}^{\oplus};$$

- перехід (210) ⇒ (010)

$$Y^{\oplus} = \{(0--),(01-),(010),(1--),(1-0)\}^{\oplus} \overset{010}{\Rightarrow}$$
$$\overset{010}{\Rightarrow} \left\{ (0--),(01-),(010), \begin{pmatrix} 0-- \\ --- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0-0 \\ --0 \end{pmatrix} \right\}^{\oplus} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(---),(--0),(0-0),(01-),(010)\}^{\oplus};$$

- перехід (210) ⇒ (111)

$$Y^{\oplus} = \{(0--),(01-),(010),(1--),(1-0)\}^{\oplus} \overset{111}{\Rightarrow}$$
$$\overset{111}{\Rightarrow} \left\{ \begin{pmatrix} 1-- \\ --- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11- \\ -1- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 111 \\ 11- \\ -11 \\ -1- \end{pmatrix}, (1--), \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-- \end{pmatrix} \right\}^{\oplus} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(---),(-11),(1--),(1-1),(111)\}^{\oplus}.$$

Перехід із ПТМФ $Y^{\oplus}$ *FPRM*-полінома з $(11\cdots1)$-полярністю до ПТМФ $Y^{\oplus}$ *RM*-полінома з неоди-

Код полярності C	ПТМФ $Y^{\oplus}$	Кошт $k_{\theta} / k_{l} / k_{in}$
111	$\{(---),(-11),(1--),(1-1),(111)\}^{\oplus}$	5/7/0
110	$\{(---),(-1-),(-10),(1-0),(11-),(110)\}^{\oplus}$	6/10/3
112	$\{(--0),(--1),(-11),(1-0),(111)\}^{\oplus}$	5/9/2
101	$\{(---),(--1),(-01),(1--),(101)\}^{\oplus}$	5/7/2
100	$\{(--0),(-0-),(-00),(1--),(10-),(100)\}^{\oplus}$	6/10/7
102	$\{(--0),(-01),(1-0),(1-1),(101)\}^{\oplus}$	5/10/4
121	$\{(-0-),(-1-),(-11),(10-),(101),(11-)\}^{\oplus}$	6/11/3
120	$\{(-0-),(-10),(100),(11-)\}^{\oplus}$	4/8/4
122	$\{(-00),(-01),(-10),(100),(110),(111)\}^{\oplus}$	6/15/7*
011	$\{(--1),(0--),(0-1),(011)\}^{\oplus}$	4/7/3
010	$\{(---),(--0),(0-0),(01-),(010)\}^{\oplus}$	5/8/6
012	$\{(--1),(0-0),(011)\}^{\oplus}$	3/6/3
001	$\{(--1),(0--),(001)\}^{\oplus}$	3/5/3
000	$\{(---),(--0),(0--),(00-),(000)\}^{\oplus}$	5/7/7
002	$\{(--1),(0-0),(0-1),(001)\}^{\oplus}$	4/8/5
021	$\{(-01),(-11),(000),(01-)\}^{\oplus}$	4/9/5
020	$\{(-0-),(-00),(-1-),(-10),(000),(01-)\}^{\oplus}$	6/11/8
022	$\{(-01),(-11),(000),(010),(011)\}^{\oplus}$	5/13/7
211	$\{(0--),(011),(1-1)\}^{\oplus}$	3/6/2
210	$\{(0--),(01-),(010),(1--),(1-0)\}^{\oplus}$	5/9/5*
212	$\{(0-0),(0-1),(011),(1-1)\}^{\oplus}$	4/9/4
201	$\{(0--),(0-1),(001),(1-1)\}^{\oplus}$	4/8/4
200	$\{(0-0),(00-),(000),(1--),(1-0)\}^{\oplus}$	5/10/8*
202	$\{(0-0),(000),(00-),(1-1)\}^{\oplus}$	4/9/7*
221	$\{(00-),(01-),(011),(101),(111)\}^{\oplus}$	5/12/5
220	$\{(00-),(010),(10-),(100),(11-),(110)\}^{\oplus}$	6/15/8*
222	$\{(000),(001),(010),(101),(111)\}^{\oplus}$	5/15/8

ничою полярністю виконується так: якщо шуканим є *FPRM*-поліном – аналогічно, а якщо шукається *MPRM*-поліном зі змішаною полярністю в i-й позиції, тобто $(\sigma\cdots 2_i\cdots\sigma)$, $\sigma \in \{0,1\}$, то перед виконанням відповідних процедур усі трійкові кон'юнктерми, які мають символ (–) в i-й позиції, замінюються на комплементарні. Наприклад, якщо над кон'юнктермом (1–1) потрібно виконати поляризацію кодом (021), то його спочатку необхідно споляризувати кодом (121), розклавши на комплементарні кон'юнктерми, тобто $(1-1)\overset{121}{\Rightarrow}\big((101),(111)\big)$, а тоді їх споляризувати заданим кодом: $(101)\overset{021}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}001\\-01\end{pmatrix}$ і $(111)\overset{021}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}011\\-11\end{pmatrix}$. Якщо шуканим є *MPRM*-поліном з $(\sigma\cdots 2_i\cdots 2_j\cdots\sigma)$-полярністю, то кожний трійковий кон'юнктерм, що має (–) в i-й і j-й позиціях, необхідно замінити на відповідні чотири твірні кон'юнктерми, і т.д. Такі перетворення проілюструємо на прикладі нашої функції (порівняти з даними табл.):

- перехід $(111) \Rightarrow (102)$

$$Y^{\oplus} = \{(---),(-11),(1--),(1-1),(111)\}^{\oplus} \overset{112}{\Rightarrow}$$

$$\overset{112}{\Rightarrow}\{\big((--0),(--1)\big),(-11),\big((1-0),(1-1)\big),(1-1),(111)\}^{\oplus} \overset{102}{\Rightarrow}$$

$$\overset{102}{\Rightarrow}\left\{(--0),(--1),\begin{pmatrix}-01\\--1\end{pmatrix},(1-0),\begin{pmatrix}101\\1-1\end{pmatrix}\right\}^{\oplus} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{(--0),(-01),(1-0),(1-1),(101)\}^{\oplus};$$

- перехід $(111) \Rightarrow (122)$

$$Y^{\oplus} = \{(---),(-11),(1--),(1-1),(111)\}^{\oplus} \overset{122}{\Rightarrow}$$

$$\overset{122}{\Rightarrow}\left\{\begin{pmatrix}-00\\-01\\-10\\-11\end{pmatrix},(-11),\begin{pmatrix}100\\101\\110\\111\end{pmatrix},\begin{pmatrix}101\\111\end{pmatrix},(111)\right\}^{\oplus} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{(-00),(-01),(-10),(100),(110),(111)\}^{\oplus}.$$

Висновки. На основі запропонованої числової теоретико-множинної інтерпретації *FPRM*- та *MPRM*-поліномів з довільною *C*-полярністю логікових функцій від *n* змінних розроблено метод безпосереднього перетворення кон'юнктермів (досконалої) ТМФ або ДНФ у відповідні одночлени зазначених *RM*-поліномів (у тому числі зворотного і взаємного перетворення), який, як бачимо з прикладів, досить просто можна зреалізувати на комп'ютері без будь-яких проміжних перетворень. Метод не втрачатиме своїх переваг і у випадку відповідних перетворень системи логікових функцій.

1. *Рицар Б.Є.* Числова теоретико-множинна інтерпретація поліномів Жегалкіна // УСиМ. – 2013. – № 1. – С. 11–26.
2. *Green D.H.* Families of Reed–Muller canonical forms // Int. J. Electronics. – 1991. – **70**, № 2. – P. 259–280.
3. *Sasao T.* Switching Theory for Logic Synthesis. – Kluwer Acad. Publ., 1999. – 361 p.
4. *Chrzanowska-Jeske M.*, *Mishchenko A.*, *Perkowski M.* Generalized inclusive forms – new canonical Reed–Muller forms including ESOPs // VLSI Design. – 2002. – **14**, № 1. – P. 13–21. – http://www.hindawi. com/journals/vlsi/2002/764061/abs/
5. *Astola J.T.*, *Stankovic R.S.* Fundamentals of Switching Theory and Logic Design. – Springer, 2006. – P. 47–87.
6. *Sasao T.* Easily testable realizations for generalized Reed–Muller expressions // IEEE Trans. On Computers. – 1997. – **46**, № 6. – P. 709–716.
7. *Закревский А.Д.*, *Поттосин Ю.В.*, *Черемисинова Л.Д.* Логические основы проектирования дискретных устройств. – М.: Физматлит, 2007. – 592 с.
8. *Tan E.C.*, *Yang H.* Optimization of fixed-polarity Reed–Muller circuits using dual-polarity property // Circuits, systems, and signal processing. – 2000. – **19**, № 6. – P. 535–548.
9. *Faraj Khalid Almaini A.E.A.* Optimal expression for fixed polarity dual Reed–Muller forms // WSEAS Transactions on Circuits and Systems. – 2007. – **6**, № 3. – P. 364–371.
10. *Almaini A.E.A.*, *McKenzie L.* Tabular techniques for generating Kronecker expentions // IEE Proc. Comp. Digit. Tech. – 1996. – **143**, № 4. – P. 205–212.
11. *Mozammel H.A. Khan* An ASIC Architecture for Generating Optimum Mixed Polarity Reed–Muller Expression // Eng. Lett., 13:3, EL_13_3_2 (Advance online publication: 4 Nov. 2006). – http://www.engineeringletters. com/issues_v13/issue_3/EL_13_3_2.pdf
12. *Maslov D.A.* A method to find the best mixed-polarity Reed–Muller expression // Univ. New Brunswick, June, 2001. – http://webhome.cs.uvic.ca/~dmaslov/papers/MCSthesis.pdf
13. *Dueck W.*, *Maslov D.*, *Butler T.* A method to find the best mixed-polarity Reed–Muller expression using transeunt triangle // The 5th Int. Workshop on Appl. of Reed–Muller Expansion in Circuit Design (RM), 2001. – Starkville. – P. 82–93. – http:// webhome.cs.uvic.ca/~dmaslov/papers/MCSthesis.pdf
14. *Almaini A.E.A.* Electronic Logic Systems. – Prentice–Hall Int., Englewood Cliffs, N.J. – 1994.
15. *Рицар Б.Є.* Теоретико-множинні оптимізаційні методи логікового синтезу комбінаційних мереж: Дис. … д-ра. техн. наук, Львів, 2004. – 348 с.

Поступила 20.10.2012
E-mail: *bohdanrytsar@gmail.com*

●

Б.Е. Рыцар

Числовая теоретико-множественная интерпретация полиномов Рида–Маллера с фиксированной и смешанной полярностью

Введение. Статья представляет собой логическое продолжение работы [1], в которой рассмотрена числовая теоретико-множественная интерпретация полиномов Жегалкина и посвящена числовой теоретико-множественной интерпретации *RM*-полиномов с фиксированной (*FPRM*) и смешанной (*MPRM*) полярностью и основанному на этом новом методе взаимного преобразования дизъюнктивного и полиномиального форматов представления логических функций от *n* переменных.

Теоретические основы

Произвольную логическую функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить в полиномиальной нормальной форме (ПНФ) (*Exclusive-OR Sum-Of-Product form – ESOP*), образованной двухместными операциями – конъюнкцией (*AND*) и суммой по mod 2 (*EXOR*) – и константой **1**; инверсия произвольной переменной получается операцией $x \oplus 1 = \bar{x}$. При этом, в зависимости от того, какие переменные конъюнктермов ПНФ *f* (все либо некоторые из них) имеют или не имеют знак инверсии, что определяет так называемую *полярность переменных*, различают определенные классы *AND-EXOR* выражений ПНФ *f*. В общем случае их называют *полиномами* (*выражениями*) *Рида–Маллера* (*Reed–Muller expression – RM-полиномы*). Классификация *RM*-полиномов, отношение между различными классами и сложность их реализации описаны в [2–4].

Произвольную логическую функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно разложить к одному из видов:

$$f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = \bar{x}_i f_0 \oplus x_i f_1, \quad (1)$$

$$f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = f_0 \oplus x_i f_2, \quad (2)$$

$$f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = f_1 \oplus \bar{x}_i f_2, \quad (3)$$

где $f_0 = f(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)$, $f_1 = f(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n)$, $f_2 = f_0 \oplus f_1$.

Выражения (1) – (3) – это соответственно *разложение Шеннона* (*Shannon expansion*), *положительное разложение Давия* (*positive Davio expansion*) и *отрицательное разложение Давия* (*negative Davio expansion*). Причем, (2) и (3) получаются из (1), если в первом случае вместо

$\overline{x}_i$ записать $x_i \oplus 1$, а во втором – вместо x_i записать $\overline{x}_i \oplus 1$. Например, (2) получим так: $\overline{x}_i f_0 \oplus x_i f_1 = (x_i \oplus 1) f_0 \oplus$ $\oplus x_i f_1 = f_0 \oplus x_i (f_0 \oplus f_1) = f_0 \oplus x_i f_2$. Применяя разложения (1) – (3) ко всем либо к некоторым переменным заданной функции *f*, получим разные классы *RM*-полиномов.

В сравнении с традиционным дизъюнктивным представлением *RM*-полиномы имеют ряд преимуществ [2–8]. В данной статье рассмотрены *RM*-полиномы, наиболее часто применяемые в разных оптимизационных задачах логического синтеза цифровых устройств.

RM-полином, образованный произвольным выбором полярности *n* переменных логической функции *f*, называют *обобщенным RM-полиномом* (*Generalized Reed–Muller expression – GRM*-полином):

$$f = c_0 \oplus c_1\tilde{x}_1 \oplus c_2\tilde{x}_2 \oplus \ldots \oplus c_n\tilde{x}_n \oplus c_{12}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \oplus \ldots \oplus c_{13}\tilde{x}_1\tilde{x}_3 \oplus \ldots$$

$$\ldots \oplus c_{1,2,\ldots,k}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \cdots \tilde{x}_k \oplus \ldots \oplus c_{1,2,\ldots,n}\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \cdots \tilde{x}_n = \bigoplus_{I=0}^{2^n-1} c_I \theta_I, \quad (4)$$

где $\tilde{x}_i \in \{\overline{x}_i, x_i\}$ означает, что каждая переменная в конъюнктермах ПНФ *f* (4) имеет нефиксированную полярность; $c_I \in \{0,1\}$ – коэффициенты конъюнктермов θ_I, $I \in \{0,1,\ldots,2^n-1\}$, причем $\theta_0 = 1$.

Разных *GRM*-полиномов (4) для функции *f* от *n* переменных можно получить не более $2^{n2^{n-1}}$ [3].

Выражение ПНФ *f*, образованное разложением (2) к одним переменным и разложением (3) к остальным переменным, вследствие чего каждая переменная функции *f* будет иметь определенную фиксированную (положительную или отрицательную) полярность, называют *полиномом Рида–Маллера с фиксированной полярностью* (*Fixed Polarity Reed–Muller expression – FPRM*-полином):

$$f = c_0 \oplus c_1\hat{x}_1 \oplus c_2\hat{x}_2 \oplus \ldots \oplus c_n\hat{x}_n \oplus c_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2 \oplus \ldots \oplus c_{13}\hat{x}_1\hat{x}_3 \oplus \ldots$$

$$\ldots \oplus c_{1,2,\ldots,k}\hat{x}_1\hat{x}_2 \cdots \hat{x}_k \oplus \ldots \oplus c_{1,2,\ldots,n}\hat{x}_1\hat{x}_2 \cdots \hat{x}_n = \bigoplus_{I=0}^{2^n-1} c_I \theta_I, \quad (5)$$

где обозначение каждой переменной (с «выпуклой крышкой») $\hat{x}_i$ означает, что в конъюнктермах ПНФ *f* одни переменные не имеют знака инверсии, а другие его имеют; $c_I \in \{0,1\}$, $\theta_0 = 1$.

Разных *FPRM*-полиномов (5) функция *f* от *n* переменных может иметь не более 2^n [3].

Если заданную функцию *f* разложить к виду (2), то получим *PPRM-полином* (*Positive Polarity Reed–Muller expression*), т.е. полином (*n*-й степени) Жегалкина, все переменные которого имеют положительную полярность. Соответственно, если заданную функцию *f* разложить к виду (3), то получим *NPRM-полином* (*Negative Polarity Reed–Muller expression*), все переменные которого имеют отрицательную полярность. Заметим, что *PPRM*-полином (полином Жегалкина) и *NPRM*-полином (на практике встречается редко) – единственные (канонические) выражения ПНФ любой функции *f*, для которых проблемы минимизации не существует.

Если (2) и (3) применять к каждой переменной заданной функции *f*, то получим так называемый *RM-полином со смешанной полярностью* (*Mixed Polarity Reed–Muller expression – MPRM*-полином) (в [3–5] называют *полиномом Кронекера* (*Kronecker expression*)), где в (5) $\hat{x}_i = \{\overline{x}_i, x_i\}$, т.е. все переменные имеют обе полярности. В сравнении с *FPRM*-полиномом (5) *MPRM*-полином есть более общим выражением. Для функции от *n* переменных существует не более 3^n разных *MPRM*-полиномов [3]. Поскольку в этом случае переменные не ограничены той либо иной полярностью, то среди *MPRM*-полиномов более вероятно найти такой, который будет более компактным, чем любой *FPRM*-полином.

Класс *GRM*-полиномов, как видим, содержит все рассмотренные классы *RM*-полиномов. Но среди *AND-EXOR*-выражений наиболее общим будет выражение ПНФ *f* (*ESOP*), образованное конъюнктермами произвольных рангов $r \in \{0,1,\ldots,n\}$:

$$f = \bigoplus_I \tilde{x}_1\tilde{x}_2 \cdots \tilde{x}_n, \quad (6)$$

где индекс *I* символизирует множество всех возможных конъюнктермов, а $\tilde{x}_i \in \{1, \overline{x}_i, x_i\}$, т.е. каждая переменная $\tilde{x}_i$ может быть выбрана как 1, $\overline{x}_i$ либо x_i, независимо от иного выбора для $\tilde{x}_i$; причем, если $\tilde{x}_i \in \{\overline{x}_i, x_i\}$, то это совершенная ПНФ *f*, кстати, равная совершенной ДНФ *f* после замены символа $\oplus$ на $\vee$.

Как замечено в [3], эффективных алгоритмов минимизации ПНФ *f* не существует.

Для сравнения проиллюстрируем упомянутые *RM*-полиномы примерами:

- $x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3$ – *PPRM*-полином, т.е. полином Жегалкина;
- $\overline{x}_1\overline{x}_3 \oplus \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ – *NPRM*-полином;
- $\overline{x}_1x_3 \oplus \overline{x}_1x_2x_3$ – *FPRM*-полином;
- $\overline{x}_1x_3 \oplus \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$ – *MPRM*-полином (или полином Кронекера);
- $x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x}_1\overline{x}_2$ – *GRM*-полином.

Постановка задачи

Для решения различных оптимизационных задач логического синтеза необходимо иметь *RM*-полиномы с минимальным числом конъюнктермов заданной функции *f*. При этом, если существует возможность выбора *RM*-полинома (за исключением *PPRM*- и *NPRM*-полиномов), то в случае одинакового числа конъюнктермов преимущество имеет *RM*-полином с минимальным суммарным числом литералов, а при одинаковом числе последних *минимальным RM-полиномом* считается тот, который имеет минимальное число отрицательно поляризованных литералов. Следовательно, *цену реализации RM*-полинома заданной функции *f* можно определить числовым соотношением $k_\theta / k_l / k_{in}$, где k_θ, k_l, k_{in} – число конъюнктермов, литералов и инверторов соответственно.

В отличие от функций, заданных в дизъюнктивной форме представления, в полиномиальном формате существует возможность решать оптимизационную задачу логического синтеза с помощью поиска такой полярности *RM*-полинома функции *f*, которая обеспечивала бы минимальную цену реализации $k_\theta / k_l / k_{in}$. Такое свойство *RM*-полиномов, в сравнении с ДНФ *f*, – еще одно из преимуществ полиномиального формата [8–13].

Поиск оптимальной полярности *RM*-полиномов относится к сложным комбинаторным задачам. Поэтому важно, чтобы этот процесс был обеспечен простыми и быстродействующими средствами преобразования функции из заданного дизъюнктивного формата представления в полиномиальный, и наоборот. Вместе с тем замена логических базисов приводит к необходимости решения новых оптимизационных задач. Известные методы взаимного преобразования логических базисов преимущественно основываются на аналитическом [3, 5, 6, 11], табличном [9, 10, 14] или матрично-векторном [5, 7, 8, 13] подходах, имеющих по известным причинам определенные ограничения в их компьютерной реализации.

Основная часть

Как показано в [15], любой аналитический конъюнктерм ранга $r \in \{0,1,\ldots,n\}$ логической функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить в теоретико-множественном виде как троичное (или двоичное) число либо как множество десятичных чисел. Например, конъюнктерм третьего ранга $\overline{x}_1 x_3 \overline{x}_5 \equiv (0-1-0) \equiv (4,6,12,14)$. Над числовыми конъюнктермами сравнительно проще выполнять разные операции и процедуры [15]. Дизъюнктивному формату (ДНФ) задания логической функции *f* соответствует теоретико-множественный формат (ТМФ). В общем случае ТМФ Y^1 – это множество числовых конъюнктермов разных рангов $r \in \{1,2,\ldots,n\}$, которому в полиномиальном формате соответствует ПТМФ $Y^{\oplus}$ [1] при условии, что все ее члены взаимно ортогональны. К тому же совершенной ТМФ Y^1, которая есть множеством числовых минтермов (конъюнктермов *n*-ранга), в полиномиальном формате соответствует совершенная ПТМФ $Y^{\oplus}$.

Исходя из [1], можно предвидеть, что числовая теоретико-множественная интерпретация *RM*-полиномов с определенной поляризацией будет отличаться от аналогичной интерпретации полиномов Жегалкина тем, что числовые конъюнктермы, составляющие ПТМФ $Y^{\oplus}$ упомянутых *RM*-полиномов, будут иметь вместо единицы значение нуль именно в разрядах, соответствующих отрицательной поляризации переменных функции *f*.

Поскольку *MPRM*-полиномы содержат разные классы *FPRM*-полиномов функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, полярность переменных *RM*-полиномов будем задавать так называемым *кодом полярности* $C = (\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n)$, где $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \in \{0,1,2\}$. Причем, если значение $\rho_i = 0$, то *i*-я переменная функции *f* пусть имеет отрицательную ($\overline{x}_i$) полярность, если $\rho_i = 1$ – положительную (x_i) полярность, а если $\rho = 2$ – смешанную (x_i и $\overline{x}_i$) полярность. В случае *FPRM*-полиномов код полярности $C = (\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n)$, где $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \in \{0,1\}$. Следовательно, если искомым есть *PPRM*-полином (полином Жегалкина), то следует задавать код полярности $C = (11\cdots1)$, если *NPRM*-полином, то $C = (00\cdots0)$, а если *MPRM*-полином, то – $C = (22\cdots2)$. При этом, если в первых двух случаях теоретико-множественные представители – это ПТМФ $Y^{\oplus}$, то в последнем – совершенная ПТМФ $Y^{\oplus}$. В произвольном случае, если, например, для некоторой функции $f(x_1, x_2, x_3)$ необходимо найти *RM*-полином с полярностью $C = (012)$, то в образовавшемся аналитическом полиноме переменная x_1 во всех выражениях конъюнктермов будет иметь отрицательную ($\overline{x}_1$) полярность, x_2 – положительную (x_2) полярность, а x_3 – смешанную (x_3 и $\overline{x}_3$). Соответственно, в теоретико-множественном представлении числовые (троичные и/или двоичные) конъюнктермы ПТМФ $Y^{\oplus}$ будут иметь значение ноль в разряде с весом 2^2, значение единица в разряде с весом 2^1 и значения ноль и единица в разряде с весом 2^0 в комплементарных конъюнктермах.

Итак, код полярности *C* определяет разновидность *RM*-полиномов – устанавливает, какая именно переменная функции *f* будет иметь положительную, отрицательную либо обе полярности. При этом общее число *RM*-полиномов с определенной *C*-полярностью равно 2^n. Для $f(x_1, x_2, x_3)$ разных *FPRM*-полиномов с *C*-полярностью будет восемь. Например, для функции $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$ свойственны следующие четыре вида *FPRM*-полиномов:

с (111)-полярностью (полином Жегалкина) $1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3$,

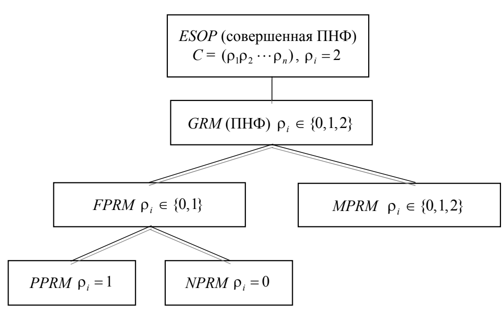
с (011)-полярностью $\overline{x}_1 \oplus \overline{x}_1 x_2 \oplus \overline{x}_1 x_3 \oplus x_2 x_3$,

с (001)-полярностью $x_3 \oplus \overline{x}_1 \overline{x}_2 \oplus \overline{x}_1 x_3 \oplus \overline{x}_2 x_3$,

с (000)-полярностью $1 \oplus \overline{x}_1 \oplus \overline{x}_2 \oplus \overline{x}_3 \oplus \overline{x}_1 \overline{x}_2 \oplus \overline{x}_1 \overline{x}_3 \oplus \overline{x}_2 \overline{x}_3$,

MPRM-полином с (222)-полярностью этой функции – это ее совершенная ПНФ $f = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \oplus x_1 x_2 x_3$.

На рисунке показана классификация рассмотренных *RM*-полиномов.



Процедуру задания C-полярности будем обозначать оператором $\overset{C}{\Rightarrow}$. Например, для $f(x_1,x_2,x_3)$ оператор $\overset{011}{\Rightarrow}$ означает, что искомым есть *FPRM*-полином с (011)-полярностью, аналитические выражения конъюнктермов которого задает кортеж $\langle \bar{x}_1, x_2, x_3 \rangle$, а числовых конъюнктермов – значения ноль и единица числового кортежа $\langle 0,1,1 \rangle$. Если имеем оператор $\overset{012}{\Rightarrow}$, то искомым будет *MPRM*-полином с (012)-полярностью, аналитические конъюнктермы которого определяют два кортежа $\langle \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3 \rangle$ и $\langle \bar{x}_1, x_2, x_3 \rangle$, а числовые конъюнктермы – значения ноль и единица числовых кортежей $\langle 0,1,0 \rangle$ и $\langle 0,1,1 \rangle$. При наличии оператора $\overset{122}{\Rightarrow}$ искомым есть *MPRM*-полином с (122)-полярностью, аналитические конъюнктермы которого определяют четыре кортежа $\langle x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \rangle$, $\langle x_1, \bar{x}_2, x_3 \rangle$, $\langle x_1, x_2, \bar{x}_3 \rangle$ и $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, а числовые конъюнктермы, соответственно, $\langle 1,0,0 \rangle$, $\langle 1,0,1 \rangle$, $\langle 1,1,0 \rangle$ и $\langle 1,1,1 \rangle$ и др.

В работе [1] преобразование «совершенная ТМФ $Y^1 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ полином Жегалкина» выполняется так: все нули в двоичных минтермах совершенной ТМФ Y^1 заданной функции f заменяются на символ поглощения (–), а образованные троичные конъюнктермы заменяются на образующие их числовые минтермы; из множества последних удаляются одинаковые пары чисел, вследствие чего получается ТМФ $Y^{\oplus}$ полинома Жегалкина (ТМФЖ $Y^{\oplus}$). Однако, если такой подход применять к преобразованию «(совершенная) ТМФ $Y^1 \overset{C}{\Rightarrow}$ *RM*-полином», то *RM*-полином с нужной C-полярностью образовывался бы только через код полярности $C = (11 \cdots 1)$, т.е. через ТМФЖ $Y^{\oplus}$.

В данной статье предложен *метод непосредственного преобразования* дизъюнктивного формата в полиномиальный, отличающийся от [1] тем, что каждый двоичный и/или троичный конъюнктерм ранга $r \in \{1,2,\ldots,n\}$ (совершенной) ТМФ Y^1 заданной функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ преобразуется непосредственно (без замены троичных конъюнктермов на их образующие и ТМФЖ $Y^{\oplus}$) в некоторое множество двоичных и/или троичных конъюнктермов рангов $r \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ полиномиального формата с заданной C-полярностью переменных. ПТМФ $Y^{\oplus}$ искомого *RM*-полинома с C-полярностью образуется после удаления пар одинаковых элементов из упомянутого множества. Чтобы получить аналитическое выражение *RM*-полинома заданной функции f достаточно применить правило [1]:

$$(1)_i \to x_i,\ (0)_i \to \bar{x}_i,\ (-)_i \to \text{отсутствующая } x_i,$$
$$\text{запятая } (,) \to \oplus.$$

Формирование числовых конъюнктермов ПТМФ $Y^{\oplus}$ *RM*-полиномов с заданной C-полярностью предлагаемым методом основано на аналитических преобразованиях каждой i-й переменной заданной функции f, а именно: замена $(1)_i \to (0)_i$ соответствует выражению $x_i = \bar{x}_i \oplus 1$, замена $(0)_i \to (1)_i$ – выражению $\bar{x}_i = x_i \oplus 1$, замена $(-)_i \to \big((0)_i,(1)_i\big)$ – выражению $1 = \bar{x}_i \oplus x_i$. Соответственно заданному коду полярности C числовая теоретико-множественная процедура формирования C-полярности в *RM*-полиномах выполняется над каждым i-м разрядом числовых конъюнктермов ПТМФ $Y^{\oplus}$ функции f по следующим правилам:

- в случае положительной поляризации

$$(0)_i \to \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix}_i,\ (1)_i \to (1)_i,\ (-)_i \to (-)_i; \qquad (7)$$

- в случае отрицательной поляризации $(\bar{0})_i \to (0)_i$,

$$(\bar{1})_i \to \begin{pmatrix} 0 \\ - \end{pmatrix}_i,\ (-)_i \to (-)_i; \qquad (8)$$

- в случае смешанной поляризации $(\tilde{0})_i \to (0)_i$

$$(\tilde{1})_i \to (1)_i,\ (-)_i \to \big((0)_i,(1)_i\big). \qquad (9)$$

Для получения *FPRM*-полиномов применяются правила (7) и (8), причем, в образуемых троичных конъюнктермах ПТМФ $Y^{\oplus}$ символ (–) комбинаторно занимает по одному, по два и так далее – только значимые разряды троичного конъюнктерма (совершенной) ТМФ Y^1, начиная с младшего. Следовательно, если в преобразовании ТМФ $Y^1 \overset{C}{\Rightarrow}$ *FPRM*-полином образующим выступает минтерм, то (–) в образуемых конъюнктермах расставляются комбинаторно по всем разрядам, а если образующий – конъюнктерм ранга $r \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, то его значимые разряды в образуемых конъюнктермах заменяют символы (–), а его собственные символы (–) переписываются. Например, пусть задано преобразование $x_1 x_2 \bar{x}_3 \overset{010}{\Rightarrow} f(\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3)$ и $x_1 \bar{x}_3 \overset{010}{\Rightarrow} f(\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3)$. Аналитическим методом получим следующие выражения:

$$x_1 x_2 \bar{x}_3 \overset{010}{\Rightarrow} (\bar{x}_1 \oplus 1) x_2 \bar{x}_3 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \oplus x_2 \bar{x}_3 \text{ и}$$
$$x_1 \bar{x}_3 \overset{010}{\Rightarrow} (\bar{x}_1 \oplus 1) \bar{x}_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \oplus \bar{x}_3.$$

Числовым теоретико-множественным методом получим соответственно:

$$(110) \overset{010}{\Rightarrow} (\bar{1}1\bar{0}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 010 \\ -10 \end{pmatrix} \text{ и } (1-0) \overset{010}{\Rightarrow} (\bar{1}-\bar{0}) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0-0 \\ --0 \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Методом непосредственного преобразования найти полином Жегалкина для ДНФ функции $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee x_3$.

Решение. Поскольку конъюнктермы заданной функции f взаимно ортогональны, то преобразовав ДНФ в ТМФ Y^1, по описанному ранее методу получим ТМФЖ $Y^{\oplus}$:

$$Y^1 = \{(100),(-10),(--1)\}^1 \overset{111^{\oplus}}{\Rightarrow}$$

$$\overset{111}{\Rightarrow}\left\{\begin{pmatrix}111\\11-\\1-1\\1--\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-11\\-1-\end{pmatrix},(--1)\right\}^{\oplus}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{(111),(11-),(1-1),(-11),(1--),(-1-),(--1)\}^{\oplus}.$$

Отсюда полином Жегалкина заданной функции $f=x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_1\oplus x_2\oplus x_3$.

Пример 2. Для функции $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$, заданной совершенной ТМФ $Y^1=\{2,7,9,12,15\}^1$, методом непосредственного преобразования найти следующие *FPRM*-полиномы: с (1111)-, с (1110)- и (1010)-полярностью (в [12, с. 476] этот пример решен методом карт Карно).

Решение.

$$Y^1=\{(0010),(0111),(1001),(1100),(1111)\}^1\overset{1111}{\Rightarrow}$$

$$\overset{1111}{\Rightarrow}\left\{\begin{pmatrix}1111\\111-\\1-11\\-111\\1-1-\\-11-\\--11\\--1-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1111\\-111\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1111\\11-1\\1-11\\1--1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1111\\111-\\11-1\\11--\end{pmatrix},(1111)\right\}^{\oplus}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{(1-1-),(-11-),(--11),(--1-),(1--1),(11--),(1111)\}^{\oplus}.$$

Итак, *FPRM*-полином с (1111)-полярностью функции $f=x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_3x_4\oplus x_3\oplus x_1x_4\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3x_4$.

FPRM-полином с (1110)-полярностью проще получить из ПТМФ $Y^{\oplus}$ *FPRM*-полинома с (1111)-полярностью, чем из совершенной ТМФ Y^1 заданной функции, поскольку для этого достаточно применить правило (8) только к конъюнктермам, имеющим единицы в младшем разряде (с весом 2^0):

$$(--11)\overset{1110}{\Rightarrow}(--1\bar{1})\Rightarrow\begin{pmatrix}--10\\--1-\end{pmatrix},$$

$$(1--1)\overset{1110}{\Rightarrow}(1--\bar{1})\Rightarrow\begin{pmatrix}1--0\\1---\end{pmatrix},$$

$$(1111)\overset{1110}{\Rightarrow}(111\bar{1})\Rightarrow\begin{pmatrix}1110\\111-\end{pmatrix}.$$

Заменив этими множествами неполяризованные конъюнктермы ПТМФ $Y^{\oplus}$ *FPRM*-полинома с (1111)-полярностью и выполнив процедуру упрощения, получим ПТМФ $Y^{\oplus}$ искомого *FPRM*-полинома:

$$Y^{\oplus}=\{(1-1-),(-11-),(--11),(--1-),(1--1),(11--),$$

$$(1111)\}^{\oplus}\Rightarrow\{(1-1-),(-11-),(--1-),(11--),\begin{pmatrix}--10\\--1-\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1--0\\1---\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1110\\111-\end{pmatrix}\}^{\oplus}\Rightarrow\{(1-1-),(-11-),(11--),$$

$$(--10),(1--0),(1---),(1110),(111-)\}^{\oplus}.$$

Следовательно, *FPRM*-полином с (1110)-полярностью

$$f(x_1,x_2,x_3,\bar{x}_4)=x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus$$

$$\oplus x_3\bar{x}_4\oplus x_1\bar{x}_4\oplus x_1\oplus x_1x_2x_3\bar{x}_4\oplus x_1x_2x_3.$$

FPRM-полином с (1010)-полярностью определим на основании ПТМФ $Y^{\oplus}$ *FPRM*-полинома с (1110)-полярностью, выполнив процедуру (8) только над конъюнктермами, имеющими единицы в разряде с весом 2^2:

$$(-11-)\overset{1010}{\Rightarrow}(-\bar{1}1-)\Rightarrow\begin{pmatrix}-01-\\--1-\end{pmatrix},\ (11--)\overset{1010}{\Rightarrow}(1\bar{1}--)\Rightarrow\begin{pmatrix}10--\\1---\end{pmatrix},$$

$$(1110)\overset{1010}{\Rightarrow}(1\bar{1}10)\Rightarrow\begin{pmatrix}1010\\1-10\end{pmatrix},\ (111-)\overset{1010}{\Rightarrow}(1\bar{1}1-)\Rightarrow\begin{pmatrix}101-\\1-1-\end{pmatrix}.$$

После соответствующих замен в ПТМФ $Y^{\oplus}$ *FPRM*-полинома с (1110)-полярностью и упрощения полученного множества, получим ПТМФ $Y^{\oplus}$ *FPRM*-полинома с (1010)-полярностью:

$$Y^{\oplus}=\{(--10),(-11-),(11--),(1-1-),$$

$$(1--0),(1---),(1110),(111-)\}^{\oplus}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{(--10),(1-1-),(1--0),(1---),\begin{pmatrix}-01-\\--1-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10--\\1---\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1-10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}101-\\1-1-\end{pmatrix}\}^{\oplus}\Rightarrow\{(--10),(1--0),(-01-),(--1-),$$

$$(10--),(1010),(1-10),(101-)\}^{\oplus}.$$

Следовательно, *FPRM*-полином с (1010)-полярностью

$$f(x_1,\bar{x}_2,x_3,\bar{x}_4)=x_3\bar{x}_4\oplus x_1\bar{x}_4\oplus\bar{x}_2x_3\oplus x_3\oplus$$

$$\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4\oplus x_1x_3\bar{x}_4\oplus x_1\bar{x}_2x_3.$$

Покажем, что последний результат будет тот же, если предлагаемый метод применить к совершенной ТМФ Y^1 заданной функции:

$$Y^1=\{(0010),(0111),(1001),(1100),(1111)\}^1\overset{1010}{\Rightarrow}$$

$$\overset{1010}{\Rightarrow}\{(0\bar{0}1\bar{0}),(0\bar{1}1\bar{1}),(1\bar{0}0\bar{1}),(1\bar{1}0\bar{0}),(1\bar{1}1\bar{1})\}^{\oplus}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}1010\\-010\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\101-\\1-10\\-010\\1-1-\\-01-\\--10\\--1-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\101-\\10-0\\10--\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\10-0\\1-10\\1--0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1010\\101-\\1-10\\1-1-\end{pmatrix}\right\}^{\oplus}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{(-01-), (--10), (--1-), (10--),$$
$$(1--0), (1010), (101-), (1-10)\}^{\oplus}.$$

Покажем обратное преобразование ПТМФ $Y^{\oplus} \Rightarrow$ совершенная ТМФ Y^1:

$$Y^{\oplus} = \{(-01-), (--10), (--1-), (10--),$$
$$(1--0), (1010), (101-), (1-10)\}^{\oplus} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(2,3,10,11), (2,6,10,14), (2,3,6,7,10,11,14,15),$$
$$(8,9,10,11), (8,10,12,14), (10), (10,11), (10,14)\}^{\oplus} =$$
$$= \{2,7,9,12,15\}^{\oplus} \equiv \{2,7,9,12,15\}^1.$$

Следовательно, рассмотренные четыре разновидности *FPRM*-полиномов функции $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$, имеющей совершенную ТМФ $Y^1 = \{0,7\}^1$, можно интерпретировать в числовом теоретико-множетвенном формате такими ПТМФ $Y^{\oplus}$:

с (111)-полярностью (полином Жегалкина) $Y^{\oplus} = \{(11-), (1-1), (-11), (1--), (-1-), (--1), (---)\}^{\oplus}$,

с (011)-полярностью

$$Y^{\oplus} = \{(01-), (0-1), (0--), (-11)\}^{\oplus},$$

с (001)-полярностью

$$Y^{\oplus} = \{(00-), (0-1), (-01), (--1)\}^{\oplus},$$

с (000)-полярностью

$$Y^{\oplus} = \{(00-), (0-0), (-00), (0--), (-0-), (--0), (---)\}^{\oplus}.$$

Совершенная ПТМФ $Y^{\oplus}$ *MPRM*-полинома этой функции с (222)-полярностью $Y^{\oplus} = \{(000), (111)\}^{\oplus}$.

В преобразовании ТМФ $Y^1 \overset{C}{\Rightarrow}$ *MPRM*-полином, причем для $N \neq (22\cdots2)$, правила (7) и (8) применяются так же, как в случае *FPRM*-полиномов, но только к разрядам образующих, не подлежащих смешанной поляризации. При этом правило (9) применяется только к разрядам, имеющим символ (–), значимые разряды образующих в этом случае переносятся без изменений. Например, при преобразовании $\bar{x}_1\bar{x}_3 \overset{1222}{\Rightarrow} f(x_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4)$ аналитическим путем получим

$$\bar{x}_1\bar{x}_3 \overset{1222}{\Rightarrow} (x_1 \oplus 1)(\bar{x}_2 \oplus x_2)\bar{x}_3(\bar{x}_4 \oplus x_4) =$$
$$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_1x_2\bar{x}_3x_4 \oplus$$
$$\oplus \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \oplus x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \oplus x_2\bar{x}_3x_4,$$

а числовым теоретико-множественным методом –

$$(0-0-) \overset{1222}{\Rightarrow} (0-\tilde{0}-) \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1000 \\ -000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1001 \\ -001 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1100 \\ -100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1101 \\ -101 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(1000), (1001), (1100), (1101),$$
$$(-000), (-001), (-100), (-101)\}^{\oplus}.$$

Пример 3. Методом непосредственного преобразования найти все *RM*-полиномы с фиксированой и смешанной полярностью для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной совершенной ТМФ $Y^1 = \{0,1,2,5,7\}^1$, и определить их цену реализации [11]).

Решение. Далее приведена таблица результатов определения ПТМФ $Y^{\oplus}$ и цен реализации всех *RM*-полиомов с фиксированной и смешанной *C*-полярностью, полученных методом непосредственного преобразования для функции *f*, заданной совершенной ТМФ $Y^1 = \{(000), (001), (010), (101), (111)\}^1$.

Код полярности *C*	ПТМФ $Y^{\oplus}$	Цена $k_{\theta} / k_l / k_{in}$
111	$\{(---), (-11), (1--), (1-1), (111)\}^{\oplus}$	5/7/0
110	$\{(---), (-1-), (-10), (1-0), (11-), (110)\}^{\oplus}$	6/10/3
112	$\{(--0), (--1), (-11), (1-0), (111)\}^{\oplus}$	5/9/2
101	$\{(---), (--1), (-01), (1--), (101)\}^{\oplus}$	5/7/2
100	$\{(--0), (-0-), (-00), (1--), (10-), (100)\}^{\oplus}$	6/10/7
102	$\{(--0), (-01), (1-0), (1-1), (101)\}^{\oplus}$	5/10/4
121	$\{(-0-), (-1-), (-11), (10-), (101), (11-)\}^{\oplus}$	6/11/3
120	$\{(-0-), (-10), (100), (11-)\}^{\oplus}$	4/8/4
122	$\{(-00), (-01), (-10), (100), (110), (111)\}^{\oplus}$	6/15/7*
011	$\{(--1), (0--), (0-1), (011)\}^{\oplus}$	4/7/3
010	$\{(---), (--0), (0-0), (01-), (010)\}^{\oplus}$	5/8/6
012	$\{(--1), (0-0), (011)\}^{\oplus}$	3/6/3
001	$\{(--1), (0--), (001)\}^{\oplus}$	3/5/3
000	$\{(---), (--0), (0--), (00-), (000)\}^{\oplus}$	5/7/7
002	$\{(--1), (0-0), (0-1), (001)\}^{\oplus}$	4/8/5
021	$\{(-01), (-11), (000), (01-)\}^{\oplus}$	4/9/5
020	$\{(-0-), (-00), (-1-), (-10), (000), (01-)\}^{\oplus}$	6/11/8
022	$\{(-01), (-11), (000), (010), (011)\}^{\oplus}$	5/13/7
211	$\{(0--), (011), (1-1)\}^{\oplus}$	3/6/2
210	$\{(0--), (01-), (010), (1--), (1-0)\}^{\oplus}$	5/9/5*
212	$\{(0-0), (0-1), (011), (1-1)\}^{\oplus}$	4/9/4
201	$\{(0--), (0-1), (001), (1-1)\}^{\oplus}$	4/8/4
200	$\{(0-0), (00-), (000), (1--), (1-0)\}^{\oplus}$	5/10/8*
202	$\{(0-0), (000), (00-), (1-1)\}^{\oplus}$	4/9/7*
221	$\{(00-), (01-), (011), (101), (111)\}^{\oplus}$	5/12/5
220	$\{(00-), (010), (10-), (100), (11-), (110)\}^{\oplus}$	6/15/8*
222	$\{(000), (001), (010), (101), (111)\}^{\oplus}$	5/15/8

В таблице выделены жирным шрифтом коды полярности *C*, принадлежащие ПТМФ $Y^{\oplus}$ *RM*-полиномов, имеющие минимальную цену реализации; значком * отмечены уточненные автором данные [11]. Например, ПТМФ $Y^{\oplus}$ *RM*-полинома с (210)-полярностью получена так:

$$Y^1 = \{(000), (001), (010), (101), (111)\}^1 \overset{210}{\Rightarrow}$$
$$\overset{210}{\Rightarrow} \{(\tilde{0}0\bar{0}), (\tilde{0}0\bar{1}), (\tilde{0}1\bar{0}), (\tilde{1}0\bar{1}), (\tilde{1}1\bar{1})\}^{\oplus} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{pmatrix}010\\0-0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}010\\01-\\0-0\\0--\end{pmatrix},(010),\begin{pmatrix}110\\11-\\1-0\\1--\end{pmatrix},\begin{pmatrix}110\\11-\end{pmatrix}\right\}^{\oplus}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{(0--),(01-),(010),(1--),(1-0)\}^{\oplus}.$$

На примере рассмотренной функции покажем взаимные преобразования *RM*-полиномов разных *C*-полярностей описанным методом. В частности, для ПТМФ $Y^{\oplus}=\{(0--),(01-),(010),(1--),(1-0)\}^{\oplus}$, представляющей *MPRM*-полином с (210)-полярностью, определим (сравнить с данными табл.):

- переход (210) $\Rightarrow$ (211)

$$Y^{\oplus}=\{(0--),(01-),(010),(1--),(1-0)\}^{\oplus}\overset{211}{\Rightarrow}$$

$$\overset{211}{\Rightarrow}\left\{(0--),(01-),\begin{pmatrix}011\\01-\end{pmatrix},(1--),\begin{pmatrix}1-1\\1--\end{pmatrix}\right\}^{\oplus}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{(0--),(011),(1-1)\}^{\oplus};$$

- переход (210) $\Rightarrow$ (110)

$$Y^{\oplus}=\{(0--),(01-),(010),(1--),(1-0)\}^{\oplus}\overset{110}{\Rightarrow}$$

$$\overset{110}{\Rightarrow}\left\{\begin{pmatrix}1--\\---\end{pmatrix},\begin{pmatrix}11-\\-1-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}110\\-10\end{pmatrix},(1--),(1-0)\right\}^{\oplus}$$

$$\Rightarrow\{(---),(-1-),(-10),(1-0),(11-),(110)\}^{\oplus};$$

- переход (210) $\Rightarrow$ (010)

$$Y^{\oplus}=\{(0--),(01-),(010),(1--),(1-0)\}^{\oplus}\overset{010}{\Rightarrow}$$

$$\overset{010}{\Rightarrow}\left\{(0--),(01-),(010),\begin{pmatrix}0--\\---\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0-0\\--0\end{pmatrix}\right\}^{\oplus}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{(---),(--0),(0-0),(01-),(010)\}^{\oplus};$$

- переход (210) $\Rightarrow$ (111)

$$Y^{\oplus}=\{(0--),(01-),(010),(1--),(1-0)\}^{\oplus}\overset{111}{\Rightarrow}$$

$$\overset{111}{\Rightarrow}\left\{\begin{pmatrix}1--\\---\end{pmatrix},\begin{pmatrix}11-\\-1-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}111\\11-\\-11\\-1-\end{pmatrix},(1--),\begin{pmatrix}1-1\\1--\end{pmatrix}\right\}^{\oplus}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{(---),(-11),(1--),(1-1),(111)\}^{\oplus}.$$

Переход из ПТМФ $Y^{\oplus}$ *FPRM*-полинома с $(11\cdots1)$-полярностью к ПТМФ $Y^{\oplus}$ *RM*-полинома с неединичной полярностью выполняется так: если искомое *FPRM*-полином – аналогично, а если ищется *MPRM*-полином со смешанной полярностью в i-м разряде, т.е. $(\sigma\cdots2_i\cdots\sigma)$, $\sigma\in\{0,1\}$, то перед выполнением соответствующих процедур все троичные конъюнктермы, имеющие символ (–) в i-м разряде, заменяются на комплементарные. Например, если над конъюнктермом $(1-1)$ нужно выполнить поляризацию кодом (021), то его сначала необходимо поляризовать кодом (121), разложив на комплементарные конъюнктермы, т.е. $(1-1)\overset{121}{\Rightarrow}\big((101),(111)\big)$, а затем поляризовать их заданным кодом $(101)\overset{021}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}001\\-01\end{pmatrix}$ и $(111)\overset{021}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}011\\-11\end{pmatrix}$. Если искомое *MPRM*-полином с $(\sigma\cdots2_i\cdots2_j\cdots\sigma)$-полярностью, то каждый троичный конъюнктерм, имеющий (–) в i-м и j-м разрядах, необходимо заменить на соответствующие четыре образующих конъюнктерма, и т.д. Такие преобразования покажем на примере нашей функции (сравнить с данными табл.):

- переход (111) $\Rightarrow$ (102)

$$Y^{\oplus}=\{(---),(-11),(1--),(1-1),(111)\}^{\oplus}\overset{112}{\Rightarrow}$$

$$\overset{112}{\Rightarrow}\big\{\big((--0),(--1)\big),(-11),\big((1-0),(1-1)\big),(1-1),(111)\big\}^{\oplus}\overset{102}{\Rightarrow}$$

$$\overset{102}{\Rightarrow}\left\{(--0),(--1),\begin{pmatrix}-01\\--1\end{pmatrix},(1-0),\begin{pmatrix}101\\1-1\end{pmatrix}\right\}^{\oplus}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{(--0),(-01),(1-0),(1-1),(101)\}^{\oplus};$$

- переход (111) $\Rightarrow$ (122)

$$Y^{\oplus}=\{(---),(-11),(1--),(1-1),(111)\}^{\oplus}\overset{122}{\Rightarrow}$$

$$\overset{122}{\Rightarrow}\left\{\begin{pmatrix}-00\\-01\\-10\\-11\end{pmatrix},(-11),\begin{pmatrix}100\\101\\110\\111\end{pmatrix},\begin{pmatrix}101\\111\end{pmatrix},(111)\right\}^{\oplus}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{(-00),(-01),(-10),(100),(110),(111)\}^{\oplus}.$$

Заключение. На основании предложенной числовой теоретико-множественной интерпретации *FPRM*-полиномов и *MPRM*-полиномов с произвольной *C*-полярностью логических функций от n переменных разработан метод непосредственного преобразования конъюнктермов (совершенной) ТМФ или ДНФ в соответствующие одночлены упомянутых *RM*-полиномов (в том числе обратного и взаимного преобразования), который, как видно из примеров, довольно просто можно реализовать на компьютере без каких-либо промежуточных преобразований. Метод не будет терять своих преимуществ и в случае соответствующих преобразований системы логических функций от n переменных.

●