УДК 519.64, 519.65

Е.Н. Коломыс, Л.В. Луц, В.А. Людвиченко, С.С. Мельникова

Оценки вычислительной сложности некоторых алгоритмов аппроксимации функций рядами Фурье с заданной точностью

Построены алгоритмы аппроксимации функций некоторых классов рядами Фурье, получены оценки их основных характеристик. Рассмотрен алгоритм вычисления оптимальных параметров предлагаемых алгоритмов построения ε-решений задач аппроксимации функций рядами Фурье.

The algorithms for approximation functions some classes of Fourier's series are constructed, the evaluations of their basic characteristics are obtained. We offer algorithm for computing of optimal parameters for proposed algorithms of construction ε-solutions of a problems approximation function of Fourier's series.

Побудовано алгоритми апроксимації функцій деяких класів рядами Фур'є, отримано оцінки їх основних характеристик. Розглянуто алгоритм обчислення оптимальних параметрів запропонованих алгоритмів побудови ε-розв'язань задач апроксимації функцій рядами Фур'є.

Введение. Задача аппроксимации (приближения или восстановления) функции $f(x)$ есть, с одной стороны, вспомогательной для многих задач прикладной математики, а с другой – достаточно важной, особенно в случаях, когда, например, функция $f(x)$ имеет сложное аналитическое строение или задана своими значениями как результат измерения эксперимента. В таких ситуациях естественно вместо функции $f(x)$ использовать некоторую другую функцию $S(x, f)$, которая достаточно *близка* к $f(x)$, но имеет более простой аналитический вид (например, сплайн, полином Лагранжа, Эрмита, ряд Фурье и др.).

Один из самых распространенных способов решения этой задачи – аппроксимация функций рядами Фурье с использованием разных систем базисных функций, особенно активно применяется, например, в задачах цифровой обработки сигналов [1, 2].

Аппроксимант $S(x, f)$, как правило, строится в виде

$$S(x,f)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k v_k\left(x\right), \qquad (1)$$

$$a_k=\int_a^b f(x)v_k\left(x\right)dx,\ k=0,1,2,..., \qquad (2)$$

где $\{v_k(x)\}$ – фиксированная линейно независимая и ортонормированная система функций.

Ряд (1) с коэффициентами, составленными по формуле (2) называется (обобщенным) рядом Фурье данной функции, а коэффициенты – ее (обобщенными) коэффициентами Фурье. Если $v_k\left(x\right)=\{\cos kx, \sin kx\}$, т.е. $v_k(x)$ – тригонометрический полином, то (1) – (2) – тригонометрический ряд Фурье [3].

В статье рассматриваются задачи аппроксимации функции $f(x)$, которая известна своими значениями в N точках, тригонометрическим рядом Фурье с требуемой точностью и при заданном ограничении на время ее решения на компьютере. Основное внимание уделено получению оценок вычислительной сложности (времени T) и решению задачи аппроксимации функции $f\left(x\right)\in F$ рядом Фурье с заданной или максимально возможной точностью с использованием эффективных алгоритмов решения оптимизационных задач [4].

Постановки задач

Приведем общую постановку решения задачи аппроксимации функции в соответствии с технологией решения задач вычислительной и прикладной математики с заданными значениями характеристик качества [5, 6].

Пусть K – класс задач аппроксимации функций, $A(X)$ – класс вычислительных алгоритмов (ВА), предназначенных для построения решения задач k из класса K ($k\in K$) с использованием исходной информации $I=I(I_0,I_N(k))$, где I_0 – информация о свойствах задач k из класса K, $I_N=I_N(k)=(i_1(k),...,i_N(k))^T$ – информация о задаче $k\in K$ в виде N функционалов, вычисленных на элементах задачи k.

Пусть $c(Y)$ – модель компьютера, включающая определенные архитектурные свойства компьютера и принадлежащая некоторому классу моделей $C(Y): c(Y) \in C(Y)$.

Ставится задача: решение (в общем случае приближенное) задачи $k \in K$ при условиях:

$$\rho(E(I,X,Y)) \le \varepsilon, \qquad (3)$$

$$T(\varepsilon,I,X,Y) \le T_0(\varepsilon), \qquad (4)$$

$$M(\varepsilon,I,X,Y) \le M_0(\varepsilon), \qquad (5)$$

где $\rho(\cdot)$ – некоторая мера погрешности приближенного решения задачи $k \in K$; I – исходные данные задачи, $E(I, X, Y)$, как правило, – полная погрешность приближенного решения, которая суммирует три составляющих: $E_H(\cdot)$ – неустранимой погрешности за счет неточности исходных данных, $E_\mu(\cdot)$ – погрешности метода (алгоритма), $E_\tau(\cdot)$ – погрешности округлений [2–3, 5]; X, Y – векторы параметров, характеризующие соответственно алгоритмы и компьютеры из классов A и C; $T(I, X, Y)$, $M(I, X, Y)$ – соответственно процессорное время и память компьютера, необходимые для вычисления приближенного решения; ε, $T_0(\varepsilon)$, $M_0(\varepsilon)$ – ограничения, заданные на основе требований к качеству решения задачи и свойств исходной информации I (объема, точности, структуры, способа получения).

Приближенное решение, для которого выполняется условие (3), называется ε-решением, $A(\varepsilon, X, Y)$ – множество ВА построения ε-решения. Вычислительный алгоритм, удовлетворяющий условиям (3) и (4), называется T-эффективным, $A(\varepsilon, T_0, X, Y)$ – множество T-эффективных ВА.

Наряду с задачей (3) – (5) целесообразно рассмотреть также задачу

$$\varepsilon_{\min} = \min_{\substack{I,X,Y \\ T(I,X,Y)\le T_0}} E(I,X,Y) = \varepsilon^0. \qquad (6)$$

В качестве класса задач K рассмотрим задачи ε-восстановления (или ε-приближения) на компьютере $c(Y)$ функции $f(x) \in F$ из некоторого класса функций F, заданных своими значениями в N точках отрезка $[-l, l]$.

Пусть необходимо выбрать функцию $S(x, f)$ и предложить алгоритм $a(X) \in A(\varepsilon, I, X, Y)$ построения такой функции $S(x, f)$, которая отклоняется от $f(x) \in F$ на $[-l, l]$ не более чем на заданную величину ε ($\varepsilon > 0$), т.е. погрешность аппроксимации E удовлетворяет условию (3), а именно:

$$\rho(E(I,X,Y)) = \| f(x) - S(x,f) \|_1 =$$

$$= \max_{\substack{f(x)\in F \\ x\in[-l,\, l]}} | f(x) - S(x,f) | \le \varepsilon,$$

и это построение осуществляется на выбранной модели компьютера $c(Y)$ с параметрами Y за время $T = T(\varepsilon, I, X, Y)$, не превышающее заданного T_0, т.е. удовлетворяет условию (4).

Пусть функция $f(x) \in F$ на отрезке $[-l, l]$ задана N своими значениями $\{f_i\}_0^{N-1}$ в некотором наборе узловых точек $\{x_i\}_0^{N-1}$ из ее области определения. В этом случае компоненты вектора I – $I_0 = F$, $I_N = I_N(k) = (f_0,...,f_{N-1})^T$, где $\{f_i\}_0^{N-1} = f(x_i)$, $i = \overline{0, N-1}$ – значения функции $f(x)$ в N точках $\{x_i\}_0^{N-1}$ отрезка $[-l, l]$, компонентами вектора $Y = (\tau, \{t_i\}_1^p)$ есть: τ – длина разрядной сетки компьютера $c(Y)$, $\{t_i\}_1^p$ – время выполнения элементарных операций из некоторого набора p операций на $c(Y)$.

В качестве задачи $k \in K$ возьмем аппроксимацию функций рядами Фурье [3, 7] вида

$$f(x) \approx S(x,f) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \right), \qquad (7)$$

где a_k, b_k – коэффициенты ряда Фурье, определяемые соотношениями

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \; k = 0,1,2,3, \dots ,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \; k = 1,2,3, \dots . \qquad (8)$$

Функцию $f(x)$ будем аппроксимировать конечными частичными суммами Фурье вида

$$S_n(x,f)=\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{a}_k\cos\frac{k\pi x}{l}+\tilde{b}_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \quad (9)$$

где $\tilde{a}_0, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k,\ k=\overline{1,n},$ – приближенные значения коэффициентов ряда Фурье, вычисляемые соответствующими алгоритмами численного интегрирования.

В качестве алгоритмов $a(X)$ решения задачи $k\in K$ рассмотрим алгоритмы аппроксимации функций $f(x)\in F$ частичными суммами Фурье вида (9) с использованием для вычисления коэффициентов Фурье оптимальных по точности и близких к ним на классах F квадратурных формул вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций [1, 2]. Очевидно, что параметрами алгоритма $a(X)$, от которых зависит оценка E, будут: F – класс функций, n – количество используемых членов ряда Фурье, N – объем входной информации, необходимый для вычисления коэффициентов Фурье $\tilde{a}_0, \tilde{a}_k$, $\tilde{b}_k,\ k=\overline{1,n}$.

В работах [1, 2] приведены оценки полных погрешностей вычисления $\tilde{a}_k$ и $\tilde{b}_k$ с помощью квадратурных формул, которые обозначим как V_{a_k} и V_{b_k}. Тогда оценку E можно представить в виде:

$$\begin{aligned}E&=E(F,N,n)=\left\|f(x)-S_n(x,f)\right\|_1=\\&=\max_{\substack{f(x)\in F\\x\in[-l,\,l]}}\left|f(x)-S_n(x,f)\right|=\\&=\max_{\substack{f(x)\in F\\x\in[-l,\,l]}}\left|\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right]-\right.\\&\left.-\left[\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{a}_k\cos\frac{k\pi x}{l}+\tilde{b}_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right]\right|\le\\&\le\left|R_n(F)\right|+\frac{V_{a_0}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(V_{a_k}+V_{b_k}\right),\end{aligned} \quad (10)$$

где $V_{a_k}=V_{a_k}(F,\,N)=\max\limits_{\substack{f(x)\in F\\x\in[-l,\,l]}}\left|a_k-\tilde{a}_k\right|$,

$V_{b_k}=V_{b_k}(F,\,N)=\max\limits_{\substack{f(x)\in F\\x\in[-l,\,l]}}\left|b_k-\tilde{b}_k\right|$ – погрешности приближенного вычисления коэффициентов $\tilde{a}_0, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k,\ k=\overline{1,n},\ R_n(F)$ – оценка остатка ряда Фурье на классе F при переходе от бесконечной суммы (7) к конечной (9).

Для аппроксимации функции $f(x)\in F$ рядом Фурье с заданной точностью ε ($\varepsilon>0$) при выполнении заданных ограничений на время ее решения на компьютере $c(Y)$ необходимо обеспечить выполнение условия

$$E(F,N,n)=\max_{\substack{f(x)\in F\\x\in[-l,\,l]\\T=T(F,N,n,Y)\le T_0}}\left|f(x)-S_n(x,f)\right|\le\varepsilon. \quad (11)$$

Для аппроксимации функции $f(x)\in F$ рядом Фурье с максимально возможной точностью при заданном ограничении на время ее решения T_0, необходимо решить следующие экстремальные задачи

$$\varepsilon_{\min}=\min_{\substack{N,n\\T\le T_0}}E(F,N,n)=\varepsilon^0, \quad (12)$$

или (если N задано)

$$\varepsilon_{\min}=\min_{\substack{n\\T\le T_0}}E(F,N,n)=\varepsilon^0. \quad (13)$$

Рассмотрены следующие классы функций:

- $C_{L,\alpha}$ – класс функций, определенных на $[-l, l]$, удовлетворяющих условию Гельдера с константой L и показателем α, $0<\alpha\le1$: $\left|f(x')-f(x'')\right|\le L\left|x'-x''\right|^{\alpha}$, $x', x''\in[-l,l]$;
- C_L – класс функций Липшица (класс $C_{L,\alpha}$, $\alpha=1$);
- $W_{2,L}$ – класс функций, имеющих первую кусочно-непрерывную производную и при этом $f'(x)\in C_L$.
- $C_{L,N}$ – класс функций C_L с заданными фиксированными значениями f_i в узлах фиксированной сетки x_i, $i=\overline{0,N-1}$;
- $W_{2,L,N}$ – класс функций $W_{2,L}$ с заданными фиксированными значениями функции $\left(f_i\right)_0^N$ и ее первой производной $\left(f_i'\right)_0^N$ в узлах фиксированной сетки $\left\{x_i\right\}_0^N$

Аппроксимация функций некоторых классов рядами Фурье: алгоритмы и оценки их основных характеристик

В работе [8] получены оценки погрешности E предложенных алгоритмов аппроксимации $f(x)$ с использованием для вычисления коэффициентов Фурье оптимальных по точности и близких к ним квадратурных формул вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций из приведенных классов функций, даны соответствующие квадратурные формулы.

Если периодическая с периодом $2l$ функция $f(x)\in C_{L,\alpha}$, $x\in[-l,l]$ аппроксимируется рядом Фурье вида (9), где коэффициенты $\tilde{a}_k$ и $\tilde{b}_k$ вычисляются с помощью оптимальных по порядку точности при $N\geq\frac{n\pi}{l}$ квадратурных формул вида

$$R_{1,a}(k)=\sum_{\nu=0}^{N-1}f_\nu\int_{x_\nu-1/2}^{x_\nu+1/2}\cos\frac{k\pi}{l}xdx,\quad k=0,1,2,...,$$
$$R_{1,b}(k)=\sum_{\nu=0}^{N-1}f_\nu\int_{x_\nu-1/2}^{x_\nu+1/2}\sin\frac{k\pi}{l}xdx,\quad k=0,1,2,..., \tag{14}$$

где $f_\nu=f(x_\nu)$, $x_\nu=\nu\cdot\Delta x_\nu$, $\Delta x_\nu=x_{\nu+1}-x_\nu$, $x_{\nu-1/2}=x_\nu-\Delta x_\nu/2$, $x_{\nu+1/2}=x_\nu+\Delta x_{\nu+1}/2$, $\nu=\overline{0,N-1}$, $\Delta x_{-1}=0$, $x_0=-l$, $x_{N-1+1/2}=x_N=l$, то погрешность аппроксимации имеет вид [8]:

$$E_{C_{L,\alpha}}\leq|R_n(f)|+\frac{V_{a_0}}{2}+\sum_{k=1}^{n}(V_{a_k}+V_{b_k})<$$
$$<C_1(\alpha)\left(1-\frac{C_2(\alpha)}{(n+1/2)^\alpha}\right)+C_3(\alpha)\frac{2n+1/2}{l(2N)^\alpha}, \tag{15}$$

где $C_1(\alpha)=\frac{Ll^\alpha}{\alpha}$, $C_2(\alpha)=\frac{1}{(\alpha+1)\pi^\alpha}$, $C_3(\alpha)=$ $=\frac{L(2Cl)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, константа C определяется соотношением $\max\limits_{0\leq\nu\leq N-1}\Delta x_\nu=\frac{2Cl}{N}$.

В случае $\alpha=1$ функция $f(x)\in C_L$, $x\in[-l,l]$, погрешность аппроксимации имеет вид

$$E_{C_L}<\frac{4Ll}{\pi}\left(\frac{\ln n}{n}+\frac{2+\ln\pi}{n}\right)+$$
$$+\frac{L}{l}\left\{\sum_{\nu=0}^{N-2}\left[\frac{\Delta^2x_\nu}{8}+4\frac{l^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{k\pi\Delta x_\nu}{4l}\times\right.\right.$$
$$\left.\times\left(\left|\cos\frac{k\pi x_{\nu+1/2}}{l}\right|+\left|\sin\frac{k\pi x_{\nu+1/2}}{l}\right|\right)\right]+$$
$$\left.+\frac{\Delta^2x_{N-1}}{4}+\sum_{k=1}^{n}\left(P_{a,1}(k)+P_{b,1}(k)\right)\right\}, \tag{16}$$

где

$$P_{a,1}(k)=$$
$$=\frac{l}{\pi k}\left|\Delta x_{N-1}\sin k\pi-\frac{2l}{k\pi}\sin\left(k\pi-\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right)\sin\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right|,$$
$$P_{b,1}(k)=$$
$$=\frac{l}{\pi k}\left|\Delta x_{N-1}\cos k\pi-\frac{2l}{k\pi}\cos\left(k\pi-\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right)\sin\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right|,$$
$$\Delta x_\nu=x_{\nu+1}-x_\nu.$$

Если $\{x_i\}_0^{N-1}$ – равномерная сетка ($x_\nu=-l+$ $+\nu\cdot\Delta x$, $\Delta x=2l/N$, $\nu=\overline{0,N-1}$), оценки V_{a_k}, V_{b_k}, $k=1,2,3,...$ имеют вид [1, 8]:

$$V_{i_k}\leq\frac{2L}{\pi N}+P_{i,1}(k),\ i=a,b, \tag{17}$$

где

$$P_{a,1}(k)=\frac{L}{\pi k}\left|\frac{2l}{k\pi}\sin\left(k\pi-\frac{k\pi}{2lN}\right)\sin\frac{k\pi}{2lN}-\frac{\sin k\pi}{N}\right|,$$
$$P_{b,1}(k)=\frac{L}{\pi k}\left|\frac{2l}{k\pi}\cos\left(k\pi-\frac{k\pi}{2lN}\right)\sin\frac{k\pi}{2lN}-\frac{\cos k\pi}{N}\right|$$

и погрешность аппроксимации (16) имеет вид:

$$E_{C_L}<\frac{4Ll}{\pi}\left(\frac{\ln n}{n}+\frac{2+\ln\pi}{n}\right)+\frac{Ll}{N}\left(1+\frac{1}{N}\right)+$$
$$+\frac{4Ln}{\pi N}+\sum_{k=1}^{n}\left(P_{a,1}(k)+P_{b,1}(k)\right), \tag{18}$$

Замечание 1. На практике, как правило, достаточно использовать оценки V_{i_k}, $i=a,b$, записанные с точностью до главного члена относительно величины $1/N$: $V_{i_k}\sim\frac{2L}{\pi N}$, $i=a,b$.

Тогда погрешность аппроксимации

$$E_{C_L}\sim\frac{4Ll}{\pi}\left(\frac{\ln n}{n}+\frac{2+\ln\pi}{n}\right)+\frac{4L}{N}\left\{\frac{n}{\pi}+\frac{1}{4l}\right\}.$$

Сузим рассмотренный класс функций Липшица C_L на класс $C_{L,N}$. Для этого класса в [1, 2] построены оптимальные по точности при $N \geq \frac{n\pi}{l}$ квадратурные формулы вида:

$$R_{2,a}(k) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f_2^*(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k = 0,1,2,...,$$
$$R_{2,b}(k) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f_2^*(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k = 1,2,3,..., \tag{19}$$

где

$$f_2^*(x) = \begin{cases} f_\upsilon, & x_\upsilon \leq x \leq \bar{x}_\upsilon, \\ f_\upsilon + L(x - x_\upsilon)\operatorname{sign}(\Delta f_\upsilon), & \bar{x}_\upsilon \leq x \leq \bar{\bar{x}}_\upsilon, \\ f_{\upsilon+1}, & \bar{\bar{x}}_\upsilon \leq x \leq x_{\upsilon+1}, \\ f_{N-1}, & x_{N-1} \leq x \leq x_N, \end{cases} \tag{20}$$

$x \notin [x_{N-1}, x_N]$,

$$\bar{x}_\upsilon = \frac{x_\upsilon + x_{\upsilon+1}}{2} - \frac{|\Delta f_\upsilon|}{2L}, \; \bar{\bar{x}}_\upsilon = \frac{x_\upsilon + x_{\upsilon+1}}{2} + \frac{|\Delta f_\upsilon|}{2L},$$
$$\Delta f_\nu = f_{\nu+1} - f_\nu .$$

В случае когда периодическая с периодом $2l$ функция $f(x) \in C_{L,N}$, $x \in [-l, l]$ аппроксимируется рядом Фурье вида (9), где коэффициенты $\tilde{a}_k$ и $\tilde{b}_k$ вычисляются с помощью квадратурных формул вида (19) – (20), то оценка погрешности аппроксимации имеет вид [8]:

$$E_{C_{L,N}} < \frac{4Ll}{\pi}\left(\frac{\ln n}{n} + \frac{2+\ln \pi}{n}\right) + \frac{L}{l}\Bigg\{\sum_{\nu=0}^{N-2}\Bigg[\frac{\Delta^2 x_\nu}{8} - \frac{\Delta^2 f_\nu}{8L^2} +$$
$$+4\frac{l^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\left(\sin^2\frac{k\pi\Delta x_\nu}{4l} - \sin^2\frac{k\pi|\Delta f_\nu|}{4Ll}\right)\left(\left|\cos\frac{k\pi(x_\nu + x_{\nu+1})}{2l}\right| +\right.$$
$$\left.+\left|\sin\frac{k\pi(x_\nu + x_{\nu+1})}{2l}\right|\right)\Bigg] + \frac{\Delta^2 x_{N-1}}{4} + \sum_{k=1}^{n}\left(P_{a,2}(k) + P_{b,2}(k)\right)\Bigg\}, \tag{21}$$

где $\Delta f_\nu = f_{\nu+1} - f_\nu$,

$$P_{a,2}(k) = \frac{l}{\pi k}\left|\Delta x_{N-1}\sin k\pi - \frac{2l}{k\pi}\sin\left(k\pi - \frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right)\sin\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right|,$$
$$P_{b,2}(k) = \frac{L}{\pi k}\left|\Delta x_{N-1}\cos k\pi - \frac{2l}{k\pi}\cos\left(k\pi - \frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right)\sin\frac{k\pi\Delta x_{N-1}}{2l}\right|.$$

Если периодическая с периодом $2l$ функция $f(x) \in W_{2,L}$, $x \in [-l, l]$ аппроксимируется рядом Фурье вида (9), где коэффициенты $\tilde{a}_k$ и $\tilde{b}_k$ вычисляются с помощью оптимальных по порядку точности при $N \geq \left|\frac{n\pi}{l}\right|$ квадратурных формул вида

$$R_{4,a}(\omega) = \int_{-l}^{l} S_3(x)\cos\frac{k\pi}{l} x dx,$$
$$R_{4,b}(\omega) = \int_{-l}^{l} S_3(x)\sin\frac{k\pi}{l} x dx, \tag{22}$$

где $S_3(x)$ – кубический эрмитов сплайн, $S_3(x_i) = f_i$, $S_3'(x_i) = f_i'$, $i = \overline{0,N}$, который на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ можно записать в виде [2, 9, 10] $S_3(x) = \varphi_1(t) f_i + \varphi_2(t) f_{i+1} + \varphi_3(t) h f_i' + \varphi_4(t) h f_{i+1}'$, где $\varphi_1(t) = (1-t)^2(1+2t)$, $\varphi_2(t) = t^2(3-2t)$, $\varphi_3(t) = t(1-t)^2$, $\varphi_4(t) = -t^2(1-t)$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $t = (x - x_i)/h_i$, то оценка погрешности аппроксимации имеет вид [8]:

$$E_{W_{2,L}} < |R_n(F)| + \frac{V_{a_0}}{2} + \sum_{k=1}^{n}(V_{a_k} + V_{b_k}) =$$
$$= \frac{4lL}{\pi}\cdot\frac{1}{n} + \frac{L}{16}\left(\frac{n\sqrt{2\pi + l}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{N^2}, \tag{23}$$

$$V_{a_k} \leq \frac{L}{16N^2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{l\sin 2\frac{k\pi}{l}}{4k\pi}},$$

$$V_{b_k} \leq \frac{L}{16N^2}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{l\sin 2\frac{k\pi}{l}}{4k\pi}}. \tag{24}$$

Сузим класс функций $W_{2,L}$ на класс $W_{2,L,N}$. Рассмотрим случай, когда функция $f(x) \in W_{2,L,N}$ задана таблицей значений функции $\{f_i\}_0^N$ и ее первой производной $\{f_i'\}_0^N$ в узлах заданной сетки $\{x_i\}_0^N$. Для этого случая (при выполнении определенных условий, налагаемых на функции $f(x) \in W_{2,L,N}$ и ее производные) в [1, 2] построены оптимальные по точности при $N \geq \frac{n\pi}{l}$ квадратурные формулы вида

$$R_{5,a}(k)=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f_5^*(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx,$$

$$R_{5,b}(k)=\sum_{\nu=0}^{N-1}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f_5^*(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx,\ k=1,2,3,..., \quad (25)$$

где

$$f_5^*(x)=\begin{cases} f_\nu+f'_\nu(x-x_\nu), & x_\nu\le x\le\bar{x}_\nu,\\ \frac{1}{2}[f_\nu+f'_\nu(x-x_\nu)+f_{\nu+1}+f'_{\nu+1}(x-x_{\nu+1})]+ & \\ +\frac{L}{4}\operatorname{sign}(\Delta f'_\nu)\left[(x-x_\nu)^2-(x-x_{\nu+1})^2\right], & \bar{x}_\nu\le x\le\bar{\bar{x}}_\nu,\\ f_{\nu+1}+f'_{\nu+1}(x-x_{\nu+1}), & \bar{\bar{x}}_\nu\le x\le x_{\nu+1},\\ & x\notin[x_{N-1},x_N],\\ f_{N-1}+f'_{N-1}(x-x_{N-1}), & x\in[x_{N-1},x_N], \end{cases} \quad (26)$$

$$\bar{x}_\nu=\frac{x_\nu+x_{\nu+1}}{2}-\frac{|\Delta f'_\nu|}{2L},\ \bar{\bar{x}}_\nu=\frac{x_\nu+x_{\nu+1}}{2}+\frac{|\Delta f'_\nu|}{2L},\ \Delta f'_\nu=f'_{\nu+1}-f'_\nu.$$

Если периодическая с периодом $2l$ функция $f(x)\in W_{2,L,N}$, $x\in[-l,l]$ аппроксимируется рядом Фурье вида (9), где коэффициенты $\tilde{a}_k$ и $\tilde{b}_k$ вычисляются с помощью квадратурных формул вида (25) – (26), то погрешность аппроксимации определяется соотношением [8]

$$E_{W_{2,L,N}}\le|R_n(f)|+\frac{\delta_{a_0}}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\delta_{a_k}+\delta_{b_k}), \quad (27)$$

где

$$|R_n(f)|<\frac{4lL}{\pi}\cdot\frac{1}{n},\ \delta_{a_0}=\frac{L}{2l}\left|\sum_{\nu=0}^{N-2}\left[\frac{\Delta x_\nu}{3}\left(\frac{\Delta^2 x_\nu}{4}+\frac{\Delta^2 f'_\nu}{4L^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\Delta f'_\nu}{L^2}\left(\Delta f_\nu-\Delta x_\nu\frac{f'_\nu+f'_{\nu+1}}{2}\right)\right]+\frac{\Delta^3 x_{N-1}}{3}\right|,$$

$$\delta_{a_k}=\frac{Ll}{2\pi k}\left|\sum_{\nu=0}^{N-2}\left\{\sin\frac{\pi k}{2l}(x_\nu+x_{\nu+1})\times\right.\right.$$

$$\times\left(\sin^2\frac{\pi k\Delta x_\nu}{4l}-\sin^2\frac{\pi k\Delta f'_\nu}{4Ll}-\right.$$

$$-\left(\frac{\Delta x_\nu^2}{4}-\frac{(\Delta f'_\nu)^2}{4L}\right)\cos\frac{\pi k\Delta f'_\nu}{4Ll}+$$

$$+\operatorname{sign}(\Delta f'_\nu)\left[\Delta x_\nu\left(f'_\nu+f'_{\nu+1}\right)-2\Delta f_\nu\right]\times$$

$$\left.\times\cos\frac{\pi k}{2l}(x_\nu+x_{\nu+1})\sin\frac{\pi k\Delta f'_\nu}{4Ll}\right)\operatorname{sign}\cos\frac{\pi k}{l}x_\nu+,$$

$$\left.+P_{a,5}(k)\right|\quad k=1,2,3,...,$$

$$P_{a,5}(k)=\operatorname{sign}\left(\cos\frac{k\pi}{l}x_{N-1}\right)\times$$

$$\times\left|\frac{2l}{k\pi}\Delta x_{N-1}\cos k\pi-\Delta x_{N-1}^2\sin k\pi+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\omega^2}\left(\sin k\pi-\sin\frac{k\pi}{l}x_{N-1}\right)\right|,$$

$$\delta_{b_k}=\frac{Ll}{2\pi k}\left|\sum_{\nu=0}^{N-2}\left\{\cos\frac{\pi k}{2l}(x_\nu+x_{\nu+1})\times\right.\right.$$

$$\times\left(\sin^2\frac{\pi k\Delta x_\nu}{4l}-\sin^2\frac{\pi k\Delta f'_\nu}{4Ll}-\right.$$

$$-\left(\frac{\Delta x_\nu^2}{4}-\frac{(\Delta f'_\nu)^2}{4L}\right)\cos\frac{\pi k\Delta f'_\nu}{4Ll}+\operatorname{sign}(\Delta f'_\nu)\times$$

$$\times\left[\Delta x_\nu(f'_\nu+f'_{\nu+1})-2\Delta f_\nu\right]\times$$

$$\left.\times\sin\frac{\pi k}{2l}(x_\nu+x_{\nu+1})\sin\frac{\pi k\Delta f'_\nu}{4Ll}\right)\operatorname{sign}\sin\frac{\pi k}{l}x_\nu+$$

$$\left.+P_{b,5}(k)\right|,\quad k=1,2,3,...,$$

$$P_{b,5}(k)=\operatorname{sign}\left(\sin\frac{k\pi}{l}x_{N-1}\right)\times$$

$$\times\left|\frac{2l}{k\pi}\Delta x_{N-1}\sin k\pi-\Delta x_{N-1}^2\cos k\pi+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\omega^2}\left(\cos k\pi-\cos\frac{k\pi}{l}x_{N-1}\right)\right|,$$

$$\Delta x_\nu=x_{\nu+1}-x_\nu,\ \Delta f_\nu=f_{\nu+1}-f_\nu,\ \Delta f'_\nu=f'_{\nu+1}-f'_\nu.$$

Для решения задачи аппроксимации функции $f(x)\in F$ рядом Фурье с заданной или максимально возможной точностью с использованием эффективных алгоритмов решения оптимизационных задач (11) – (13) [4] необходимо получить оценки вычислительной сложности (времени реализации T) приведенных выше алгоритмов, позволяющих задавать реальные ограничения T_0. Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. Оценка вычислительной сложности алгоритма $S_n(x,f)$ (9) с использованием квадратурной формулы (14) имеет вид

$$T_1(n,N)\le(7(N-1)+n)\tau_1+(2n+3)N\tau_2+$$
$$+(n+3)\tau_3+(N+1)\tau_4+nN\tau_5, \quad (28)$$

где τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 – время выполнения операций сложения, умножения, деления, двоичного сдвига числа соответственно, τ_5 – время, затрачиваемое на вычисление функции $\sin x$ или $\cos x$ на компьютере. Если $\{x_i\}_0^{N-1}$ – равномерная сетка ($x_\nu = -l + \nu \cdot \Delta x$, $\Delta x = 2l/N$, $\nu = \overline{0, N-1}$), оценка времени реализации $S_n(x, f)$ оценивается соотношением

$$T_2(n,N) \le (3(N-1)+n)\tau_1 + 2((n+1)N-1)\tau_2 + \\ +(n+4)\tau_3 + 2\tau_4 + nN\tau_5. \qquad (29)$$

Доказательство. Для доказательства оценки (28) приведем квадратурные формулы (14) и функцию $S_n(x,f)$, определяемую соотношением (9), к виду, удобному для их численной реализации (программирования). Получим:

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1} f_i \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} dx =$$

$$= \frac{1}{2l}\left(\sum_{i=0}^{N-2}\left(f_i + f_{i+1}\right)\Delta x_i + 2 f_{N-1}\Delta x_{N-1}\right),$$

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1} f_i \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \cos\frac{k\pi}{l} x dx = \frac{1}{k\pi}\sum_{i=0}^{N-2}\left(-\Delta f_i \sin\frac{k\pi}{l} x_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

$$\tilde{b}_k = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1} f_i \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sin\frac{k\pi}{l} x dx =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left(\sum_{i=0}^{N-2}\Delta f_i \cos\frac{k\pi}{l} x_{i+\frac{1}{2}} + (-1)^{k+1}\left(f_{N-1} - f_0\right)\right),$$

$$S_n(x,f) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{a}_k \cos\frac{k\pi x}{l} + \tilde{b}_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right) =$$

$$= \frac{1}{4l}\left(\sum_{i=0}^{N-2}\left(f_i + f_{i+1}\right)\Delta x_i + 2 f_{N-1}\Delta x_{N-1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left\{\left(f_{N-1} - f_0\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(-1)^{k+1}\sin\frac{k\pi}{l}x + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{N-2}\Delta f_i \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{l}\left(x - x_{i+\frac{1}{2}}\right)\right\},$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \ \Delta f_i = f_{i+1} - f_i.$$

Чтобы вычислить $S_n(x,f)$ по данной формуле, необходимо выполнить $7(N-1)+n$ операций сложения двух чисел, $(2n+3)N$ операций умножения, $n+3$ операций деления, $N+1$ операций двоичного сдвига числа и nN раз вычислить функцию $\sin x$. Отсюда получаем оценку (28).

В случае равномерной сетки функция $S_n(x,f)$ приводится к виду

$$S_n(x,f) = \frac{1}{2N}\left(\sum_{i=0}^{N-1} f_i + \frac{f_0 + f_N}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{N-2} f_i \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{N}\cos\frac{k\pi}{l}\left(x - x_i\right).$$

Чтобы вычислить $S_n(x,f)$ по данной формуле, необходимо выполнить $3(N-1)+n$ операций сложения двух чисел, $2((n+1)N-1)$ операций умножения, $n+4$ операций деления, 2 операции двоичного сдвига числа и nN раз вычислить функции $\sin x$, $\cos x$. Отсюда получаем оценку (29).

Теорема 2. Оценка вычислительной сложности алгоритма $S_n(x,f)$ (9) с использованием квадратурной формулы (19) – (20) имеет вид

$$T_3(n,N) \le ((n+4)(2N-1)-3)\tau_1 + \\ +(5nN + 2(N-n+1))\tau_2 + (n+4)\tau_3 + \\ +(3N-2)\tau_4 + n(3N-2)\tau_5, \qquad (30)$$

где τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5 обозначают те же величины, что и в соотношении (28).

Доказательство. Для доказательства оценки (30) приведем квадратурные формулы (19) и функцию $S_n(x,f)$, определяемую соотношением (9), к виду, удобному для их численной реализации (программирования). Получим:

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_2^*(x)dx =$$

$$= \frac{1}{l}\left(\sum_{i=0}^{N-2}\left(\frac{f_i + f_{i+1}}{2}\Delta x_i - x_i \Delta f_i\right) + f_{N-1}\Delta x_{N-1}\right),$$

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_2^*(x)\cos\frac{k\pi}{l} x dx =$$

$$=\frac{1}{k\pi}\sum_{i=0}^{N-2}\left[\left(\frac{\operatorname{sign}(\Delta f_i)L}{2}\Delta x_i-\frac{\Delta f_i}{2}\right)\times\right.$$

$$\times\left(\sin\frac{k\pi}{l}\overline{\overline{x}}_i-\sin\frac{k\pi}{l}\overline{x}_i\right)+$$

$$\left.+\frac{\operatorname{sign}(\Delta f_i)Ll}{k\pi}\left(\cos\frac{k\pi}{l}\overline{\overline{x}}_i-\cos\frac{k\pi}{l}\overline{x}_i\right)\right],$$

$$\tilde{b}_k=\frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f_2^*(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx=$$

$$=\frac{1}{k\pi}\left\{\sum_{i=0}^{N-2}\left[\left(\frac{\Delta f_i}{2}-\frac{\operatorname{sign}(\Delta f_i)L}{2}\Delta x_i\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left(\cos\frac{k\pi}{l}\overline{\overline{x}}_i-\cos\frac{k\pi}{l}\overline{x}_i\right)-$$

$$\left.-\frac{\operatorname{sign}(\Delta f_i)Ll}{k\pi}\left(\sin\frac{k\pi}{l}\overline{\overline{x}}_i-\sin\frac{k\pi}{l}\overline{x}_i\right)\right]+$$

$$\left.+(-1)^{k+1}(f_{N-1}-f_0)\right\},$$

$$S_n(x,f)=\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{a}_k\cos\frac{k\pi x}{l}+\tilde{b}_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}\left(\sum_{i=0}^{N-2}\left(\frac{f_i+f_{i+1}}{2}\Delta x_i-x_i\Delta f_i\right)+f_{N-1}\Delta x_{N-1}\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left\{\sum_{i=0}^{N-2}\sin\left(\frac{k\pi}{l}\frac{|\Delta f_i|}{2L}\right)\times\right.$$

$$\times\left[\left(\Delta f_i-\operatorname{sign}(\Delta f_i)L\Delta x_i\right)\cos\frac{k\pi}{l}\left(x-x_{i+\frac{1}{2}}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\operatorname{sign}(\Delta f_i)Ll}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{l}\left(x-x_{i+\frac{1}{2}}\right)\right]+$$

$$\left.+(-1)^{k+1}(f_{N-1}-f_0)\sin\frac{k\pi}{l}x\right\}.$$

Чтобы вычислить $S_n(x,f)$ по данной формуле, необходимо выполнить $(n+4)(2N-1)-3$ операций сложения двух чисел, $5nN+2(N-n+1)$ операций умножения, $n+4$ операций деления, $3N-2$ операций двоичного сдвига числа и $n(3N-2)$ раз вычислить функции $\sin x$, $\cos x$. Отсюда получаем оценку (30).

Теорема 3. Оценка вычислительной сложности алгоритма $S_n(x,f)$ (9) с использованием квадратурной формулы (22) имеет вид

$$T_3(n,N)\le((n+1)(2N+10)-9)\tau_1+$$
$$+(n(4N+21)+4)\tau_2+(n+3)\tau_3+$$
$$+4(n+1)\tau_4+2n(N+1)\tau_5, \qquad (31)$$

где τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5 обозначают те же величины, что и в соотношении (28).

Доказательство. Для доказательства оценки (31) приведем квадратурные формулы (22), а затем и функцию $S_n(x,f)$, определяемую соотношением (9), к виду, удобному для их численной реализации (программирования). В дальнейшем будем рассматривать случай использования равномерной сетки: $\Delta x=2l/N$, $x_i=-l+i\Delta x$, $i=\overline{0,N-1}$. Получим:

$$\tilde{a}_0=\frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}S_3(x)dx=\frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\Delta x}{2}\left(f_i+f_{i+1}-\frac{\Delta x}{6}\Delta f_i'\right)=$$

$$=\frac{\Delta x}{l}\left(\left(\frac{f_0+f_N}{2}+\frac{\Delta x}{12}(f_0'-f_N')+\sum_{i=1}^{N-1}f_i\right)\right),$$

$$\tilde{a}_k=\frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}S_3(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx=$$

$$=\frac{1}{k\pi}\left\{(-1)^k\frac{6l^2}{(k\pi\Delta x)^2}\left[-\sin\frac{k\pi}{l}\Delta x+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{2l}{k\pi\Delta x}\left(1-\cos\frac{k\pi}{l}\Delta x\right)\right]\cdot f_0+$$

$$+\frac{12l^2}{(k\pi\Delta x)^2}\left[-\sin\frac{k\pi}{l}\Delta x+\frac{2l}{k\pi\Delta x}\left(1-\cos\frac{k\pi}{l}\Delta x\right)\right]\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{N-1}f_i\cos\frac{k\pi}{l}x_i+(-1)^k\frac{6l^2}{(k\pi\Delta x)^2}\times$$

$$\times\left[-\sin\frac{k\pi}{l}\Delta x+\frac{2l}{k\pi\Delta x}\left(1-\cos\frac{k\pi}{l}\Delta x\right)\right]\cdot f_N+$$

$$+\frac{l}{k\pi}\left\{(-1)^k\left[-1-\frac{2l}{k\pi\Delta x}\sin\frac{k\pi}{l}\Delta x+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{6l^2}{(k\pi\Delta x)^2}\left(1-\cos\frac{k\pi}{l}\Delta x\right)\right]f_0'+$$

$$+\frac{4l}{k\pi\Delta x}\left(-2-\cos\frac{k\pi}{l}\Delta x+\frac{3l}{k\pi\Delta x}\sin\frac{k\pi}{l}\Delta x\right)\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{N-1} f_i'\sin\frac{k\pi}{l}x_i + (-1)^k\left[1+\frac{2l}{k\pi\Delta x}\sin\frac{k\pi}{l}\Delta x - \right.$$
$$\left.\left. -\frac{6l^2}{(k\pi\Delta x)^2}\left(1-\cos\frac{k\pi}{l}\Delta x\right)\right]\cdot f_N'\right\}\Bigg\}.$$

Введем обозначения:

$$\alpha_k = \frac{6l^2}{(k\pi\Delta x)^2}\left[-\sin\frac{k\pi}{l}\Delta x + \frac{2l}{k\pi\Delta x}\left(1-\cos\frac{k\pi}{l}\Delta x\right)\right],$$

$$\beta_k = 1+\frac{2l}{k\pi\Delta x}\sin\frac{k\pi}{l}\Delta x - \frac{6l^2}{(k\pi\Delta x)^2}\left(1-\cos\frac{k\pi}{l}\Delta x\right),$$

$$\gamma_k = \frac{2l}{k\pi\Delta x}\left(-2-\cos\frac{k\pi}{l}\Delta x + \frac{3l}{k\pi\Delta x}\sin\frac{k\pi}{l}\Delta x\right).$$

Тогда

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{k\pi}\left\{(-1)^k\alpha_k(f_0+f_N) + 2\alpha_k\sum_{i=1}^{N-1} f_i\cos\frac{k\pi}{l}x_i + \right.$$
$$\left. + \frac{l}{k\pi}\left[(-1)^k\beta_k(f_N'-f_0') + 2\gamma_k\sum_{i=1}^{N-1} f_i'\sin\frac{k\pi}{l}x_i\right]\right\}.$$

Аналогично находим

$$\tilde{b}_k = \frac{1}{k\pi}\left\{(-1)^k\delta_k(f_N-f_0) + 2\alpha_k\sum_{i=1}^{N-1} f_i\sin\frac{k\pi}{l}x_i - \right.$$
$$\left. -\frac{l}{k\pi}\left[(-1)^k\gamma_k(f_0'+f_N') + 2\gamma_k\sum_{i=1}^{N-1} f_i'\cos\frac{k\pi}{l}x_i\right]\right\},$$

где α_k, β_k, γ_k определены выше, а

$$\delta_k = -1-\frac{6l^2}{(k\pi\Delta x)^2}\left(1+\cos k\pi\Delta x - \frac{2l}{k\pi\Delta x}\sin\omega\Delta x\right).$$

$$S_n(x,f) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{a}_k\cos\frac{k\pi x}{l} + \tilde{b}_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right) =$$
$$= \frac{\Delta x}{2l}\left(\frac{f_0+f_N}{2} + \frac{\Delta x}{12}(f_0'-f_N') + \sum_{i=1}^{N-1} f_i\right) +$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\left\{(-1)^k\left(\alpha_k(f_0+f_N)\cos\frac{k\pi x}{l} + \right.\right.$$
$$\left. +\delta_k(f_N-f_0)\sin\frac{k\pi x}{l}\right) + 2\alpha_k\sum_{i=1}^{N-1} f_i\cos\frac{k\pi}{l}(x-x_i) +$$
$$+\frac{l}{k\pi}\left\{(-1)^k\left(\beta_k(f_N'-f_0')\cos\frac{k\pi x}{l} - \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. -\gamma_k(f_0'+f_N')\sin\frac{k\pi x}{l}\right) - 2\gamma_k\sum_{i=1}^{N-1} f_i'\sin\frac{k\pi}{l}(x-x_i)\right\}\right\}.$$

Чтобы вычислить $S_n(x,f)$ по данной формуле, необходимо выполнить $(n+1)(2N+10)-9$ операций сложения двух чисел, $n(4N+21)+4$ операций умножения, $n+3$ операций деления, $4(n+1)$ операций двоичного сдвига числа и $2n(N+1)$ раз вычислить функции $\sin x$, $\cos x$. Отсюда получаем оценку (31).

Теорема 4. Оценка вычислительной сложности алгоритма $S_n(x,f)$ (9) с использованием квадратурной формулы (25) – (26) имеет вид

$$T_4(n,N) \le ((4n+11)N-2(n+3))\tau_1 + $$
$$+((n+1)(11N-5)-1)\tau_2 + (n+2)\tau_3 +$$
$$+(5N-3)\tau_4 + 2n(2N-1)\tau_5, \qquad (32)$$

где τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5 обозначают те же величины, что и в соотношении (28).

Доказательство. Для доказательства оценки (32) приведем квадратурные формулы (25) – (26), а затем и функцию $S_n(x,f)$, определяемую соотношением (9), к виду, удобному для их численной реализации (программирования). Получим:

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_5^*(x)dx = \frac{1}{l}\left\{\Delta x_{N-1}\left(f_{N-1} + \frac{f_{N-1}'\Delta x_{N-1}}{2}\right) + \right.$$
$$\left. +\sum_{i=0}^{N-2}\left[\frac{f_i+f_{i+1}}{2}\Delta x_i - \frac{\Delta f_i'}{2}\left(\left(\frac{\Delta x_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f_i'}{2}\right)^2\right)\right]\right\},$$

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_5^*(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx =$$
$$= \frac{1}{k\pi}\left\{\sum_{i=0}^{N-2}\left[\left(-\frac{\Delta f_i}{2} + \frac{f_i'}{2}\Delta x_i\right)\left(\sin\frac{k\pi}{l}\bar{\bar{x}}_i + \sin\frac{k\pi}{l}\bar{x}_i\right) + \right.\right.$$
$$+\operatorname{sign}(\Delta f_i')\times$$
$$\times L\left(-\left(\frac{\Delta f'}{2L}\right)^2 - \frac{x_i x_{i+1}}{2}\right)\left(\sin\frac{k\pi}{l}\bar{\bar{x}}_i - \sin\frac{k\pi}{l}\bar{x}_i\right) +$$
$$+\frac{l}{k\pi}\left\{(-1)^k(f_{N-1}'-f_0') + \sum_{i=0}^{N-2}\left[-\frac{\Delta f_i'}{2}\times\right.\right.$$
$$\times\left(\cos\frac{k\pi}{l}\bar{\bar{x}}_i + \cos\frac{k\pi}{l}\bar{x}_i\right) -$$
$$\left.\left.\left. -\operatorname{sign}(\Delta f_i')\frac{L\Delta x_i}{2}\left(\cos\frac{k\pi}{l}\bar{\bar{x}}_i - \cos\frac{k\pi}{l}\bar{x}_i\right)\right]\right\}\right\},$$

$$\tilde{b}_k = \frac{1}{l}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_5^*(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\Bigg\{(-1)^{k+1}\left(f_{N-1} - f_0 + f'_{N-1}\Delta x_{N-1}\right) +$$

$$+\sum_{i=0}^{N-2}\left[\left(\frac{\Delta f_i}{2} - \frac{f'_i}{2}\Delta x_i\right)\left(\cos\frac{k\pi}{l}\bar{\bar{x}}_i + \cos\frac{k\pi}{l}\bar{x}_i\right) +\right.$$

$$+\operatorname{sign}\left(\Delta f'_i\right)L\left(\left(\frac{\Delta f'}{2L}\right)^2 + \frac{x_i x_{i+1}}{2}\right)\times$$

$$\left.\times\left(\cos\frac{k\pi}{l}\bar{\bar{x}}_i - \cos\frac{k\pi}{l}\bar{x}_i\right)\right] +$$

$$+\frac{l}{k\pi}\sum_{i=0}^{N-2}\left[-\frac{\Delta f'_i}{2}\left(\sin\frac{k\pi}{l}\bar{\bar{x}}_i + \sin\frac{k\pi}{l}\bar{x}_i\right) -\right.$$

$$\left.\left. -\operatorname{sign}\left(\Delta f'_i\right)\frac{L\Delta x_i}{2}\left(\sin\frac{k\pi}{l}\bar{\bar{x}}_i - \sin\frac{k\pi}{l}\bar{x}_i\right)\right]\right\},$$

$$S_n\left(x,f\right) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{a}_k\cos\frac{k\pi x}{l} + \tilde{b}_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right) =$$

$$= \frac{\Delta x_{N-1}}{2l}\left[f_{N-1} + \frac{f'_{N-1}}{2}\Delta x_{N-1}\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\left[(-1)^{k+1}\left(f_{N-1} - f_0 + f'_{N-1}\Delta x_{N-1}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} -\right.$$

$$\left. -\frac{l}{k\pi}\left(f'_{N-1} - f'_0\right)\cos\frac{k\pi}{l}x\right] +$$

$$+\sum_{i=0}^{N-2}\left\{\frac{1}{2l}\left[\frac{f_i + f_{i+1}}{2}\Delta x_i - \frac{\Delta f'_i}{2}\left(\left(\frac{\Delta x_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f'_i}{2}\right)^2\right)\right] +\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\left\{\left[\left(\Delta f_i - f'_i\Delta x_i\right)\cos\left(\frac{k\pi}{l}\frac{\left|\Delta f'_i\right|}{2L}\right) -\right.\right.$$

$$\left. -\operatorname{sign}\left(\Delta f'_i\right)\frac{Ll\Delta x_i}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{l}\frac{\left|\Delta f'_i\right|}{2L}\right)\right]\sin\frac{k\pi}{l}\left(x - x_{i+1/2}\right) -$$

$$-\left[\operatorname{sign}\left(\Delta f'_i\right)2L\left(\left(\frac{\Delta f'}{2L}\right)^2 + \frac{x_i x_{i+1}}{2}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}\frac{\left|\Delta f'_i\right|}{2L}\right) +\right.$$

$$\left.\left.\left. +\frac{l\Delta f'_i}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{l}\frac{\left|\Delta f'_i\right|}{2L}\right)\right]\cos\frac{k\pi}{l}\left(x - x_{i+1/2}\right)\right\}\right\},$$

$$x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

Чтобы вычислить $S_n(x, f)$ по данной формуле, необходимо выполнить $(4n+11)N - 2(n+3)$ операций сложения двух чисел, $(n+1)\times$ $\times(11N-5)-1$ операций умножения, $n+2$ операций деления, $5N-3$ операций двоичного сдвига числа и $2n(2N-1)$ раз вычислить функции $\sin x$, $\cos x$. Отсюда получаем оценку (32).

Вычисление оптимальных параметров предлагаемых алгоритмов построения ε-решений задач аппроксимации функций рядами Фурье

Рассмотрим задачи (11) – (13) относительно вычисления оптимальных значений параметров $X=\{N, n\}$ предложенных алгоритмов аппроксимации функций $f(x)$ частичными рядами Фурье вида (9), а также некоторые подходы к их решению.

Анализ соотношения (10) показывает, что погрешность аппроксимации функции $f(x)$ рядами Фурье на классах F состоит из двух частей: погрешности $E_1 = \left|R_n(f)\right|$, возникающей вследствие использования конечного числа n членов ряда Фурье, и погрешности

$$E_2 = \frac{V_{a_0}}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(V_{a_k}\cos\frac{k\pi x}{l} + V_{b_k}\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

вследствие приближенного вычисления его коэффициентов. Как показывает анализ приведенных оценок погрешности аппроксимации, соотношения (10) в общем виде можно записать следующим образом: $E(F,N,n) = E_1(F,N,n) +$ $+E_2(F,N,n)$, где

$$E_1(F,N,n) = O(n^{-p}),\ E_2(F,N,n) = O(n\cdot N^{-r}), \quad (33)$$

константы p, r зависят от гладкости классов функций F.

Пусть N_0, n_0 – оптимальные значения N, n, на которых обеспечивается решение задач (11) – (13), а именно: $\varepsilon^0 = \varepsilon(F, N_0, n_0)$. При этом задачи (11) – (13) принимают вид

$$E\left(F,N_0,n_0\right) = O\left(n_0^{-p}\right) + O\left(n_0\cdot N_0^{-r}\right) \le$$
$$\le \varepsilon^0 = \varepsilon^0\left(F,N_0,n_0\right), \quad (34)$$

$$\varepsilon^0 = \varepsilon^0\left(F,N,n\right) = \min_{N,n}\left(E\left(F,N,n\right)\right) =$$

$$=E\left(F,N_0,n_0\right)=O(n_0^{-p})+O(n_0\cdot N_0^{-r}), \quad (35)$$

$$\varepsilon^0=\varepsilon^0\left(F,\bar{N},n\right)=\min_n\left(E\left(F,\bar{N},n\right)\right)=$$

$$=E\left(F,\bar{N},n_0\right)=O(n_0^{-p})+O(n_0\cdot\bar{N}_0^{-r}), \quad (36)$$

при заданных ограничениях на время решения задач аппроксимации: $T=T(F,N,n)\le T_0$.

При $N\ne N_0$, $n\ne n_0$ влияние возможных распределений составляющих E_1 и E_2 погрешности метода E на выполнение условий (11) – (13) может быть неудачным и существенно осложнить их выполнение. В случае когда доминирует погрешность E_2, она может быть уменьшена путем: использования оптимальных наборов значений функции $f(x)$ в N точках отрезка $\left[-l,\, l\right]$, увеличения N, уменьшения n, перехода к другому классу F входных данных или «сужения» класса F до интерполяционного класса F_N (с целью повышения порядка точности) [1] и использования соответствующих ему квадратурных формул. Уменьшение величины E_1 может быть достигнуто повышением гладкости класса F.

Чтобы найти значение параметров $X=(N,n)$ алгоритма, при которых обеспечивается аппроксимация функций классов F рядами Фурье с заданными значениями характеристик качества по точности и быстродействию, необходимо решить одну из задач оптимизации (11) – (13) или (34) – (36). В общем виде оптимизационные задачи (12) – (13) могут быть сформулированы следующим образом. Найти

$$\min_X \varphi_0(X) \text{ при } \varphi_1(X)\le T_0, \quad (37)$$

и значения $X=X^0=(N_0,n_0)$, на которых он достигается. Здесь целевая функция $\varphi_0(X)=E(X)=$ $=E(F,N,n)$ – оценка погрешности аппроксимации, $\varphi_1(X)=T(X)=T(F,N,n)$ – оценка времени решения задачи аппроксимации. Оптимизационная задача (13) в общем виде есть частный случай (37).

Для определения наилучших (оптимальных) значений параметров $X^0=(N_0,n_0)$, предложенных алгоритмов аппроксимации функций $f(x)$, обеспечивающих решение задачи (37), необходимо решить задачу нахождения глобального минимума функции $\varphi_0(X)=E(X)=E(F,N,n)$ с такими ограничениями на переменные $X=$ $=(N,n)$: $n_{\min}\le n\le n_{\max}$, $N_{\min}\le N\le\ \le N_{\max}$ и $\varphi_1(X)=T(X)=T(F,N,n)\le T_0$.

Отметим, что сформулированная задача полностью укладывается в общую постановку задачи построения T-эффективных алгоритмов вычисления ε-решений задач вычислительной и прикладной математики [5, 6].

Для решения поставленной задачи (37) можно использовать алгоритм полного перебора по узлам сетки [4]. Для этого задаются шаги N_h и n_h изменения N и n соответственно и строится сетка узлов, а именно:

$$N=N_{\min}+l\cdot N_h,\ l=0,1,...,\hat{l},\ \hat{l}\cdot N_h=N_{\max}:$$

$$n=n_{\min}+k\cdot n_h,\ l=0,1,...,\hat{l},\ \hat{l}\cdot n_h=n_{\max}.$$

При этом n_{min}, $n_{\max}$ и N_{min}, $N_{\max}$ должны быть заданы такими, чтобы $E(F,N_{\min},n_{\min})>\varepsilon$ и $E(F,N_{\max},n_{\max})\le\varepsilon$, а $T(F,N_{\min},n_{\min})<T_0$ и $T(F,N_{\max},n_{\max})>T_0$.

Этот же алгоритм полного перебора, (описан ниже), можно использовать для решения оптимизационной задачи (11), задавая среди входных данных в качестве признака этой задачи значения $\bar{\varphi}_0=\varepsilon$.

В случае оптимизационной задачи (13), т.е., когда информация о функции $f(x)\in F$ задана фиксированным значением количества узлов $\bar{N}$, нужно найти лишь оптимальное количество членов ряда Фурье n, при котором можно достичь минимальной погрешности $\varepsilon>0$ за время, не превышающее заданного времени T_0. В этом случае $\varphi_0(X)=E(X)=E(F,\bar{N},n)$ – погрешность аппроксимации и $\varphi_1(X)=T(X)=$ $=T(F,\bar{N},n)$ – оценка времени решения задачи аппроксимации, представляющая собой функции одной переменной n, и решение этой задачи может быть осуществлено алгоритмом полного перебора, с использованием в качестве входной данной $\bar{\varphi}_0=0$.

Алгоритм полного перебора в общем случае имеет следующие шаги.

Ш а г 1. Задать входные данные: $\varphi_0(N, n)$, $\varphi_1(N, n)$, $N_{\min}$, $N_{\max}$, $n_{\min}$, $n_{\max}$, N_h, n_h, $\varepsilon > 0$, T_0, и $\overline{\varphi}_0 = 0$ – при решении оптимизационной задачи (13) или $\overline{\varphi}_0 = \varepsilon$ – при решении оптимизационной задачи (11).

Ш а г 2. Положим: $\varphi_{0\min} = 1000, N^0 = 0, n^0 = 0$, $k = 0$, $l = 0$, $j = 1$.

Ш а г 3. Если $\overline{\varphi}_0 = 0$ (в данном случае $N_{\min} = N_{\max}$, и алгоритмом решается оптимизационная задача (13)), то задать $\overline{N} = N_{\max}$ и $N = \overline{N}$, $N^0 = \overline{N}$ и перейти на шаг 5, иначе (решается оптимизационная задача (11) или (13)) – на шаг 4.

Ш а г 4. Вычислить: $N = N_{\min} + l \cdot N_h$.

Ш а г 5. Вычислить: $n = n_{\min} + n_h \cdot k$ и $\varphi_0(N, n)$, $\varphi_1(N, n)$.

Ш а г 6. Если $\varphi_1(N, n) \le T_0$, то перейти на шаг 7, иначе – на шаг 10.

Ш а г 7. Если $\varphi_0(N, n) \le \varphi_{0\min}$, то задать $\varphi_{0\min} = \varphi_0(N, n)$, $N^0 = N$, $n^0 = n$ и перейти на шаг 8, иначе – на шаг 10.

Ш а г 8. Если $\overline{\varphi}_0 = \varepsilon$ (в данном случае алгоритмом решается оптимизационная задача (11)), то перейти на шаг 9, в другом случае – на шаг 10.

Ш а г 9. Если $\varphi_{0\min} \le \varepsilon$, то задаем $\varepsilon_j^0 = \varphi_{0\min}$, $N_j^0 = N^0$, $n_j^0 = n^0$, $j = j + 1$.

Ш а г 10. Если $n < n_{\max}$, то задать $k = k + 1$ и перейти на шаг 5, в другом случае ($n = n_{\max}$) перейти на шаг 11.

Ш а г 11. Если $\overline{\varphi}_0 = 0$ (в данном случае алгоритмом решается оптимизационная задача (13)), то перейти на шаг 13, иначе (решается оптимизационная задача (12)) – на шаг 12.

Ш а г 12. Если $N < N_{\max}$, то задать $l = l + 1$, $k = 0$ и перейти на шаг 4, в другом случае ($N = N_{\max}$) перейти на шаг 13.

Ш а г 13. Если $N^0 = 0$, $n^0 = 0$, то задача не имеет решения при заданном ограничении на компьютерное время T_0 решения задачи.

Ш а г 14. Конец алгоритма.

В результате работы алгоритма (при соответствующих входных данных) будет заполнена таблица значений: решения задачи (11), а также (12) или (13):

n^0	N^0	$\varepsilon^0 = E(n^0, N^0)$	$T^0 = T(n^0, N^0) \le T^0$

Запишем соотношения (33) в виде $E_1(n) = \dfrac{C_1}{n^p}$, $E_2(n) = C \cdot \overline{N}^{-r} \cdot n$.

Обозначим $C \cdot \overline{N}^{-r} = C_2$. Тогда условие (34) будет иметь вид:

$$\frac{C_1}{n^p} + C_2 \cdot n \le \varepsilon. \tag{38}$$

Запишем (38) в виде

$$S(n) = C_2 \cdot n^{p+1} - \varepsilon \cdot n^p + C_1 \le 0. \tag{39}$$

Итак, нахождение наименьшего натурального числа n^0, которое удовлетворяло бы неравенство (39) и обеспечивало решение задачи (11), можно осуществить методом перебора, вычисляя $S(n)$ при $n = 1, 2, \ldots, n^0$.

Пример 1. Пусть $F \equiv C_{L,\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$. В этом случае $p = \alpha$ и соотношение (38) имеет вид: $\dfrac{C_1}{n^\alpha} + C_2 \cdot n + C_3 \le \varepsilon$ или $\dfrac{C_1}{n^\alpha} + C_2 \cdot n \le \varepsilon - C_3 = \varepsilon_1$, а соотношение (39) будет иметь вид:

$$S_\alpha(n) = C_2 \cdot n^{1+\alpha} - \varepsilon_1 \cdot n^\alpha + C_1 \le 0. \tag{40}$$

Для нахождения наименьшего натурального числа n^0, удовлетворяющего неравенство (40) и тем самым обеспечивающее ε-решение задачи аппроксимации функций рядом Фурье (11), нужно вычислить $S_\alpha(n)$ при $n = 1, 2, \ldots, n^0$.

Пример 2. Пусть $F \equiv W_{r,L}$, $r > 1$. В этом случае $p = r - 1$, соотношение (38) будет иметь вид: $\dfrac{C_1}{n^{r-1}} + C_2 \cdot n \le \varepsilon$, а соотношение (39) –

$$S_r(n) = C_2 \cdot n^r - \varepsilon \cdot n^{r-1} + C_1 \le 0. \tag{41}$$

Чтобы найти наименьшее натуральное число n^0, удовлетворяющее неравенство (41) и тем самым обеспечивающее ε-решение задачи аппроксимации функций рядом Фурье (11), нужно вычислить $S_r(n)$ при $n = 1, 2, \ldots, n^0$.

Рассмотрим случай $r = 2$, т.е. $F \equiv W_{2,L}$, тогда соотношение (41) будет иметь вид:

$$S_2(n) = C_2 \cdot n^2 - \varepsilon \cdot n + C_1 \le 0 .$$

Рассмотрим квадратное уравнение $S_2(\alpha) = C_2 \cdot \alpha^2 - \varepsilon \cdot \alpha + C_1 = 0$.

Для существования корней $\alpha_{1,2} = \dfrac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4C_1C_2}}{2C_2}$ необходимо выполнение условия: $\varepsilon \ge 2\sqrt{C_1C_2}$. Тогда натуральные числа непустого множества $D = \{\alpha_1, \alpha_2\} \bigcap N \ne \varnothing$ обеспечат решение задачи (34).

Очевидно, что решением задачи (36) будет значение $\varepsilon^0 = \min \varepsilon = 2\sqrt{C_1C_2}$, которое достигается при $n^0 = \left[2\sqrt{\dfrac{C_1}{C_2}} \right] + 1$.

***Замечание* 3.** Большое значение имеет качество оценок V_{a_k} и V_{b_k}, поскольку их «завышенность» может привести к увеличению объема вычислительных затрат, необходимых для решения задачи (9), или даже к невозможности ее решения. Часто это качество зависит от констант, которые описывают класс F (например, L) и входят в оценки погрешности метода. Если они завышены, то полезно применять алгоритмы выявления и уточнения априорной информации [1, 7].

Заключение. Приведен комплексный анализ качества рассматриваемых алгоритмов аппроксимации функций рядами Фурье с использованием для вычисления коэффициентов Фурье оптимальных по точности (или близких к ним) квадратурных формул вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций. Полученные оценки их основных характеристик – точность и вычислительная сложность. Предложена технология нахождения оптимальных параметров предлагаемых алгоритмов построения ε-решений задач аппроксимации функций рядами Фурье и приведены их значения для некоторых классов функций. Результаты статьи – новые в теории аппроксимации функций и могут получить свое развитие как в плане рассмотрения других классов функций в рамках предлагаемого подхода к аппроксимации функций рядами Фурье, так и при решении задачи аппроксимации функций другими методами.

1. *Задирака В.К., Мельникова С.С.* Цифровая обработка сигналов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 294 с.
2. *Оптимальні* алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування / І.В. Сергієнко, В.К. Задірака, О.М. Литвин та ін. – К.: Наук. думка, 2011. – Т. 1. Алгоритми. – 447 с.; Т. 2. Застосування. – 346 с.
3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2001. – Т. 3. – 662 с.
4. *Stepanets A.I.* Methods of Approximation Theory. – VSP: Leiden, Boston, 2005. – 919 p.
5. *Т-ефективні* алгоритми наближеного розв'язання задач обчислювальної та прикладної математики / В.К. Задірака, М.Д. Бабич, А.І. Березовський А.І. та ін. – Тернопіль, Збруч, 2003. – 261 с.
6. *Об использовании* резервов оптимизации вычислений в компьютерных технологиях решения задач прикладной и вычислительной математики с требуемыми значениями характеристик качества / М.Д. Бабич, В.К. Задирака, В.А. Людвиченко и др. // ЖВМ и МФ, 2010. – Т. 50. – № 12. – С. 2285–2295.
7. *Программа* определения наилучших значений формальных параметров программных модулей / В.В. Иванов, М.Д. Бабич, Г.В. Куцевол и др. – Киев, 1979. – 15 с.
8. *Эффективные* по точности алгоритмы аппроксимации функций некоторых классов рядами Фурье / В.К. Задирака, Е.Н. Коломыс, Л.В. Луц и др. // Проблемы управления и информатики. – 2013. – № 4. – С. 93–106.
9. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
10. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.

Поступила 27.12.2012

Тел. для справок: +38 044 526-0288, 526-4568, 245-7998 (Киев)
E-mail: *kolomys@ukr.net*, *zvk*140*@ukr.net*, *ljudvo*2*@ukr.net*, *s_melnikova@ukr.net*