УДК 519.1

Агаи Аг Гамиш Якуб, Г.А. Донец

О решении классической задачи Штейнера для четырех точек

Рассмотрено решение классической задачи Штейнера для четырех точек, произвольно расположенных на плоскости. Для невырожденного случая найдены две оси Симпсона и сравниваются их длины. Для вырожденного случая рассмотрено произвольное положение четвертой точки внутри треугольника.

The solving of the Shteiner's classical problem for four points randomly lied in the plane is considered. For the degenerated case two Simpson's axes are found, their lengths are compared. For the non-degenerate case the random position of the fourth point inside of the triangle is examined.

Розглянуто розв'язання класичної задачі Штейнера для чотирьох точок, розташованих на площині довільно. Для невиродженого випадку знайдено дві осі Сімпсона і порівнюються їх довжини. Для виродженого випадку розглянуто довільне розташування четвертої точки всередині трикутника.

Введение. Данная статья служит продолжением [1], поэтому все определения взяты из нее. Рассмотрим решение задачи для четырех точек. В зависимости от их положения возможны два случая:

а) все точки составляют выпуклый четырехугольник;

б) одна точка находится внутри треугольника.

Эта, кажущаяся элементарной, задача для четырех точек рассмотрена в [2] и впервые была описана лишь в работе [3], затем в [4]. В них второй случай не рассматривался.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу для обоих случаев в представленном порядке.

Пусть $P_1P_2P_3P_4$ – произвольный выпуклый четырехугольник (рис. 1)

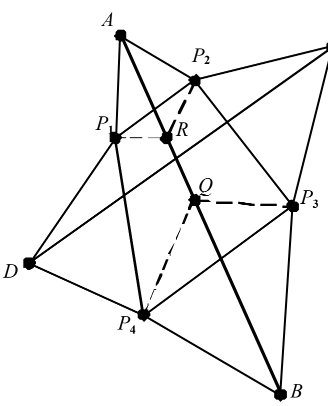

Рис. 1

Эту задачу можно свести к задаче для трех точек, если воспользоваться результатами [1] и построить дополнительную вершину, которая будет эквивалентна двум произвольным смежным вершинам четырехугольника. Построим вершину А как вершину равностороннего треугольника P_1P_2A. Теперь задача свелась к построению задачи Штейнера для точек A, P_3 и P_4. По аналогии строим вершину B (эквивалентную вершинам P_3 и P_4) и проводим отрезок AB. Этот отрезок есть не что иное, как ось Симпсона для четырех точек. Если провести окружности вокруг ΔP_1P_2A и ΔP_3P_4B, то они пересекут ось Симпсона в точках R и Q. Эти точки и дают оптимальное решение для задачи Штейнера, если объединить вершины P_1 с P_2 и P_3 с P_4. Дерево Штейнера будет состоять из пяти отрезков P_1R, P_2R, RQ, P_3Q и P_4Q. Можно построить дерево Штейнера, объединив вершины P_2 с P_3 и P_1 с P_4. В результате получим вторую ось Симпсона. Оптимальное дерево будет соответствовать более короткой из двух осей Симпсона.

Для любого конечного числа точек решение задачи Штейнера сводится к построению всех осей Симпсона и сравнению их длин. Однако не для любых положений точек можно построить оси Симпсона. Поэтому для полного решения задачи необходимо находить следующие дополнительные условия:

1) существование данной конструкции (выпуклость);

2) невырожденность (возможность построения оси Симпсона);

3) оптимальность указанного варианта.

Запишем для данного четырехугольника координаты вершин A и B, используя (11) из [1]. При этом вместо индексов вершин P_i будем писать индекс i.

$$x_A=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(y_1-y_2);\quad y_A=\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2-x_1);$$
$$x_B=\frac{x_3+x_4}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(y_3-y_4);\quad y_B=\frac{y_3+y_4}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x_4-x_3). \tag{1}$$

Пусть $S_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$ – циклическая подстановка четвертого порядка. Очевидно, что формула координат точки B получается из формулы координат точки A, если на индексы в формулах для точки A дважды подействовать подстановкой S_1 или $x_B=S_1^2(x_A)$, $y_B=S_1^2(y_A)$. Рассмотрим теперь, как выразятся для этого случая три упомянутых условия.

1) Условием выпуклости заданного четырехугольника есть положительное значение площадей четырех треугольников, полученных комбинациями трех вершин при движении против часовой стрелки. Обозначим $\|i,j,k\|$ – площадь $\Delta P_iP_jP_k$, где $i,j,k\in\{1,2,3,4\}$ движением против часовой стрелки. Тогда условие выпуклости

$$\|i,j,k\| = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_i & x_j & x_k\\ y_i & y_j & y_k\end{vmatrix}\geq 0. \tag{2}$$

Пусть $\langle i,j\rangle = \begin{vmatrix}x_i & x_j\\ y_i & y_j\end{vmatrix}$. Тогда (2) можно расписать подробнее:

$$\langle i,j\rangle + \langle j,k\rangle - \langle i,k\rangle \geq 0.$$

Из возможных троек вершин можно образовать четыре треугольника $P_1P_3P_2$, $P_2P_4P_3$, $P_3P_1P_4$ и $P_4P_2P_1$. Запишем последнее условие для каждого из них,

$$\begin{aligned}
&\langle 1,3\rangle - \langle 1,2\rangle - \langle 2,3\rangle \geq 0,\\
&\langle 2,4\rangle - \langle 2,3\rangle - \langle 3,4\rangle \geq 0,\\
&\langle 1,4\rangle - \langle 3,4\rangle - \langle 1,3\rangle \geq 0,\\
&\langle 1,4\rangle - \langle 1,2\rangle - \langle 2,4\rangle \geq 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь также можно получить все остальные условия из первого, если на цифры 1, 2 и 3 подействовать подстановкой S_1 и при этом учитывать, что $\langle i,j\rangle = -\langle j,i\rangle$.

2) Условия невырожденности, или условия существования двух осей Симпсона получаются, если воспользоваться теми же неравенствами, но с включением точек A и B. Если ось Симпсона (отрезок AB) пересекает отрезок P_1P_2, то обязательно $\|A,B,1\|\geq 0$ и $\|B,A,2\|\geq 0$. Действуя на эти неравенства подстановкой S_1 дважды, получим аналогичные условия $\|B,A,3\|\geq 0$ и $\|A,B,4\|\geq 0$, которые гарантируют пересечение отрезком AB отрезка P_3P_4. Подставляя выражение для координат вершин (1), получим четыре условия, в которых $d(i,j)$ обозначает расстояние между точками P_i и P_j. При этом действии подстановкой $d(i,j)=d(j,i)$ получим:

$$\begin{aligned}
&\langle 2,3\rangle + 2\cdot\langle 1,4\rangle - 2\cdot\langle 2,4\rangle - \langle 1,3\rangle - \langle 1,2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\mathrm{d}^2(1,2)+\mathrm{d}^2(1,3)-\mathrm{d}^2(2,3)\right]\geq 0,\\
&\langle 2,4\rangle + 2\cdot\langle 1,3\rangle - 2\cdot\langle 2,3\rangle - \langle 1,4\rangle - \langle 1,2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\mathrm{d}^2(1,2)+\mathrm{d}^2(2,4)-\mathrm{d}^2(1,4)\right]\geq 0,\\
&\langle 1,3\rangle + 2\cdot\langle 2,4\rangle - 2\cdot\langle 2,3\rangle - \langle 1,4\rangle - \langle 3,4\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\mathrm{d}^2(1,3)+\mathrm{d}^2(3,4)-\mathrm{d}^2(1,4)\right]\geq 0,\\
&\langle 2,3\rangle + 2\cdot\langle 1,4\rangle - 2\cdot\langle 1,3\rangle - \langle 2,4\rangle - \langle 3,4\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\mathrm{d}^2(2,4)+\mathrm{d}^2(3,4)-\mathrm{d}^2(2,3)\right]\geq 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Эти условия, однако, не гарантируют выпуклость четырехугольника, как показано на рис. 2.

Здесь ось Симпсона AB пересекает отрезок P_1P_2 и P_3P_4, однако в вершине P_4 нарушается выпуклость четырехугольника. Путем симметричных построений можно добиться нарушения выпуклости и в остальных точках.

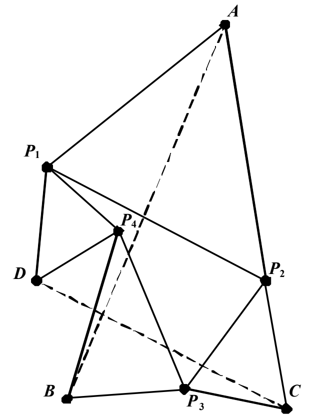

Рис. 2

Найдем теперь условия того, что ось Симпсона CD пересекает отрезки P_2P_3 и P_1P_4. Для этого на каждое неравенство (4) следует действовать подстановкой S_1. В результате получим

$$
\begin{aligned}
&P_2 : 2\cdot\langle 1,3\rangle + \langle 3,4\rangle - \langle 2,4\rangle - \langle 2,3\rangle - 2\cdot\langle 1,2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[d^2(2,3) + d^2(2,4) - d^2(3,4)\right] \ge 0,\\
&P_3 : 2\cdot\langle 2,4\rangle + \langle 1,2\rangle - \langle 1,3\rangle - \langle 2,3\rangle - 2\cdot\langle 3,4\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[d^2(2,3) + d^2(1,3) - d^2(1,2)\right] \ge 0,\\
&P_4 : \langle 1,2\rangle + \langle 1,4\rangle + \langle 2,4\rangle - 2\cdot\langle 1,3\rangle - 2\cdot\langle 3,4\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[d^2(2,4) + d^2(1,4) - d^2(1,2)\right] \ge 0,\\
&P_1 : \langle 1,3\rangle + \langle 1,4\rangle + \langle 3,4\rangle - 2\cdot\langle 1,2\rangle - 2\cdot\langle 2,4\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[d^2(1,3) + d^2(1,4) - d^2(3,4)\right] \ge 0.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Таким образом, для того, чтобы четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ был выпуклым и обе оси Симпсона пересекали соответствующие стороны четырехугольника, необходимо выполнение 12 условий (3) – (5). Вопрос о достаточности и полноте этих условий выходит за рамки этой статьи, хотя сам по себе вызывает определенный интерес. В зависимости от нумерации вершин могут возникать различные ситуации. На примере рис. 2 можно судить, что если хотя бы одно из условий (4) или (5) не выполняется, то четырехугольник может быть невыпуклым. Но даже выполнение всех восьми условий (4) – (5) не гарантирует выполнение условий (3). Если выпуклый четырехугольник пронумеровать против часовой стрелки, то все равносторонние треугольники на его сторонах будут построены внутрь и условия (4) – (5) все могут выполняться, но ни одно из условий (3) не будет выполнено. В этом случае, правда, нумерация в обратном порядке приведет все в норму. Есть предположение, что условий (4), (5) и одного (произвольного) условия (3) достаточно, чтобы выполнялись все остальные условия (3).

Рассмотрим теперь вопрос о существовании невырожденной оси Симпсона, т.е., когда отрезки AR и BQ не пересекаются.

Теорема 1. В выпуклом четырехугольнике ось Симпсона будет невырожденной, если соответствующий угол между диагоналями четырехугольника меньше или равен 120°.

Для доказательства воспользуемся параметрическим представлением отрезка AB.

$$
\begin{aligned}
x &= x_A + \lambda(x_B - x_A);\\
y &= y_A + \lambda(y_B - y_A);
\end{aligned}
\quad \mathbf{(0 \le \lambda \le 1).} \tag{6}
$$

Точка А соответствует значению λ=0, а точка B – значению $\lambda = 1$. Найдем координаты точки R – пересечения отрезка AB с окружностью, описанной вокруг ΔP_1AP_2. Из [1] известно, что для этой точки

$$\lambda_R = 2\left(\overrightarrow{O_1A} \cdot \overrightarrow{AB}\right) / \left|AB\right|^2, \tag{7}$$

где O_1 – центр описанной окружности, координаты которого записаны в (12) из [1]. Если их подставить в (7) и выполнить упрощения, то

$$\lambda_R = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{(x_2 - x_1)(y_B - y_A) + (y_1 - y_2)(x_B - x_A)}{\left|AB\right|^2}. \tag{8}$$

Если воспользоваться тем же уравнением (6) и найти пересечение отрезка AB с окружностью, описанной вокруг ΔP_3BP_4, то получим

$$\lambda_Q = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{(y_3 - y_4)(x_B - x_A) + (x_4 - x_3)(y_B - y_A)}{\left|AB\right|^2}. \tag{9}$$

Условием невырожденности оси Симпсона AB является

$$\lambda_Q \ge \lambda_R, \tag{10}$$

которое примет окончательный вид

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{(y_3 + y_2 - y_1 - y_4)(x_B - x_A) + (x_1 + x_4 - x_2 - x_3)(y_B - y_A)}{\left|AB\right|^2} \le 1.$$

Подставим сюда значение координат точек A и B (1). Обозначим $\overline{x_1} = x_3 - x_1$, $\overline{y_1} = y_3 - y_1$, $\overline{x_2} = x_4 - x_2$, $\overline{y_2} = y_4 - y_2$, а угол между диагоналями $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{(}P_1P_3,P_2P_4\mathbf{)}$. В результате упрощений и преобразований получим

$$\sqrt{3}\left(\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{y_1}\,\overline{y_2}\right) + \overline{x_2}\,\overline{y_1} - \overline{x_1}\,\overline{y_2} \ge 0.$$

Это выражение можно преобразовать к виду

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) + (y_3 - x_1)(y_4 - y_2)}{|P_1P_3|\cdot|P_2P_4|} +\\
&+ \frac{1}{2}\cdot\frac{(x_4 - x_2)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_4 - y_2)}{|P_1P_3|\cdot|P_2P_4|} \ge 0,
\end{aligned}
$$

что окончательно равно

$$\cos(\gamma - 30°) \ge 0. \tag{11}$$

Отсюда $\gamma \le 120°$, что и требовалось доказать. Из двух осей Симпсона AB и CD одна оптимальна.

Теорема 2. Если в четырехугольнике обе оси Симпсона невырождены, то минимальная ось проходит через стороны, соответствующие углу между диагоналями $\gamma \le 90°$.

Для доказательства воспользуемся теми же обозначениями.

$$4\cdot\left|AB\right|^2=\left[-\overline{x_1}-\overline{x_2}+\sqrt{3}\left(\overline{y_2}-\overline{y_1}\right)\right]^2+$$
$$+\left[-\overline{y_1}-\overline{y_2}+\sqrt{3}\left(\overline{x_1}-\overline{x_2}\right)\right]^2,$$
$$4\cdot\left|CD\right|^2=\left[\overline{x_1}-\overline{x_2}+\sqrt{3}\left(-\overline{y_1}-\overline{y_2}\right)\right]^2+$$
$$+\left[\overline{y_1}-\overline{y_2}+\sqrt{3}\left(\overline{x_1}+\overline{x_2}\right)\right]^2.$$

Раскрыв скобки и упрощая выражение, приходим к выводу, что $\left|AB\right|\le\left|CD\right|$, если

$$\overline{y_1 y_2}+\overline{x_1 x_2}\ge 0.$$

В первоначальных переменных это равносильно $(y_3-y_1)(y_4-y_2)+(x_3-x_1)(x_4-x_2)\ge 0$.

Если это выражение разделить на $\left|P_1P_3\right|\cdot\left|P_2P_4\right|$, то оно сворачивается как косинус угла между диагоналями четырехугольника $\gamma=\left(\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_2P_4}\right)$ или $\cos\gamma\ge 0$, откуда

$$\gamma\le 90^\circ. \tag{12}$$

Эта теорема доказана геометрическим путем. Здесь теорема 1 аналитически доказана впервые.

Пусть теперь внутри треугольника $P_1P_2P_3$ находится четвертая точка P_4 (рис. 3).

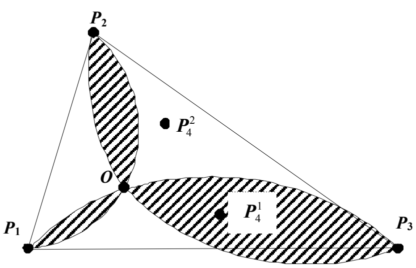

Рис. 3

Предположим вначале, что все углы треугольника $P_1P_2P_3$ не больше 120°. Тогда на каждой его стороне можно построить равносторонние треугольники и описать окружности. В результате каждая вершина треугольника будет соединена с точкой Штейнера лункой, образованной двумя дугами соседних окружностей (см. рис. 3). Если четвертая точка находится внутри какой-либо лунки (P_4^1), тогда углы $P_1P_4^1P_2$ и $P_2P_4^1P_2$ больше 120°. Поэтому оптимальное дерево Штейнера будет единственным и состоять из отрезка $P_2P_4^1$ и дерева для $\Delta P_1P_2P_4^1$, которое строится для трех точек уже известным способом. Если же четвертая точка находится вне лунок (P_4^2), то здесь только один угол $P_2P_4^2P_3\ge 120^\circ$, а два угла $P_1P_4^2P_2$ и $P_1P_4^2P_3$ меньше 120°. Поэтому в качестве решения возможны два дерева Штейнера. Первое – состоит из отрезка $P_3P_4^2$ и построения Штейнера для $\Delta P_1P_2P_4^2$, второе – из отрезка $P_2P_4^2$ и построения Штейнера для $\Delta P_1P_4^2P_3$. В общем случае можно записать эти условия в виде неравенств. Если заданы координаты всех четырех точек P_i $(i=1,2,3,4)$, то координаты точки P_4 можно выразить как линейную комбинацию координат вершин $\Delta P_1P_2P_3$.

$$x_4=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3,\quad y_4=\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\alpha_3y_3, \tag{13}$$

где $\alpha_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $\alpha_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $\alpha_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ и

$$\Delta=-\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix};\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_4&x_3&x_2\\y_4&y_3&y_2\end{vmatrix};$$
$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_3&x_4\\y_1&y_3&y_4\end{vmatrix};\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_4&x_2\\y_1&y_4&y_2\end{vmatrix}. \tag{14}$$

Если хотя бы один определитель Δ_i $(i=1,2,3)$ отрицателен, то точка P_4 лежит вне треугольника. Если все $\Delta_i\ge 0$, то она лежит внутри треугольника (при равенстве нулю она лежит на одной из его сторон). Если это установлено, то возможны два случая, когда выполняются две группы равенств. Для них $i\in\{1,2,3\}$, и сложение индексов ведется по $\bmod 3$.

$$\left|P_iP_{i+1}\right|^2\ge\left|P_iP_4\right|^2+\left|P_{i+1}P_4\right|^2+\left|P_iP_4\right|\cdot\left|P_{i+1}P_4\right|,$$
$$\left|P_{i+1}P_{i+2}\right|^2\le\left|P_{i+1}P_4\right|^2+\left|P_{i+2}P_4\right|^2+\left|P_{i+1}P_4\right|\cdot\left|P_{i+2}P_4\right|, \tag{15}$$
$$\left|P_{i+2}P_{i+3}\right|^2\le\left|P_{i+2}P_4\right|^2+\left|P_{i+3}P_4\right|^2+\left|P_{i+2}P_4\right|\cdot\left|P_{i+3}P_4\right|.$$

Окончание на стр. 43.