УДК 519.6

О.Н. Литвин, С.Ю. Матвеева

Интерстрипация функций двух переменных на системе пересекающихся полос

Для обработки результатов радиолокации поверхности предложена ее математическая модель в виде формул сплайн-интерстрипации, использующая для восстановления поверхности ее изображение на системе пересекающихся полос. Интерстрипация предоставляет возможность перехода от задания математической модели к модели с использованием системы *DEM*.

To handle the results of the radar surface the mathematical model of the surface in the form of formulas spline-interstripation, which is applied to restore the surface of its image on a system of intersecting bands, is proposed. Interstripation provides the ability to transit from the task of mathematical model of the surface to widely used mathematical model of the surface with the DEM usage.

Для обробки результатів радіолокації поверхні запропоновано її математичну модель у вигляді формул сплайн-інтерстріпації, яка використовує для відновлення поверхні її зображення на системі перетинних смуг. Інтерстріпація надає можливість переходу від задання математичної моделі поверхні з використанням інтерстріпації функцій до моделі з використанням системи *DEM*.

Введение. Наиболее употребимой для описания поверхности Земли сегодня есть система *DEM* (*Digital Elevation Model*). Эта система создана путем замены поверхности Земли или другого космического тела многогранной поверхностью, каждая грань которой – треугольник. Координаты вершин этих треугольников задаются исследователем. Таким образом, при дистанционном зондировании Земли в пределах каждого такого треугольника структура исследуемой части ее поверхности считается однородной. На практике диаметр таких треугольников может быть достаточно большим, поэтому данный подход для описания поверхности планеты в ряде случаев требует более точного описания поверхности на некоторых ее частях. Кроме того, включение в описание поверхности некоторых линий или известных частей поверхностей в систему *DEM*, вообще говоря – сложная задача, требующая высокой точности задания экспериментальных данных. Например, это касается включения в описание таких линий, как линии подводного течения Гольфстрим или поверхности какой-либо пустыни и прочего, так как их включение в описание поверхности как единого целого требует работы с каждым треугольником – гранью многогранной поверхности в системе *DEM* отдельно.

Ключевые слова: интерстрипация, интерполяция, интерлинация, интерфлетация функций, картография, восстановление поверхности.

Актуальность задач

Масштабные перспективы развития национальной картографо-геодезической отрасли, как известно, очерчены двумя Указами Президента Украины от 1 августа 2001 г. [8]. Осмысление современных тенденций и перспектив развития топографического и тематического картографирования, развитие потребностей государства и общества в картографической информации, всеобъемлющая информатизация общественной деятельности и соответствующее развитие информационных технологий нуждаются в пересмотре традиционных представлений и подходов к вопросам смыслового и качественного наполнения большинства направлений картографического обеспечения государственных потребностей [8].

При этом неизвестно, будут ли использоваться полученные бумажные топографические карты, поскольку с каждым годом спрос на их тиражирование сокращается [9], т.е. для дальнейшего развития науки о математическом моделировании поверхностей с помощью данных аэрофотосъемки и радиолокационного зондирования необходимо сориентировать процесс обновления не на традиционную, а на цифровую форму представления данных [9].

Одним из важнейших условий широкого использования результатов дистанционного зондирования (ДЗ) разных объектов окружающей среды есть наличие эффективных методов, алгоритмов и развитых пакетов программ обработки больших массивов данных [9, 10].

При обработке данных ДЗ в настоящее время используются в основном пакеты программ для персональных ЭВМ и рабочих станций, таких как *Erdas Imagine*, *EKMapper*, *IDRISI* и др. [12–14], ориентированны, как правило, на предварительную обработку изображений путем превращения их в форму, удобную для последующей визуализации. Для автоматизированного выделения объектов окружающей среды на аэрокосмических изображениях, интересующих исследователя, а также расчета параметров этих объектов необходимо использовать не только процедуры улучшения качества изображения, но и алгоритмы классификации и вычисления существенных характеристик среды с разными информативными признаками [11].

Таким образом, сегодня актуальна задача использования более точных систем описания всей поверхности планеты по информации, заданной на пересекающихся полосах. Для практики важно умение представлять неизвестную поверхность между пересекающимися полосами, когда известна информация, заданная на этих полосах. Эта задача может быть эффективно решена лишь на основе использования теории интерстрипации функций, которая включает в себя интерлинацию функций как частный случай [4–6]. Для такого случая в данной статье предложен метод восстановления поверхности между полосами. При этом можно использовать не только следы приближаемой функции, описывающей неизвестную поверхность, но также и ее производные до некоторого порядка по нормали к границам полос (если они существуют).

Формулировка задачи

Для обработки результатов радиолокации поверхности или аэрокосмических снимков предложена математическая модель поверхности на основе операторов интерполяции, интерлиниции, интерфлетации и интерстрипации [5, 6]. Интерлинацией (интерфлетацией) функций многих переменных называется восстановление (возможно, приближенное) этой функции с помощью ее следов и следов ее производных до заданного порядка на системе линий (поверхностей). Интерлинация (интерфлетация) функций – это естественное обобщение интерполяции, которая есть восстановлением функции (возможно, приближенным) по ее значениям и значеням ее производных до заданного порядка в заданной системе точек. Интерстрипация (*inter* – между, *strip* – полоса) функций – восстановление функции между полосами по информации об этой функции на системе полос.

Метод решения задачи

Опишем основные утверждения о приближении функций многих переменных с помощью операторов интерлиниции, интерфлетации и интерстрипации функций.

Пусть $n, M \in \mathrm{N}, m,\ N \in \overset{0}{\mathrm{N}}$ – заданные числа, $\Pi_k, k = \overline{1, M}$ – заданные m-мерные поверхности в $R^n\left(0 \le m < n\right)$; примем для удобства, что точка – тоже поверхность размерности $m = 0$, а линия – поверхность размерности $m = 1$. Кроме того, будем считать заданными функции $\varphi_{k,p}(x),\ \ k = \overline{1, M},\ \ p = \overline{0, N}$, которые есть следами операторов $L_{k,p} f(x)$ от функции $f(x)$, т.е. $\varphi_{k,p}\left(x\right)\big|_{\Pi_k} = L_{k,p} f\left(x\right)\big|_{\Pi_k},\ \ k = \overline{1, M},\ \ p = \overline{0, N}$. Операторы $L_{k,p} f\left(x\right)$ могут быть частными производными или нормальными производными $L_{k,p} f\left(x\right)\big|_{\Pi_k} = \partial^p f\left(x\right) / \partial \nu_k^p\big|_{\Pi_k},\ \ p = \overline{0, N}$ для $m = n - 1$.

Определение 1. Операторы $O\left(\{\varphi_{k,p}\}, x\right) :=$ $:= O\left(\{L_{k,p}\}, \{\Pi_k\}, \{\varphi_{k,p}\}, x\right)$ будем называть операторами интерфлетации, если $L_{\ell,q} O\left(\{\varphi_{k,p}\}, x\right)\big|_{\Pi_\ell} =$ $= \varphi_{\ell,q}\left(x\right)\big|_{\Pi_\ell},\ \ell = \overline{1, M},\ q = \overline{0, N}$.

Если $m = 0$, то $\Pi_k \in R^n$ – точки в R^n и следы могут быть значениями функции $f\left(x\right)$ и ее частных производных в этих точках. Тогда

$O(\{\varphi_{k,p}\},x)$ есть операторами интерполяции на M точках. Если $m=1, n\geq 2$, то Π_k есть линиями в R^n и операторы $O(\{\varphi_{k,p}\},x)$ есть операторами интерлинации на указанных линиях.

Сравнение интерполяции, интерлинации, интерфлетации и интерстрипации

Метод приближения	Тип используемой информации
Интерполяция функций одной или нескольких переменных	Значение функции и ее производных (до фиксированного порядка) в некоторых заданных точках
Интерлинация функций двух или более переменных	Следы функции $f(x)$ и ее производных (до фиксированного порядка) на нескольких заданных линиях
Интерфлетация функций трех и более переменных	Следы функции $f(x)$ и ее производных (до фиксированного порядка) на нескольких заданных поверхностях
Интерстрипация функций двух переменных	Функции, совпадающие с $f(x,y)$ на нескольких заданных полосах $S_k=\{(x,y): w_{k1}(x,y)\geq 0, w_{k2}(x,y)\leq 0\}, k=\overline{1,M}$ $f_k(x,y)=f(x,y),(x,y)\in S_k$, $k=\overline{1,M}$ Если $w_{k1}\equiv w_{k2}$, то интерстрипация совпадает с интерлинацией

Приведем некоторые формулы, используемые для построения операторов интерлинации и интерфлетации функций в явном виде[5, 6].

1. Операторы интерлинации без сохранения класса дифференцируемости $C^r(R^2)$, $r\geq 1$.

• Операторы рациональной интерлинации на M линиях. Пусть $n=2$ и $\Pi_k:\omega_k(x):=a_kx_1+$ $+b_kx_2-\gamma_k=0, k=\overline{1,M}, a_k^2+b_k^2=1$.

$$\varphi_{k,s}(x)=\partial^s f/\partial\nu_k^s(x)\big|_{\Pi_k}=\partial^s f/\partial\nu_k^s(x_1,$$

$(\gamma_k-a_kx_1)/b_k)$, если $b_k\neq 0$; $\nu_k=\nabla\omega_k(x)=$ $=(a_k,b_k)$ или $\varphi_{k,s}(x)=\partial^s f/\partial\nu_k^s(x)\big|_{\Pi_k}=$ $=\partial^s f/\partial\nu_k^s((\gamma_k-b_kx_2)/a_k,x_2)$, если $a_k\neq 0$,

$$O_{k,N}f(x)=\sum_{s=0}^{N}\varphi_{k,s}\left(x-\omega_k(x)\nabla\omega_k(x)\right)\frac{\omega_k^s(x)}{s!},$$

$$H_k(x)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{M}\omega_i^{N*}(x)\Big/\sum_{\ell=1}^{M}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq \ell}}^{M}\omega_i^{N*}(x),\ N^*=N+1,$$

если $N=2q+1,\ q\in\overset{0}{\mathrm{N}};\ N^*=N+2,$

если $N=2q,\ q\in\overset{0}{\mathrm{N}}$.

Теорема 1 [7]. Оператор

$$O_{M,N}\left(\{\varphi_{k,s}\},\{\Pi_k\},x\right)=\sum_{k=1}^{M}O_{k,N}f(x)H_{k,N}(x)$$

имеет свойства

$$\partial^s O_{M,N}\left(\{\varphi_{k,s}\},\{\Pi_k\},x\right)/\partial\nu_k^s(x)\big|_{\Pi_k}=$$

$$=\varphi_{k,s}(x)\big|_{\Pi_k},k=\overline{1,M},s=\overline{0,N}.$$

Замечание 1. Если $\Pi_k:\omega_k(x)=0, k=\overline{1,M}$ – произвольное множество линий в R^n, $n\geq 2$ или поверхностей в R^n, $n\geq 3$ и $\partial^p\omega_k(x)/\partial\nu_k^p\big|_{\Pi_k}=$ $=\delta_{0,p}$, $p=\overline{0,N}$, то утверждение теоремы 1 остается в силе при условии, что в одной точке не пересекается больше двух линий.

• Полиномиальная, тригонометрическая и сплайн-интерлинация на множестве взаимно перпендикулярных прямых линий.

Пусть

$G=I^2$, $I=[0,1]$, $0=x_{k,0}<\cdots<x_{k,M_k}=1$, $k=1,2$;

$$\partial^{s_k}f(x)/\partial x_k^{s_k}\Big|_{x_k=x_{k,i_k}}=\varphi_{k,i_k,s_k}(x_{3-k}),$$

$$B_kf(x)=\sum_{i_k=0}^{M_k}\sum_{s_k=0}^{N}\varphi_{i_k,s_k}(x_{3-k})h_{M_k,N,s_k}(x_k),$$

$h_{M_k,i_k,s_k}^{(q)}(x_{k,j})=\delta_{q,i_k}\delta_{i_k,j},q,s_k=\overline{0,N};i_k,j=\overline{1,M_k}$,

$h_{M_k,N,s_k}(x_k)$ – базисная система полиномиальной, тригонометрической или сплайн-интерполяции функций одной переменной.

Теорема 2 [7]. Операторы $Of(x)=(B_1+B_2-$ $-B_1B_2)f(x)$ имеют следующие свойства: $\partial^p Of(x)/\partial x_k^p=\partial^p Of(x)/\partial x_k^p$, $x_k=x_{k,i_k}$, $p=\overline{0,N}, i_k=\overline{0,M_k}, k=1,2$.

Кроме того, если $R_{12}f(x):=(I-O)f(x)$ есть остаточный член приближения функции $f(x)$ операторами $Of(x)$, то

$R_{12}f(x):=(I-O)f(x)=(I-B_1)(I-B_2)f(x)$.

Следовательно, $R_{12}f(x)=O(\varepsilon^2)$, если $(I-B_k)f(x)=O(\varepsilon), \varepsilon\to 0, k=1,2.$

• Экономные схемы построения операторов полиномиальной, тригонометрической и сплайн-интерполяции построены посредством соответствующих операторов интерлиниции.

В общем случае эти операторы имеют такую форму:

$$\overline{O}f(x)=\left(\overline{B_1}+\overline{B_2}-B_1B_2\right)f(x).$$

Операторы $\overline{B}_k f(x)$ получаются из операторов $B_k f(x)$ путем следующей замены $\varphi_{i_k,s_k}(x_{3-k})\approx$ $\approx\Phi_{i_k,s_k}(x_{3-k})$ на $B_k f(x)$, где $\Phi_{i_k,s_k}(x_{3-k})$ – полиномиальные, тригонометрические или сплайн-интерполянты со свойствами $\left\|\varphi_{i_k,s_k}(x_{3-k})-\Phi_{i_k,s_k}(x_{3-k})\right\|=O(\varepsilon^2)$.

Теорема 3 [7]. Операторы интерполяции $\overline{O}f(x)$ используют $Q_1\approx 2M^3$ значений $f(x)$, а операторы $B_1B_2f(x)$ – $Q_2\approx M^4$ (при условии, что $f(x)-B_1B_2f(x)=O(\varepsilon^2)$, $M_1=M_2=M$).

Операторы интерстрипации функций двух переменных

Восстановление поверхности по ее изображениям между параллельными полосами. Примем, что все изображение поверхности Σ известно лишь на системе параллельных полос, которые, не уменьшая общность, будем считать горизонтальными

$$D_{2,l}=\{\gamma_l\le y\le\delta_l,\ x\in[\alpha_1,\ \beta_{n+1}]\},\ l=\overline{1,n}.$$

Если $\gamma_l=\delta_l$, то эти полосы вырождаются в линии. Поверхность $\sum: z=f(x,y)$, которую желательно восстановить, считается известной лишь на указанных полосах, т.е.

$$f(x,y)\big|_{\gamma_l<y<\delta_l}=f_{2,l}(x,y),\gamma_l<y<\delta_l,\alpha_1\le x\le\beta_{m+1}.$$

Здесь z – расстояние от некоторой плоскости $z=0$ до $\sum$ в точке (x,y).

Введем к рассмотрению оператор (если $f^{0,n}(x,y)=\dfrac{\partial^N}{\partial y^N}f(x,y)\in C(R^2)$)

$$L_2f(x,y)=\begin{cases} f_{2,l}(x,y),\gamma_l\le y\le\delta_l;0\le x\le 1\\ E_{2,l,l+1}f(x,y),\delta_l\le y\le\gamma_{l+1};0\le x\le 1;l=\overline{1,n-1}\end{cases},$$

где

$$E_{2,l,l+1}f(x,y)=\sum_{p=0}^{N}\Big[f^{(0,p)}(x,\delta_l)\ell_{1,l,p}(y)+$$
$$+f^{(0,p)}(x,\gamma_{l+1})\ell_{2,l+1,p}(y)\Big],$$
$$\ell_{1,l,p}^{(r)}(\delta_l)=\delta_{r,p};\ell_{1,l,p}^{(r)}(\gamma_{l+1})=0,$$
$$\ell_{2,l+1,p}^{(r)}(\delta_l)=0;\ell_{2,l+1,p}^{(r)}(\gamma_{l+1})=\delta_{r,p},0\le r,p\le n.$$

Примем оператор интерстрипации $L_2f(x,y)$ математической моделью поверхности $\sum$, которая на каждой из полос $D_{2,l}$ точно восстанавливает поверхность, а между полосами изображает поверхность с помощью операторов

$$E_{2,l,l+1}f(x,y), l=\overline{1,n-1}.$$

Если расстояние между полосами равно нулю $\gamma_{l+1}-\delta_l=0$, оператор $L_2f(x,y)$ можно записать в виде $L_2f(x,y)=f_{2,l}(x,y),\ \gamma_l\le y\le\delta_l;$ $0\le x\le 1,\ l=\overline{1,n-1}$.

На практике функции $f_{2,l}(x,y)$, как правило, не известны и все изображения поверхности на каждой полосе определяются матрицами $M^{(i)}$, $i=\overline{1,r}$ размерности $m_i\times n, i=\overline{1,r}$ так, что $M^{(i)}_{p-k_{2i-1}+1,q}=M_{p,q}$, $p=\overline{k_{2i-1},k_{2i}}$, $q=\overline{1,n}$; $m_i=k_{2i}-$ $-k_{2i-1}+1$. Для этого случая авторами разработан пакет программ для численной реализации предложенного метода описания поверхностей с помощью интерстрипации.

Восстановление поверхности по ее изображениям на взаимно перпендикулярных полосах

Считаем, что задана система горизонтальных полос $D_{2,l}=\{\gamma_l\le y\le\delta_l,x\in[\alpha_1,\beta_{n+1}]\}$, $l=\overline{1,n}$, а также система вертикальных полос $D_{1,k}=$ $=\{\alpha_k\le x\le\beta_k,\ y\in[\gamma_1,\ \delta_{n+1}]\}, k=\overline{1,m}$.

Поверхность $\sum: z=f(x,y)$, которую требуется возобновить, считается известной лишь на указанных полосах

$f(x,y)\big|_{\alpha_k \le x \le \beta_k} = f_{1,k}(x,y),\ \alpha_k \le x \le \beta_k,$

$\gamma_1 \le y \le \delta_{n+1},\ \ f(x,y)\big|_{\gamma_l < y < \delta_l} = f_{2,l}(x,y),$

$\gamma_l < y < \delta_l, \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1}.$

Здесь z – расстояние от некоторой плоскости $z=0$ до $\sum$ в точке (x,y).

При єтом считаем, что $\alpha_k < \beta_k < \alpha_{k+1} < < \beta_{k+1},\ k=\overline{1,m},\ \gamma_l < \delta_l < \gamma_{l+1} < \delta_{l+1},\ l=\overline{1,n},$ $f_{1,k}(x,y)=0,\ x<\alpha_k$ или $x>\beta_k$, $\ f_{2,l}(x,y)=0,$ $y<\gamma_l$ или $y>\delta_l$.

Введем в рассмотрение операторы

$$L_1 f(x,y) = \begin{cases} f_{1,k}(x,y), \alpha_k \le x \le \beta_k; \gamma_1 \le y \le \delta_{n+1} \\ E_{1,k,k+1} f(x,y), \beta_k \le x \le \alpha_{k+1}; 1 \le k \le m-1 \end{cases}$$

и

$$L_2 f(x,y) = \begin{cases} f_{2,l}(x,y), \gamma_l \le y \le \delta_l; \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1} \\ E_{2,l,l+1} f(x,y), \delta_l \le y \le \gamma_{l+1}; \alpha_1 \le x \le \beta_{m+1}; l=\overline{1,n-1} \end{cases},$$

где

$$E_{1,k,k+1} f(x,y) = \sum_{s=0}^{N} \Big[f^{(s,0)}(\beta_k, y)\ell_{1,k,s}(x) + + f^{(s,0)}(\alpha_{k+1}, y)\ell_{2,k+1,s}(x) \Big]$$

$$\ell_{1,k,s}^{(p)}(\beta_k) = \delta_{p,s};\ \ell_{2,k+1,s}^{(p)}(\alpha_{k+1}) = \delta_{p,s}$$

$$\ell_{1,k,s}^{(p)}(\alpha_{k+1}) = 0; \ell_{2,k+1,s}^{(p)}(\beta_k) = 0, 0 \le s,q \le N$$

$$E_{2,l,l+1} f(x,y) = \sum_{p=0}^{N} \Big[f^{(0,p)}(x,\delta_l)\ell_{1,l,p}(y) + + f^{(0,p)}(x,\gamma_{l+1})\ell_{2,l+1,p}(y) \Big]$$

$$\ell_{1,l,p}^{(r)}(\delta_l) = \delta_{r,p}; \ell_{1,l,p}^{(r)}(\gamma_{l+1}) = 0$$

$$\ell_{2,l+1,p}^{(r)}(\delta_l) = 0; \ell_{2,l+1,p}^{(r)}(\gamma_{l+1}) = \delta_{r,p}, 0 \le r,p \le n.$$

На их основе построим оператор

$$Of(x,y) = \begin{cases} f_{1,k}(x,y), D_{1,k} = \{\alpha_k \le x \le \beta_k, y \in [\gamma_1, \delta_{n+1}]\}, k=\overline{1,m} \\ f_{2,l}(x,y), D_{2,l} = \{\gamma_l \le y \le \delta_l, x \in [\alpha_1, \beta_{n+1}]\}, l=\overline{1,n} \\ E_{1,2,k,l} f(x,y), (x,y) \in D_{1,k} \cap D_{2,l}, k=\overline{1,m}, l=\overline{1,n} \end{cases}$$

$$E_{1,2,k,l} f(x,y) = \left[E_{1,k,k+1} + E_{2,l,l+1} - E_{1,k,k+1}E_{2,l,l+1}\right] f(x,y).$$

Оператор интерстрипации $Of(x,y)$ есть математическая модель поверхности, построенной с помощью известных данных аэрофотосъемки или радиолокационного зондирования на взаимноперпендикулярных полосах.

На практике функции $f_{1,k}(x,y)$ и $f_{2,l}(x,y)$, как правило, неизвестны и все изображения поверхности на каждой полосе определяются соответствующими матрицами, как описано. Для этого случая авторами разработан пакет программ для численной реализации рассмотренного метода.

Общая теория интерстрипации

Задана система полос $S_i : \alpha_i \le \omega_i(x,y) \le \beta_i$, $i=\overline{1,n},\ \ \omega_i := a_i x + b_i y - c_i,\ a_i^2 + b_i^2 = 1$. Считаем известными также рельефы поверхности $S: z = = f(x,y) \in C(R^2)$ над каждой полосой: $f_i(x,y) = f(x,y)\Big|_{S_i}$, $i=\overline{1,n}$. Требуется по этой информации возобновить (возможно приближенно) функцию $f(x,y)$. Случай, когда все полосы параллельны или взаимно перпендикулярны, рассмотрен выше. Поэтому уделим больше внимания общему случаю. Введем к рассмотрению такие обозначения: $S_{k,p} = S_k \cap S_p$,

$$f_{k,p}(x,y) = f(x,y)\Big|_{S_{k,p}} = f_k(x,y)\Big|_{S_{k,p}} = f_p(x,y)\Big|_{S_{k,p}},$$

$$\Omega_i(x,y) = \begin{cases} \omega_i(x,y) - \alpha_i, & \omega_i(x,y) < \alpha_i \\ 0, & \alpha_i \le \omega_i(x,y) \le \beta_i, \\ \omega_i(x,y) - \beta_i & \omega_i(x,y) > \beta_i \end{cases}$$

$$G_i(x,y) = \prod_{j=1, j\ne i}^{n} \Omega_j^2(x,y) \Big/ \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1, j\ne k}^{n} \Omega_j^2(x,y), \quad i=\overline{1,n}.$$

Очевидно,

$$G_i(x,y)\Big|_{S_p} = \begin{cases} 1, & p=i, \\ 0, & p \ne i, \end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{M} G_i(x,y) \equiv 1.$$

Эти свойства функции $G_i(x,y)$ дают возможность доказать справедливость теоремы.

Теорема 4 [7]**.** Оператор $O(\{f_i\}; x,y) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} G_i(x,y) f_i(x,y) - \sum_{S_{k,p} \ne 0} G_k(x,y) G_p(x,y) f_{k,p}(x,y)$$

имеет такие свойства:

$$f_i(x,y) \in C\left(R^2\right), \quad i=\overline{1,n} \Rightarrow O\left(\{f_i\};x,y\right) \in C\left(R^2\right);$$

$$O\left(\{f_i\};x,y\right)\Big|_{S_q} = f_q(x,y)\Big|_{S_q}, \quad q=\overline{1,n}.$$

Итак, операторы $O\left(\{f_i\};x,y\right)$ позволяют восстанавливать неизвестную поверхность в точках между полосами по информации о ней, заданной на указанных полосах. Для большего приближения к практике следует учитывать, что функции $f_i(x,y)$, $i=\overline{1,n}$ могут быть заданы в виде набора снимков, полученных вдоль полос, причем снимки могут накладываться один на другой, т.е. иметь общие подобласти, а не только общие границы. Это означает, что для построения $f_i(x,y)$, $i=\overline{1,n}$ в точках R^2 иногда следует использовать сглаживающие алгоритмы, а не только алгоритмы, точно восстанавливающие поверхность заданной подобласти на полосе S_i, $i=\overline{1,n}$. Кроме того, необходимо уметь продолжать функции $f_i(x,y)$, $i=\overline{1,n}$ за пределы полос. Один из возможных алгоритмов продолжения таков: пусть полосе S_i соответствует местная система координат $\omega_i := a_i x + b_i y - c_i$, $\tau_i := -b_i x + a_i y$. Тогда (здесь $\omega_i = \omega_i(x,y)$)

$$\tilde{f}_i(x,y) = \begin{cases} f_i(x,y), & (x,y)\in S_i, \\ f_i\left(x-(\omega_i-\alpha_i)a_i,\, y-(\omega_i-\alpha_i)b_i\right), & \omega_i < \alpha_i, \\ f_i\left(x-(\omega_i-\beta_i)a_i,\, y-(\omega_i-\beta_i)b_i\right), & \omega_i > \beta_i \end{cases}$$

будет непрерывной в R^2 и $\tilde{f}_i(x,y) = f_i(x,y)$, $(x, y) \in S_i$.

Как и для взаимно перпендикулярных полос можно допустить, что интерстрипацию можно использовать на границах полос N.

Результаты

Предложена теория интерстрипации функций $f(x, y)$ с помощью данных о f на указанных полосах, полученных с помощью аэрофотосъемки или радиолокационного зондирования поверхности. Функция $f(x, y)$ может быть интенсивностью освещения поверхности в точке (x, y). Теория интерлинации и интерфлетации позволяет строить операторы, приближающие $f(x)$, $x=(x_1,x_2,x_3)$ с помощью экспериментальных данных – следов приближенных функций и их производных на заданной системе линий или поверхностей, а интерстрипации – на заданной системе полос.

Пример. Пусть требуется восстановить поверхность (рис. 1,*а*), по известным ее изображениям на системе горизонтальных и вертикальных полос (рис. 1,*б*,*в*). Объединение этих полос дает поверхность на рис. 1,*г*. На рис. 1,*д* восстановлена поверхность с помощью описанного метода.

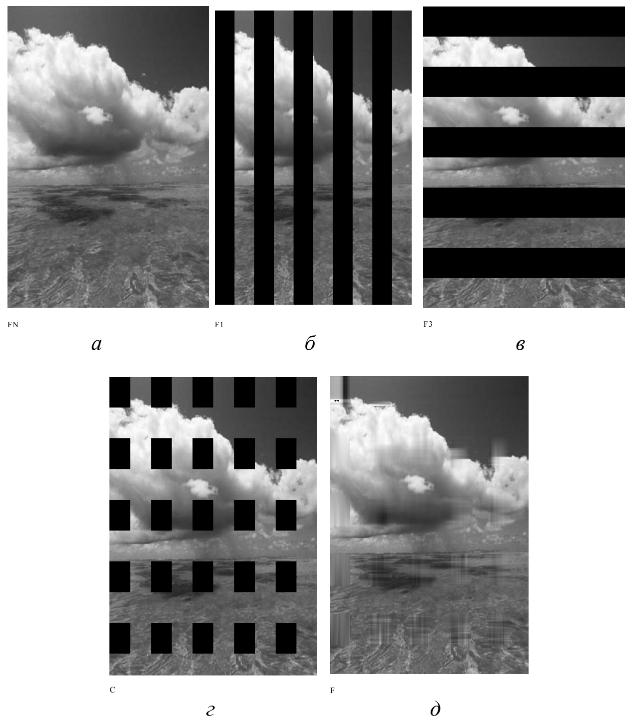

Рис. 1. Изображение матриц при возобновлении поверхности с помощью интерстрипации функций: *а* – поверхность – оригинал; *б* – вертикальных полос; *в* – горизонтальных полос; *г* – объединения вертикальных и горизонтальных полос; *д* – возобновленной поверхности по информации о поверхности на пяти горизонтальных и пяти вертикальных полосах

Заключение. Вычислительный эксперимент подтвердил эффективность предложенного метода и то, что для большей точности восстановления поверхности необходимо сокращать максимальные расстояния между соседними полосами как вертикальными, так и горизонтальными. Операторы, используемые для этого, названы авторами операторами интерстрипации и могут включать в себя в явном виде снимки, полученные путем аэрокосмической съемки или данных сканирования поверхности посредством радиолокатора, размещенного на искусственном спутнике Земли и двигающегося вдоль соответствующих полос. Авторы считают, что теория цифровой обработки данных о поверхности Земли и других планет должна включить в свой арсенал теорию интерстрипации функций на системе пересекающихся полос.

1. *Литвин О.М.*, *Матвєєва С.Ю.* Інтерлінація та інтерфлетація функцій багатьох змінних та її застосування у картографії // Національне картографування: стан, проблеми та перспективи розвитку: Зб. наук. праць // Картографія. – 2005. – **2**. – С. 22–24.
2. *Литвин О.М.*, *Матвєєва С.Ю.*, *Межуєв В.І.* Метамодель для математичного моделювання поверхні тіла на основі даних радіолокації // УСиМ. – 2010. – № 3. – С. 33–47.
3. *Литвин О.М.*, *Матвєєва С.Ю.* Метод відновлення поверхні між смугами за допомогою інформації про поверхню на взаємно перпендикулярних смугах // Там же. – 2011. – № 1. – С. 33–41.
4. *Матвєєва С.Ю.* Метод побудови цифрових карт за допомогою інтерлінації та інтерфлетації функцій // Питання оптимізації обчислень, 2005. – С. 145.
5. *Литвин О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи: Навч. посіб. – К.: Наук. думка, 2005. – 344 с.
6. *Литвин О.М.* Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В.Л. Рвачова // Мат. методи та фізико-мех. поля. – 2007. – № 4. – С. 61–82.
7. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002 – 544 с.
8. *Сосса Р.І.* Сучасний стан, проблеми та завдання національного картографування в Україні // Нац. картографування: стан, проблеми та перспективи розвитку: Зб. наук. праць // Картографія, 2005. – **2**. – С. 4–8.
9. *Остроух В.І.* Особливості впровадження в картографічне виробництво цифрових географічних основ // Там же. – С. 194–196.
10. *Савин А.И.* Принципы построения космических систем глобального наблюдения // Исследование Земли из космоса. – 1993. – № 1. – С. 40–47.
11. *Бондур В.Г.*, *Старченков С.А.* Методы и программы обработки и классификация аэрокосмических изображений // Изв. ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2001. – № 3. – С. 118–143.
12. *ERDAS* Imagine software. 1–**7** // ERDAS Inc. – 1995. – 1458 p.
13. *ERMapper* and ERSlorage software and documentation is propriety to Earth Resource Mapping Pty Ltd. **l**–**5** // ER Mapping. – 1995. – 1237 p.
14. *TNTmips* software. **1**–**9** // MICROIMAGES Inc. – 1994. – 832 p.

Поступила 06.01.2014

Тел. для справок: +38 066 135-9633, 050 182-6071
(Харьков, Бердянск)
E-mail: *academ_mail@ukr.net*, *svetlana*1980*g@mail.ru*

●