УДК 519.63; 004.75; 536.252

С.В. Сирик, Н.Н. Сальников, В.К. Белошапкин

Выбор весовых функций в методе Петрова–Галеркина для интегрирования линейных одномерных уравнений конвекции–диффузии

Предложен класс весовых функций в конечноэлементном методе Петрова-Галеркина, обобщающий некоторые более ранние результаты в данном направлении. Построены соответствующие полудискретные и дискретные аппроксимации для линейного одномерного уравнения конвекции–диффузии, и исследована их точность и устойчивость.

A class of weighting functions in the finite-element Petrov-Galerkin method that generalizes some earlier results is proposed. The corresponding semidiscrete and discrete approximations for linear one-dimensional convection-diffusion equation are constructed, its accuracy and stability are examined.

Запропоновано клас вагових функцій в скінченноелементному методі Петрова–Гальоркіна, що узагальнює деякі раніше отримані результати в даному напрямі. Побудовано відповідні напівдискретні та дискретні апроксимації для лінійного одновимірного рівняння конвекції–дифузії, і досліджено їх точність та стійкість.

Введение. Метод конечных элементов (МКЭ) в форме метода Петрова–Галеркина с конечными элементами – один из наиболее универсальных для построения численных схем при решении задач математической физики [1–5]. Приближенное решение с помощью МКЭ находится в виде разложения по конечной совокупности финитных функций (т.е. отличных от нуля только на некотором ограниченном множестве), называемых *базисными*, а коэффициенты разложения определяются из условия ортогональности невязки совокупности так называемых *весовых* финитных функций. В традиционном (классическом) МКЭ Галеркина наборы базисных и весовых функций совпадают, однако при расчете задач с доминированием конвективных процессов (отметим, что к этому классу относится большинство процессов, рассматриваемых в гидродинамике и магнитной гидродинамике [6, 7, 3], а также встречающихся в химической промышленности [8]) МКЭ Галеркина приводит к неустойчивым (осциллирующим) решениям с большими погрешностями, что делает полученные численные решения совершенно непригодными [3, 4]. Потому для подобных задач используют так называемые *стабилизированные* [3, 4] методы Петрова–Галеркина, в которых к стандартным весовым функциям добавляют специальные члены, обеспечивающие устойчивость счета. Отметим, что с помощью надлежащего выбора весовых функций можно гибко влиять на свойства получаемых численных аппроксимаций, в частности, обеспечивать их устойчивость при интегрировании уравнений с доминирующей конвекцией.

В работе [9] предложен способ построения весовых функций для задач конвекции-диффузии, позволяющий гибко настраивать вид и форму весовой функции в зависимости от величины и направления вектора скорости переноса, что в свою очередь давало возможность гибко влиять на стабилизационные свойства получаемых численных схем и избегать появления в численном решении нефизических осцилляций и неустойчивостей [10]. Данные весовые функции и их многомерные обобщения успешно применялись для численного решения различных нестационарных задач конвекции-диффузии (в том числе и в тех случаях, когда скорость в конвективном слагаемом резко изменяется как по величине, так и по направлению), а также нелинейных уравнений [10, 11]. При этом в ряде важных случаев использование данных функций имело преимущества в плане точности и устойчивости численного решения в сравнении с другими версиями и реализациями метода Петрова–Галеркина. Указанные свойства, в частности, достигаются благодаря использованию адаптивных весовых функций [9] и применению приема сосредоточения (*mass lumping*) [12].

Ключевые слова: уравнение конвекции–диффузии, метод конечных элементов, метод Петрова–Галеркина, *SUPG*.

В данной статье предлагается обобщение весовых функций работы [9] (при этом весовые функции и численные аппроксимации, предложенные там, есть частными случаями предложенных в статье), которое позволяет добиться большей точности и устойчивости численных решений. Проведен теоретический анализ численных схем, построенных на основе предлагаемых весовых функций, в частности, исследована их локальная аппроксимация [13], проведен анализ методом Фурье [13, 14, 8], и на основе сеточного принципа максимума [13, 8] найдены условия, при которых имеет место равномерная сходимость предложенного семейства разностных схем с весами.

Постановка задачи и выбор весовых функций в методе Петрова–Галеркина

Рассмотрим уравнение конвекции–диффузии [1–4]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}=\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где $u=u(x,t)$, $x\in(L_1;L_2)$, $t\in(0;T]$, а величины λ и κ для упрощения выкладок предполагаются постоянными и положительными. Будем также считать, что для уравнения (1) заданы начальное и граничные условия [7], обеспечивающие существование и единственность его решения (в дальнейшем, для определенности будем считать, что заданы граничные условия первого рода [7]). Пусть на отрезке $\Omega\equiv[L_1;L_2]$ задана система равномерно распределенных точек (узлов) x_k, $k=\overline{0,N}$ с шагом $h=x_{k+1}-x_k$, $x_0=L_1$, $x_N=L_2$. Каждый из отрезков $[x_k;x_{k+1}]$ в МКЭ принято называть *элементом* [2, 5]. С каждым узлом x_k свяжем непрерывную кусочно-линейную финитную базисную функцию $N_k(x)$. Функция $N_k(x)$ отлична от нуля на отрезке $[x_{k-1};x_{k+1}]$ (носителе данной функции), равна нулю на концах отрезка и за его пределами, линейная на элементах $[x_{k-1};x_k]$ и $[x_k;x_{k+1}]$ и равна единице в точке x_k.

Приближенное слабое решение [1, 3, 4] уравнения (1) будем искать в виде

$$\widetilde{u}(x,t)=\sum_{j=0}^{N}a_j(t)N_j(x), \qquad (2)$$

где $\vec{a}(t)=\{a_j(t)\}_{j=0}^{N}$ – вектор коэффициентов разложения по базисным функциям. В соответствии с процедурой метода Петрова–Галеркина [2–4, 8], умножим уравнение (1) на весовую функцию $W_k(x)$, соответствующую узлу сетки k, и проинтегрируем получившееся тождество по отрезку Ω. В получившиеся тождества вместо неизвестного точного решения u подставим $\widetilde{u}$, определяемое выражением (2). В результате (после вычисления интегралов) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) (так называемую *полудискретную аппроксимацию* [3, 4, 8, 9]) для определения неизвестных коэффициентов $a_j(t)$, $1\le j\le N-1$ ($a_0(t)$ и $a_N(t)$ определяются из граничных условий). Вопросы учета начальных и граничных условий исходной начально-краевой задачи при решении полученной СОДУ подробно изложены в [10].

Рассмотрим вопрос выбора весовых функций $W_k(x)$ в методе Петрова–Галеркина. В работе [9] и других, посвященных численному решению задач конвекции–диффузии, в методе Петрова–Галеркина успешно применялись весовые (поверочные) функции вида

$$W_k(x)=N_k(x)+\alpha_k W_k^*(x), \qquad (3)$$

где α_k – некоторый настроечный параметр (коэффициент), а функция $W_k^*(x)$ выбирается таким образом, чтобы обеспечить стабилизирующий эффект (избавиться от ложных, не имеющих физического смысла осцилляций) в получаемых численных аппроксимациях. Отметим, что стабилизация необходима, поскольку классический метод Галеркина, в котором $W_k(x)\equiv N_k(x)\ \ \forall k$, приводит в задачах с доминирующей конвекцией к серьезным погрешностям (если только шаг сетки не является очень малым) [8].

В работе [9] предложено использовать функции $W_k^*(x)={}^nW_k^*(x)$, где ${}^nW_k^*(x)$ определяется выражением

$$
{}^nW_k^*(x)=\begin{cases} {}^nW((x_k-x)/h), & x\in[x_{k-1},x_k], \\ -{}^nW((x_{k+1}-x)/h), & x\in[x_k,x_{k+1}], \\ 0, & x\notin[x_{k-1},x_{k+1}], \end{cases} \quad (4)
$$

а функция ${}^nW(\xi)\equiv[(n+1)/(n-1)](\xi-\xi^n)$, n – порядок полинома (целое $n>1$). В частном случае при $n=2$ получаем известные в вычислительной практике квадратичные весовые функции [8, 2, 15], для которых при $\alpha_k=\coth(Pe\cdot h/2)-2/(Pe\cdot h)$ (где число Пекле $Pe\equiv\lambda/\kappa$) в стационарном случае ($\partial u/\partial t=0$) численное решение (1) совпадает с точным в узлах сетки [8, 2]. Нормирующий коэффициент в определении функции ${}^nW(\xi)$ выбран в виде $(n+1)/(n-1)$ исходя из тех соображений, что в таком случае численная аппроксимация стационарного уравнения (1) (при $\partial u/\partial t=0$) оказывается не зависящей от n, и, следовательно, совпадает с соответствующей аппроксимацией при $n=2$, свойства и характер сходимости которой (как и свойства соответствующих квадратичных весовых функций) хорошо изучены. Таким образом, параметр n в (4) влияет только на аппроксимацию члена $\partial u/\partial t$ в уравнении (1). В статье предлагается обобщение весовых функций (3) – (4) на случай, когда n принимает действительные значения (а не только целые $n>1$).

Замечание 1. При $n=1$ в выражении для ${}^nW(\xi)$ формально получается деление на ноль, потому ${}^1W(\xi)$ определим как предел выражений ${}^nW(\xi)$ при $n\to1$ и фиксированных ξ: ${}^1W(\xi)\equiv\lim\limits_{n\to1}{}^nW(\xi)=-2\xi\ln\xi$ при $0<\xi\le1$ и ${}^1W(0)\equiv\lim\limits_{n\to1}{}^nW(0)=\lim\limits_{\xi\to0+0}(-2\xi\ln\xi)=0$. Определенная таким образом функция ${}^1W(\xi)$ непрерывна при $0\le\xi\le1$.

Полудискретные аппроксимации

Применение метода Петрова–Галеркина к уравнению (1) приводит к СОДУ вида

$$
\sum_{j=0}^{N}\left(\int_\Omega W_kN_jdx\right)\frac{da_j}{dt}+\lambda\sum_{j=0}^{N}\left(\int_\Omega W_k\frac{dN_j}{dx}dx\right)a_j=
-\kappa\sum_{j=0}^{N}\left(\int_\Omega \frac{dW_k}{dx}\frac{dN_j}{dx}dx\right)a_j, \quad (5)
$$

$1\le k\le N-1$. Используя выражения (4) и вычисляя в явном виде интегралы в (5), получаем

$$
\left(\frac{1}{6}+\alpha_k\frac{n+1}{3(n+2)}\right)\dot a_{k-1}+\left(\frac{2}{3}-\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}\right)\dot a_k+
\left(\frac{1}{6}-\alpha_k\frac{n+4}{6(n+2)}\right)\dot a_{k+1}+\frac{\lambda}{2h}\left(a_{k+1}-a_{k-1}\right)=
=\frac{\alpha_k\lambda}{2h}\left(a_{k-1}-2a_k+a_{k+1}\right)+\frac{\kappa}{h^2}\left(a_{k-1}-2a_k+a_{k+1}\right). \quad (6)
$$

В частном случае при $n=2$ соотношение (6) переходит в (стандартную) аппроксимацию Петрова–Галеркина (соответствующую применению квадратичных весовых функций) [8]:

$$
\left(\frac{1}{6}+\frac{\alpha_k}{4}\right)\dot a_{k-1}+\frac{2}{3}\dot a_k+\left(\frac{1}{6}-\frac{\alpha_k}{4}\right)\dot a_{k+1}=
=\frac{\alpha_k\lambda}{2h}\left(a_{k-1}-2a_k+a_{k+1}\right)-\frac{\lambda}{2h}\left(a_{k+1}-a_{k-1}\right)+
+\frac{\kappa}{h^2}\left(a_{k-1}-2a_k+a_{k+1}\right), \quad (7)
$$

из которой, в свою очередь, выполнив формальную подстановку $\alpha_k=2\alpha_k^{(\mathrm{supg})}\lambda/h$, можно получить схемы известных методов *SUPG* и *GLS* [4, 3]. Таким образом, семейство (6) оказывается достаточно широким, чтобы включать в себя ряд известных стандартных конечноэлементных аппроксимаций Петрова–Галеркина.

Замечание 2. Для сходимости всех интегралов в (5) достаточно потребовать, чтобы $n>0$ (хотя, впрочем, в дальнейшем анализе это условие использоваться не будет). Заметим, что аппроксимацию (6) можно рассматривать и изучать независимо от того, каким способом она была получена (поскольку сходимость решений разностных задач к решениям дифференциальных задач зависит от наличия свойств аппроксимации и устойчивости у соответствующих разностных задач [13]).

Обозначим через L_h дифференциально-разностный оператор соотношения (6). Тогда погрешность $\psi_h \equiv L_h u - Lu$ аппроксимации в точке (x_k, t) оператором L_h дифференциального оператора L уравнения (1) на его решении $u(x,t)$ выражается следующим образом:

$$\psi_h = \sum_{m=3}^{7} A_m \frac{\partial^m u_k}{\partial x^m} + O(h^6), \qquad (8)$$

где $A_3 = -\left(\frac{\alpha_k \kappa h}{2} + \frac{\alpha_k \lambda h^2 (n-2)}{12(n+2)} \right)$,

$$A_4 = \frac{\kappa h^2}{12} + \frac{\alpha_k \lambda h^3}{24} + \frac{\kappa h^2 \alpha_k (n-2)}{12(n+2)},$$

$$A_5 = -\left(\frac{\alpha_k \kappa h^3}{12} + \frac{\lambda h^4}{180} + \frac{\lambda h^4 \alpha_k (n-2)}{144(n+2)} \right),$$

$$A_6 = \frac{\kappa h^4}{90} + \frac{\alpha_k \lambda h^5}{360} + \frac{\kappa h^4 \alpha_k (n-2)}{144(n+2)},$$

$A_7 = -\frac{\alpha_k \kappa h^5}{240}$ (нижний индекс k возле величин $\partial^m u_k / \partial x^m$ и α_k указывает, что их значения берутся при $x = x_k$). Подробный вывод формулы (8) в приложении.

Замечание 3. Выкладки при выводе соотношения (8) справедливы и в том случае, если в уравнении (1) величины λ и κ рассматривать как функции, зависящие от времени t.

Замечание 4. При $n = 2$ из (8) получаем, что погрешность аппроксимации $\psi_h = O(\alpha_k h)$ (соответственно, для случая $\alpha_k = O(h)$, часто используемого на практике [9, 4], имеем $\psi_h = O(h^2)$). Из (8) следует, что погрешность схемы можно уменьшить за счет выбора n. А именно, при выборе n в виде

$$n = \frac{2(\lambda h - 6\kappa)}{\lambda h + 6\kappa} \qquad (9)$$

коэффициент A_3 при третьей производной в (8) становится нулевым. Отметим, что при таком выборе n справедливо неравенство $-2 < n < 2$. Погрешность аппроксимации можно сделать $\psi_h = O(h^4)$, если, помимо выполнения (9), с помощью выбора коэффициента α_k добиться выполнения равенства $\frac{\kappa h^2}{12} + \frac{\kappa h^2 \alpha_k (n-2)}{12(n+2)} = 0$ в коэффициенте A_4. Действительно, из данного условия получаем $\alpha_k = \frac{2+n}{2-n}$ или же, подставив сюда значение n из (9),

$$\alpha_k = \frac{2+n}{2-n} = \frac{\lambda h}{6\kappa}. \qquad (10)$$

При выборе параметров n и α_k в виде (9) – (10), для погрешности получаем следующее выражение:

$$\psi_h = \frac{\lambda^2 h^4}{144\kappa} \frac{\partial^4 u_k}{\partial x^4} - \frac{\lambda h^4}{80} \frac{\partial^5 u_k}{\partial x^5} + \frac{\kappa h^4}{90} \frac{\partial^6 u_k}{\partial x^6} + O(h^5) = O(h^4),$$

т.е. погрешность аппроксимации имеет четвертый порядок точности по h. Отметим, что выражение $\alpha_k = \lambda h / (6\kappa)$ оптимально и для стационарных задач (при этом также достигается четвертый локальный порядок точности аппроксимации [15]). Кроме того, если значение α_k определять, исходя из условия обращения в нуль коэффициента A_4 при четвертой производной, то главный член погрешности ψ_h будет иметь дисперсионный характер (пятая производная), из-за чего при расчетах с помощью таких схем в численных решениях может наблюдаться «рябь», нарастающая со временем. В случае же использования (10) в выражении для погрешности присутствует диссипативный член с четвертой производной, который (в особенности, при малых значениях κ) осуществляет некоторую «монотонизацию» схемы, подавляя дисперсионную (фазовую) ошибку из-за чего «рябь», как правило, уменьшается или же устраняется вовсе.

Исследуем поведение системы (6) методом Фурье (подобно тому, как это делается при исследовании устойчивости разностных схем [16, 13, 14, 8]), предполагая при этом, что задача рассматривается на неограниченной по пространственным переменным области [16]. Для этого ищем частные решения системы (6) в виде гармоник $a_k(t)=e^{\omega t}e^{ikhp}$, где ω – некоторое комплексное число (подлежащее определению), i – комплексная единица ($i=\sqrt{-1}$), p – произвольное действительное число (пространственная частота гармоники). Подставляя $a_k(t)=e^{\omega t}e^{ikhp}$ в (6) и сокращая полученное выражение на $e^{\omega t}e^{ikhp}$, получим

$$\left(\frac{1}{6}+\alpha_k\frac{n+1}{3(n+2)}\right)\omega e^{-ihp}+\left(\frac{2}{3}-\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}\right)\omega+$$
$$+\left(\frac{1}{6}-\alpha_k\frac{n+4}{6(n+2)}\right)\omega e^{ihp}+\frac{\lambda}{2h}\left(e^{ihp}-e^{-ihp}\right)=$$
$$=\left(\frac{\alpha_k\lambda}{2h}+\frac{\kappa}{h^2}\right)\left(e^{-ihp}-2+e^{ihp}\right),$$

откуда, после очевидных преобразований, получаем выражение для ω:

$$\omega=\omega(p)=-$$
$$-\frac{4\left(\frac{\alpha_k\lambda}{2h}+\frac{\kappa}{h^2}\right)\sin^2\frac{hp}{2}+\frac{\lambda}{h}i\sin(hp)}{\left(\frac{1}{3}+\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}\right)\cos(hp)+\frac{2}{3}-\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}-\frac{\alpha_k}{2}i\sin(hp)}. \quad (11)$$

Начальное условие для решения $a_k(t)=$ $=e^{\omega t}e^{ikhp}$ имеет вид гармоники e^{ikhp}, значения которой ограничены. Соответственно, при условии $\operatorname{Re}\omega\le 0$ решение $a_k(t)$ не будет возрастать, что свидетельствует о строгой равномерной устойчивости системы по начальному значению в данном классе решений (само условие $\operatorname{Re}\omega\le 0$ при этом – аналог известного спектрального условия Неймана устойчивости в теории разностных схем [8, 14]). Найдем условия, при которых $\operatorname{Re}\omega(p)\le 0\ \ \forall p$. Умножая числитель и знаменатель (11) на комплексно-сопряженное число к знаменателю и отделяя в полученном числе действительную и мнимую часть, получаем, что условие $\operatorname{Re}\omega\le 0$ эквивалентно неравенству

$$-4\left(\frac{\alpha_k\lambda}{2h}+\frac{\kappa}{h^2}\right)\left(\left(\frac{1}{3}+\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}\right)\cos(hp)+\frac{2}{3}-\right.$$
$$\left.-\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}\right)\sin^2\frac{hp}{2}+\frac{\lambda\alpha_k}{2h}\sin^2(hp)\le 0,$$

которое заменой $z\equiv\sin^2(hp/2)$ приводится к виду

$$-4\left(\frac{\alpha_k\lambda}{2h}+\frac{\kappa}{h^2}\right)z\left(\left(\frac{1}{3}+\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}\right)(1-2z)+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}-\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}\right)+\frac{\lambda\alpha_k}{2h}4z(1-z)\le 0.$$

После сокращения на z, выражение выглядит так:

$$-2\left(\frac{\alpha_k\lambda}{2h}+\frac{\kappa}{h^2}\right)\left(\left(\frac{1}{3}+\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}\right)(1-2z)+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}-\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}\right)+\frac{\lambda\alpha_k}{h}(1-z)\le 0. \quad (12)$$

Поскольку $0\le z\le 1$ (когда p пробегает значения действительной оси) и неравенство (12) линейно относительно z, его выполнение для всех $z\in[0;1]$ эквивалентно выполнению в граничных точках $z=0$ и $z=1$. Таким образом, при $z=0$ получаем

$$-2\left(\frac{\alpha_k\lambda}{2h}+\frac{\kappa}{h^2}\right)\left(\frac{1}{3}+\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}+\frac{2}{3}-\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}\right)+$$

$+\frac{\lambda\alpha_k}{h}\le 0$. Данное неравенство приводится к неравенству $\kappa/h^2\ge 0$, которое выполняется всегда. При $z=1$ из (12) получаем неравенство

$$-2\left(\frac{\alpha_k\lambda}{2h}+\frac{\kappa}{h^2}\right)\left(-\frac{1}{3}-\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}+\frac{2}{3}-\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}\right)\le 0,$$

которое приводится к виду

$$\left(\kappa+\frac{\alpha_k\lambda h}{2}\right)\left(1-\alpha_k\frac{n-2}{n+2}\right)\ge 0. \quad (13)$$

Неравенство (13) связывает между собой параметры n, α_k и h и дает условия, при которых $\operatorname{Re}\omega(p)\le 0\ \ \forall p$. В частном случае, при $n=2$, из (13) получаем условие $\kappa+(\alpha_k\lambda h)/2\ge 0$, означающее, что в схеме (7) коэффициент при разностном диффузионном члене неотрицательный. Отметим, что с физической точки зрения такое условие вполне оправдано, поскольку наличие диссипации приводит к затуханию решений (в то время как отрицательный коэффициент при диффузионном члене приводит к неустойчивости и некорректности задач [6, 7, 14]). Отметим, что выбор n и α_k в виде (9) – (10) приводит к условию $\kappa+(\lambda h)^2/12\kappa\ge 0$, выполняемому всегда. Следовательно, при таких значениях параметров система (6) безусловно устойчива в указанном выше смысле. При $n=2$ для выполнения условия (13) достаточно, чтобы α_k и λ имели одинаковые знаки (и, в частности, этому условию удовлетворяет выбор α_k в виде $\coth(Pe\cdot h/2)-2/(Pe\cdot h)$).

Разностные схемы

Пусть на временном промежутке $[0;T]$ введена равномерная сетка с узлами $t_j=j\cdot\tau$, где τ – шаг по времени, $j=\overline{0,\ldots,M}$, $t_0=0$, $t_M=T$. Тогда от полудискретной аппроксимации (6) можно перейти к полностью дискретным (по времени и пространству) разностным схемам, заменив производные по времени разностными соотношениями, а для остальных членов использовав взвешенные аппроксимации (аппроксимации с весами) [13]. В результате получаем следующее семейство разностных схем ($0\le j\le M-1$, $1\le k\le N-1$):

$$\left(\frac{1}{6}+\alpha_k\frac{n+1}{3(n+2)}\right)\frac{y_{k-1}^{j+1}-y_{k-1}^{j}}{\tau}+\left(\frac{2}{3}-\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}\right)\frac{y_{k}^{j+1}-y_{k}^{j}}{\tau}+$$
$$+\left(\frac{1}{6}-\alpha_k\frac{n+4}{6(n+2)}\right)\frac{y_{k+1}^{j+1}-y_{k+1}^{j}}{\tau}+\frac{\lambda\sigma_1}{2h}\left(y_{k+1}^{j+1}-y_{k-1}^{j+1}\right)+$$
$$+\frac{\lambda(1-\sigma_1)}{2h}\left(y_{k+1}^{j}-y_{k-1}^{j}\right)-\frac{\alpha_k\lambda\sigma_2}{2h}\left(y_{k+1}^{j+1}-2y_{k}^{j+1}+y_{k-1}^{j+1}\right)-$$
$$-\frac{\alpha_k\lambda(1-\sigma_2)}{2h}\left(y_{k+1}^{j}-2y_{k}^{j}+y_{k-1}^{j}\right)-\frac{\kappa\sigma_3}{h^2}\left(y_{k+1}^{j+1}-2y_{k}^{j+1}+y_{k-1}^{j+1}\right)-$$
$$-\frac{\kappa(1-\sigma_3)}{h^2}\left(y_{k+1}^{j}-2y_{k}^{j}+y_{k-1}^{j}\right)=0. \qquad (14)$$

Здесь y есть неизвестной сеточной функцией – решением разностной схемы, которым аппроксимируется решение системы (6) и, соответственно, решение $u(x,\ t)$ исходной начально-краевой задачи, причем y_k^j обозначает аппроксимацию при $x=x_k$, $t=t_j$. Коэффициенты σ_1 и σ_3 служат весами при аппроксимации соответственно конвективного и диффузионного членов уравнения (1), коэффициент σ_2 – при аппроксимации члена с искусственной диффузией.

Выражение (14) можно переписать в следующем виде, удобном для применения метода трехточечной прогонки [13]:

$$-\widehat{a}_k y_{k-1}^{j+1}+\widehat{c}_k y_k^{j+1}-\widehat{b}_k y_{k+1}^{j+1}=f_k^j, \qquad (15)$$

где
$$f_k^j=a_k y_{k-1}^j+c_k y_k^j+b_k y_{k+1}^j,$$
$$\widehat{a}_k=-\frac{1}{6}-\alpha_k\frac{n+1}{3(n+2)}+\frac{\lambda\sigma_1\tau}{2h}+\frac{\alpha_k\lambda\sigma_2\tau}{2h}+\frac{\kappa\sigma_3\tau}{h^2},$$
$$\widehat{c}_k=\frac{2}{3}-\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}+\frac{\alpha_k\lambda\sigma_2\tau}{h}+\frac{2\kappa\sigma_3\tau}{h^2},$$
$$\widehat{b}_k=-\frac{1}{6}+\alpha_k\frac{n+4}{6(n+2)}-\frac{\lambda\sigma_1\tau}{2h}+\frac{\alpha_k\lambda\sigma_2\tau}{2h}+\frac{\kappa\sigma_3\tau}{h^2},$$
$$a_k=\frac{1}{6}+\alpha_k\frac{n+1}{3(n+2)}+\frac{\lambda\tau(1-\sigma_1)}{2h}+\frac{\alpha_k\lambda\tau(1-\sigma_2)}{2h}+\frac{\kappa\tau(1-\sigma_3)}{h^2},$$
$$c_k=\frac{2}{3}-\alpha_k\frac{n-2}{6(n+2)}-\frac{\alpha_k\tau\lambda(1-\sigma_2)}{h}-\frac{2\kappa\tau(1-\sigma_3)}{h^2},$$
$$b_k=\frac{1}{6}-\alpha_k\frac{n+4}{6(n+2)}-\frac{\lambda\tau(1-\sigma_1)}{2h}+\frac{\alpha_k\lambda\tau(1-\sigma_2)}{2h}+\frac{\kappa\tau(1-\sigma_3)}{h^2}.$$

Обозначим через $L_{h\tau}$ разностный оператор схемы (14). Тогда, используя разложения в ряды Тейлора (как и в предыдущем случае при нахождении погрешности аппроксимации ψ_h), находим, что погрешность $\psi_{h\tau}\equiv L_{h\tau}u-Lu$ аппроксимации в точке $(x_k, t_j+\tau/2)$ оператором $L_{h\tau}$ дифференциального оператора L уравнения (1) на его решении $u(x,t)$ выражается следующим образом:

$$\psi_{h\tau}=\sum_{m=2}^{10}A_m\frac{\partial^m u}{\partial x^m}+O(\tau^4+h^4), \qquad (16)$$

где коэффициенты A_m определяются соотношениями $A_2=-\lambda^2\tau\left(\sigma_1-\dfrac{1}{2}\right)$, $A_3=-\dfrac{\alpha_k h\kappa}{2}+$
$$+\lambda\kappa\tau\left(\sigma_1-\frac{1}{2}\right)-\frac{\lambda h^2\alpha_k(n-2)}{12(n+2)}+\frac{\alpha_k\lambda^2 h\tau}{2}\left(\sigma_2-\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\lambda\kappa\tau\left(\sigma_3-\frac{1}{2}\right)+\frac{\lambda^3\tau^2}{12},\ A_4=\frac{\kappa h^2}{12}+\frac{\kappa h^2\alpha_k(n-2)}{12(n+2)}-$$

$$-\frac{\tau\lambda^2}{6}\left(h^2+\frac{\tau^2\lambda^2}{4}\right)\left(\sigma_1-\frac{1}{2}\right)-\frac{\alpha_k\lambda h\tau\kappa}{2}\left(\sigma_2-\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\kappa^2\tau\left(\sigma_3-\frac{1}{2}\right)+\frac{\alpha_k\lambda h^3}{24}-\frac{\tau^2\lambda^2\kappa}{4}-\frac{\alpha_k h\tau^2\lambda^3}{24},$$

$$A_5=-\frac{\alpha_k\kappa h^3}{12}+\frac{\tau\lambda\kappa}{2}\left(\frac{h^2}{3}+\frac{\tau^2\lambda^2}{4}\right)\left(\sigma_1-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{\alpha_k h\lambda^2\tau}{24}\left(\frac{\lambda^2\tau^2}{2}+h^2\right)\left(\sigma_2-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{\tau\kappa\lambda}{12}\left(h^2+\frac{\tau^2\lambda^2}{2}\right)\left(\sigma_3-\frac{1}{2}\right)+\frac{\alpha_k\lambda^2\kappa\tau^2 h}{16}+$$

$$+\frac{\lambda^3\tau^2h^2}{72}-\frac{\lambda^3\tau^2h^2\alpha_k(n-2)}{288(n+2)}+\frac{\tau^2\kappa^2\lambda}{4},$$

$$A_6=-\frac{\kappa^3\tau^2}{12}-\frac{\kappa\tau^2h^2\lambda^2}{32}+\frac{\kappa\tau^2h^2\lambda^2\alpha_k(n-2)}{96(n+2)}-$$

$$-\frac{\tau^3\lambda^2}{8}\left(\kappa^2+\frac{\lambda^2h^2}{18}\right)\left(\sigma_1-\frac{1}{2}\right)-\frac{\alpha_k\lambda^3\tau^2h^3}{576}-$$

$$-\frac{\alpha_k\lambda h\kappa\tau}{8}\left(\frac{\lambda^2\tau^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\left(\sigma_2-\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\frac{\kappa^2\tau}{4}\left(\frac{\tau^2\lambda^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\left(\sigma_3-\frac{1}{2}\right),$$

$$A_7=-\frac{\alpha_k h\tau^2\kappa^3}{48}+\frac{\tau^3\lambda\kappa}{24}\left(\kappa^2+\frac{\lambda^2h^2}{2}\right)\left(\sigma_1-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{\alpha_k\lambda^2h\tau^3}{16}\left(\kappa^2+\frac{\lambda^2h^2}{36}\right)\left(\sigma_2-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{\kappa\tau^3\lambda}{8}\left(\kappa^2+\frac{\lambda^2h^2}{36}\right)\left(\sigma_3-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{\lambda\kappa^2\tau^2h^2}{48}-\frac{\lambda\kappa^2\tau^2h^2\alpha_k(n-2)}{96(n+2)},$$

$$A_8=-\frac{\kappa^3h^2\tau^2}{288}+\frac{\lambda\alpha_k\kappa^2\tau^2h^3}{192}+$$

$$+\frac{\kappa^3h^2\tau^2\alpha_k(n-2)}{288(n+2)}-\frac{\tau^3\lambda^2h^2\kappa^2}{48}\left(\sigma_1-\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\frac{\alpha_k\lambda h\tau^3\kappa}{48}\left(\kappa^2+\frac{\lambda^2h^2}{4}\right)\left(\sigma_2-\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\frac{\tau^3\kappa^2}{24}\left(\kappa^2+\frac{\lambda^2h^2}{4}\right)\left(\sigma_3-\frac{1}{2}\right),$$

$$A_9=-\frac{\kappa^3h^3\tau^2\alpha_k}{288}+\frac{h^2\tau^3\lambda\kappa^2}{192}\times$$

$$\times\left(\alpha_k\lambda h\left(\sigma_2-\frac{1}{2}\right)+2\kappa\left(\sigma_3-\frac{1}{2}\right)\right),$$

$$A_{10}=-\frac{h^2\tau^3\kappa^3}{576}\left(\alpha_k\lambda h\left(\sigma_2-\frac{1}{2}\right)+2\kappa\left(\sigma_3-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Положив формально в формуле (16) $\tau=0$, получаем, что выражение погрешности $\psi_{h\tau}$ с точностью до величин $O\left(h^4\right)$ совпадает с выражением ψ_h из (8). Из (16) следует, что при использовании симметричной схемы Кранка–Николсона ($\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=1/2$) и выборе параметров n и α_k в виде (9) – (10) схема (14) аппроксимирует уравнение (1) с точностью $\psi_{h\tau}=O(\tau^2+h^4)$, т.е. получаем схему повышенного порядка точности аппроксимации. В общем же случае, при других значениях весовых коэффициентов σ_1, σ_2 и σ_3 (и когда параметры n, α_k не совпадают со значениями (9)–(10)), погрешность аппроксимации $\psi_{h\tau}$ есть величиной $O(\tau+h)$, но в случае, когда $\alpha_k=O(h)$, получаем $\psi_{h\tau}=O(\tau+h^2)$.

Отметим, что для нелинейных задач с конвективными членами аппроксимирующая разностная схема может оказаться нелинейной, что приведет к необходимости использования соответствующих методов [17–20] нахождения решения нелинейных систем.

Исследуем поведение системы (14) методом Фурье (коэффициенты системы считаем *замороженными* [17, 16, 14]). Для этого ищем частные решения системы (14) в виде гармоник $y_k^j=q^je^{ikhp}$, где $q=q(p)$ – некоторое подлежащее определению комплексное число (множитель перехода со слоя на слой), i – комплексная единица ($i=\sqrt{-1}$), p – произвольное действительное число (частота гармоники). Подставляя $y_k^j=q^je^{ikhp}$ в (14), сокращая полученное выражение на q^je^{ikhp} и используя формулы Эйлера для выражений $e^{\pm ihp}$, получаем $q(p) = A/B$, где A и B определяются выражениями:

$$A \equiv \left(\frac{1}{3} + \alpha_k \frac{n-2}{6(n+2)} + \frac{\alpha_k \lambda\tau(1-\sigma_2)}{h} + \frac{2\kappa\tau(1-\sigma_3)}{h^2}\right) \times$$

$$\times \cos(hp) + \frac{2}{3} - \alpha_k \frac{n-2}{6(n+2)} -$$

$$- \frac{\alpha_k \lambda\tau(1-\sigma_2)}{h} - \frac{2\kappa\tau(1-\sigma_3)}{h^2} -$$

$$- \left(\frac{\lambda\tau(1-\sigma_1)}{h} + \frac{\alpha_k}{2}\right) i \sin(hp),$$

$$B \equiv \left(\frac{1}{3} + \alpha_k \frac{n-2}{6(n+2)} - \frac{\alpha_k \lambda \sigma_2 \tau}{h} - \frac{2\kappa\sigma_3\tau}{h^2}\right) \times$$

$$\times \cos(hp) + \frac{2}{3} - \alpha_k \frac{n-2}{6(n+2)} +$$

$$+ \frac{\alpha_k \lambda\sigma_2\tau}{h} + \frac{2\kappa\sigma_3\tau}{h^2} + \left(\frac{\lambda\sigma_1\tau}{h} - \frac{\alpha_k}{2}\right) i \sin(hp).$$

Из данного соотношения, использовав замену $z \equiv \sin^2(hp/2)$, получаем следующее неравенство, эквивалентное неравенству $|q| \le 1$ (спектральное условие Неймана [8, 13, 14]):

$$(z-1)(2\tilde{A} + \tilde{C})\tilde{C} + (1-z)\tilde{D} - (\tilde{B} - \tilde{A} - \tilde{C})\tilde{C} \le 0, \quad (17)$$

где выражения $\tilde{A} \equiv \frac{1}{3} + \alpha_k \frac{n-2}{6(n+2)} - \frac{\alpha_k \lambda \sigma_2 \tau}{h} - \frac{2\kappa\sigma_3\tau}{h^2}$, $\tilde{B} \equiv \frac{2}{3} - \alpha_k \frac{n-2}{6(n+2)} + \frac{\alpha_k \lambda\sigma_2\tau}{h} + \frac{2\kappa\sigma_3\tau}{h^2}$,

$$\tilde{C} \equiv \frac{\alpha_k \tau\lambda}{h} + \frac{2\tau\kappa}{h^2}, \qquad \tilde{D} \equiv \left(\alpha_k + \frac{\lambda\tau(1-2\sigma_1)}{h}\right)\frac{\lambda\tau}{h}.$$

Поскольку $0 \le z \le 1$ (когда p пробегает значения действительной оси) и неравенство (17) линейно относительно z, его выполнение для всех $z \in [0;1]$ эквивалентно выполнению в граничных точках $z = 0$ и $z = 1$. Из (17) при $z = 0$ получаем неравенство

$$\kappa + \lambda^2\tau\left(\sigma_1 - \frac{1}{2}\right) \ge 0, \quad (18)$$

а при $z = 1$ – неравенство

$$\left(\kappa + \frac{\alpha_k \lambda h}{2}\right)\left(\frac{1}{3} - \alpha_k \frac{n-2}{3(n+2)} + \frac{2\alpha_k \lambda\tau}{h}\left(\sigma_2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{4\kappa\tau}{h^2}\left(\sigma_3 - \frac{1}{2}\right)\right) \ge 0. \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует, что при $\sigma_1 \ge 1/2$, $\sigma_2 \ge 1/2$, $\sigma_3 \ge 1/2$ и выборе параметров n и α_k в виде соотношений (9) – (10) схемы (14) –(15) абсолютно устойчивы. При $n = 2$ и $\sigma_1 \ge 1/2$, $\sigma_2 \ge 1/2$, $\sigma_3 \ge 1/2$, для выполнения условий (18) – (19) достаточно, чтобы α_k и λ имели одинаковые знаки.

Замечание 5. При $\tau = 0$ неравенства (18) и (19) переходят в неравенства $\kappa \ge 0$ и (13) соответственно – данные неравенства получались при анализе устойчивости методом Фурье полудискретной системы (6).

Исследуем равномерную сходимость схемы (14) с помощью сеточного принципа максимума [13]. Для этого найдем оценки сеточной функции погрешности $z \equiv y - u$ в равномерной (чебышевской) норме $\left\| z^j \right\|_C \equiv \max\limits_{0<k<N} \left| z_k^j \right|$ (здесь $z^j \equiv \{z_k^j\}_{k=1}^{N-1}$ – вектор значений функции z на временном слое $t = t_j$). Подставляя $y = z + u$ в (14), получим разностную задачу, которая выглядит так:

$$-\hat{a}_k z_{k-1}^{j+1} + \hat{c}_k z_k^{j+1} - \hat{b}_k z_{k+1}^{j+1} = f_k^j, \quad (20)$$

где $f_k^j = a_k z_{k-1}^j + c_k z_k^j + b_k z_{k+1}^j - \tau\psi_{h\tau}(x_k, t_j)$ и $z_k^0 = 0$, $z_0^j = z_N^j = 0$ (поскольку предполагаем, что начальное и граничные условия аппроксимируются точно).

Утверждение 1. Пусть z – решение задачи (20). Тогда:

а) если $d_k \equiv |\hat{c}_k| - |\hat{a}_k| - |\hat{b}_k| > 0$ при $1 \le k \le N-1$, то справедлива оценка $\left\| z^{j+1} \right\|_C \le \left\| f^j / d \right\|_C$ (где вектор $f^j / d = \{f_k^j / d_k\}_{k=1}^{N-1}$), причем при неотрицательных $\hat{a}_k$ и $\hat{b}_k$ будет $d_k = 1$;

б) если $a_k \ge 0$, $b_k \ge 0$, $c_k \ge 0$, то $\left\| f^j \right\|_C \le \left\| z^j \right\|_C + \tau \left\| \psi_{h\tau}^j \right\|_C$;

в) при $\hat{a}_k \ge 0$, $\hat{b}_k \ge 0$, $a_k \ge 0$, $b_k \ge 0$, $c_k \ge 0$

имеют место оценки $\left\| z^{j+1} \right\|_C \le \left\| z^j \right\|_C + \tau \left\| \psi_{h\tau}^j \right\|_C$ и $\left\| z^{j+1} \right\|_C \le \sum\limits_{m=0}^{j} \tau \left\| \psi_{h\tau}^m \right\|_C$.

Доказательство:

а) пусть $\left| z_{k_0}^{j+1} \right| = \max\limits_{0<k<N} \left| z_k^{j+1} \right|$, где $0<k_0<N$, тогда имеем неравенства $\left| \widehat{c}_{k_0} \right| \cdot \left| z_{k_0}^{j+1} \right| \le \left| \widehat{a}_{k_0} \right| \cdot \left| z_{k_0-1}^{j+1} \right| + \left| \widehat{b}_{k_0} \right| \cdot \left| z_{k_0+1}^{j+1} \right| + \left| f_{k_0}^j \right| \le \left| \widehat{a}_{k_0} \right| \cdot \left| z_{k_0}^{j+1} \right| + \left| \widehat{b}_{k_0} \right| \cdot \left| z_{k_0}^{j+1} \right| + \left| f_{k_0}^j \right|$, из которых сразу получаем $d_{k_0} \left| z_{k_0}^{j+1} \right| \le \left| f_{k_0}^j \right|$, или же, поскольку $d_{k_0} > 0$, $\left| z_{k_0}^{j+1} \right| \le \left| f_{k_0}^j \right| / d_{k_0}$. Из последнего неравенства имеем $\left\| z^{j+1} \right\|_C = \left| z_{k_0}^{j+1} \right| \le \left| f_{k_0}^j \right| / d_{k_0} \le \left\| f^j / d \right\|_C$. Далее, поскольку $\widehat{c}_k = 1 + \widehat{a}_k + \widehat{b}_k$, то при $\widehat{a}_k \ge 0$ и $\widehat{b}_k \ge 0$ получаем $\widehat{c}_k > 0$ и $d_k = \widehat{c}_k - \widehat{a}_k - \widehat{b}_k = 1$.

б) при любом k, $0 < k < N$, учитывая что $a_k + b_k + c_k = 1$, получаем неравенства $\left| f_k^j \right| \le a_k \left| z_{k-1}^j \right| + c_k \left| z_k^j \right| + b_k \left| z_{k+1}^j \right| + \tau \left| \psi_{h\tau}(x_k, t_j) \right| \le \left(a_k + b_k + c_k \right) \left\| z^j \right\|_C + \tau \left\| \psi_{h\tau}^j \right\|_C = \left\| z^j \right\|_C + \tau \left\| \psi_{h\tau}^j \right\|_C$. Поскольку правая часть неравенства не зависит от k, то справедливо неравенство $\left\| f^j \right\|_C \le \left\| z^j \right\|_C + \tau \left\| \psi_{h\tau}^j \right\|_C$.

в) справедливость неравенства $\left\| z^{j+1} \right\|_C \le \left\| z^j \right\|_C + \tau \left\| \psi_{h\tau}^j \right\|_C$ вытекает из пунктов а) и б) утверждения. Итеративно применяя последнее неравенство само к себе, получаем неравенство $\left\| z^{j+1} \right\|_C \le \sum\limits_{m=0}^{j} \tau \left\| \psi_{h\tau}^m \right\|_C$. Утверждение доказано.

Из пункта в) утверждения 1 следует равномерная сходимость схем (14) – (15) с порядком точности, равным порядку точности погрешности локальной аппроксимации $\psi_{h\tau}$.

Замечание 6. Из справедливости условий п. а) утверждения 1 следует устойчивость метода трехточечной прогонки [13] для системы (15).

Приложение. Вывод формулы (8).

$$
\begin{aligned}
\psi_h &= \left(\frac{1}{6} + \alpha_k \frac{n+1}{3(n+2)} \right) \dot{u}_{k-1} + \left(\frac{2}{3} - \alpha_k \frac{n-2}{6(n+2)} \right) \dot{u}_k + \left(\frac{1}{6} - \alpha_k \frac{n+4}{6(n+2)} \right) \dot{u}_{k+1} + \\
&+ \frac{\lambda}{2h} \left(u_{k+1} - u_{k-1} \right) - \frac{\kappa + (\alpha_k \lambda h / 2)}{h^2} \left(u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1} \right) - \left. \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right|_{x=x_k} = \\
&= \left(\frac{1}{6} + \alpha_k \frac{n+1}{3(n+2)} \right) \left(\dot{u}_k - h \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \dot{u}_k}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 \dot{u}_k}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 \dot{u}_k}{\partial x^4} - \frac{h^5}{120} \frac{\partial^5 \dot{u}_k}{\partial x^5} + O(h^6) \right) + \\
&+ \left(\frac{1}{6} - \alpha_k \frac{n+4}{6(n+2)} \right) \left(\dot{u}_k + h \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \dot{u}_k}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 \dot{u}_k}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 \dot{u}_k}{\partial x^4} + \frac{h^5}{120} \frac{\partial^5 \dot{u}_k}{\partial x^5} + O(h^6) \right) + \\
&+ \left(\frac{2}{3} - \alpha_k \frac{n-2}{6(n+2)} \right) \dot{u}_k + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x} + \lambda \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u_k}{\partial x^3} + \lambda \frac{h^4}{120} \frac{\partial^5 u_k}{\partial x^5} + O(h^6) - \left(\kappa + \frac{\alpha_k \lambda h}{2} \right) \times \\
&\times \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u_k}{\partial x^4} + \frac{h^4}{360} \frac{\partial^6 u_k}{\partial x^6} + O(h^6) \right) - \dot{u}_k - \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x} + \kappa \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = -\frac{\alpha_k h}{2} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x} + \\
&+ \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{3} + \alpha_k \frac{n-2}{6(n+2)} \right) \frac{\partial^2 \dot{u}_k}{\partial x^2} - \frac{\alpha_k h^3}{12} \frac{\partial^3 \dot{u}_k}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \left(\frac{1}{3} + \alpha_k \frac{n-2}{6(n+2)} \right) \frac{\partial^4 \dot{u}_k}{\partial x^4} - \frac{\alpha_k h^5}{240} \frac{\partial^5 \dot{u}_k}{\partial x^5} - \\
&- \frac{\alpha_k \lambda h}{2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\lambda h^2}{6} \frac{\partial^3 u_k}{\partial x^3} + \frac{\lambda h^4}{120} \frac{\partial^5 u_k}{\partial x^5} - \left(\kappa + \frac{\alpha_k \lambda h}{2} \right) \left(\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u_k}{\partial x^4} + \frac{h^4}{360} \frac{\partial^6 u_k}{\partial x^6} \right) + O(h^6) = \\
&= -\left(\frac{\alpha_k \kappa h}{2} + \frac{\alpha_k \lambda h^2 (n-2)}{12(n+2)} \right) \frac{\partial^3 u_k}{\partial x^3} + \left(\frac{\kappa h^2}{12} + \frac{\alpha_k \lambda h^3}{24} + \frac{\kappa h^2 \alpha_k (n-2)}{12(n+2)} \right) \frac{\partial^4 u_k}{\partial x^4} - \frac{\alpha_k \kappa h^5}{240} \frac{\partial^7 u_k}{\partial x^7} - \\
&- \left(\frac{\alpha_k \kappa h^3}{12} + \frac{\lambda h^4}{180} + \frac{\lambda h^4 \alpha_k (n-2)}{144(n+2)} \right) \frac{\partial^5 u_k}{\partial x^5} + \left(\frac{\kappa h^4}{90} + \frac{\alpha_k \lambda h^5}{360} + \frac{\kappa h^4 \alpha_k (n-2)}{144(n+2)} \right) \frac{\partial^6 u_k}{\partial x^6} + O(h^6).
\end{aligned}
$$

Гладкость функции $u(x,t)$ предполагаем достаточной для существования выписанных разложений в ряды Тейлора. Также при выводе используются соотношения $\dfrac{\partial^j \dot{u}_k}{\partial x^j} = \left. \dfrac{\partial^j}{\partial x^j} \left(\dfrac{\partial u}{\partial t} \right) \right|_{x=x_k} = -\lambda \dfrac{\partial^{j+1} u_k}{\partial x^{j+1}} + \kappa \dfrac{\partial^{j+2} u_k}{\partial x^{j+2}}$, непосредственно следующие из уравнения (1).

Заключение. Предложен новый класс весовых функций МКЭ Петрова–Галеркина, позволяющий более гибко (в сравнении с существующими вариантами данного метода, с использованием кусочно-полиномиальных весовых функций) влиять на структуру погрешности разностных уравнений при аппроксимации линейных одномерных задач конвекции–диффузии. Это, в свою очередь, позволяет за счет выбора настроечных параметров в весовых функциях добиться более высокой точности в получаемом численном решении. Отметим, что предложенный класс включает в себя стандартные кусочно-полиномиальные весовые функции как частные случаи, получающиеся при специальном выборе настроечных параметров. Построены численные аппроксимации в виде СОДУ и семейств разностных схем с весами, исследованы их локальные погрешности и поведение решений в виде дискретных гармоник, найдены условия, при которых эти гармоники – невозрастающие (а решения, соответственно, устойчивы). Для разностных схем найдены условия, при которых имеет место равномерная сходимость.

В дальнейшем предполагается обобщение предложенных весовых функций на многомерные случаи и более общие уравнения (в особенности, уравнения конвекции–диффузии–реакции и нелинейные уравнения типа Бюргерса), а также изучение влияния приема сосредоточения [12] на численные схемы с такими весовыми функциями.

1. *Дейнека В.С.*, *Сергиенко И.В.*, *Скопецкий В.В.* Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями. – К.: Наук. думка, 1995. – 262 с.
2. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
3. *Roos H.-G.*, *Stynes M.*, *Tobiska L.* Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 604 p.
4. *Fries T.P.*, *Matthies H.G.* A Review of Petrov–Galerkin Stabilization Approaches and an Extension to Meshfree Methods. – Brunswick: Technische Universität Braunschweig, Informatikbericht-Nr., 2004. – 71 p.
5. *Zienkiewicz O.Z.*, *Taylor R.L.* The Finite Element Method. V. 1: The Basis. – Oxford: Butterworth–Heinemann, 2000. – 690 p.
6. *Ладиков-Роев Ю.П.*, *Черемных О.К.* Математические модели сплошных сред. – К.: Наук. думка, 2010. – 551 с.
7. *Тихонов А.Н.*, *Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
8. *Finlayson B.A.* Numerical methods for problems with moving fronts. – Seattle, Washington USA: Ravenna Park Publ., Inc., 1992. – 613 p.
9. *Сальников Н.Н.*, *Сирик С.В.*, *Терещенко И.А.* О построении конечномерной математической модели процесса конвекции–диффузии с использованием метода Петрова–Галеркина // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 3. – С. 94–109.
10. *Сирик С.В.*, *Сальников Н.Н.* Численное интегрирование уравнения Бюргерса методом Петрова–Галеркина с адаптивными весовыми функциями // Там же. – 2012. – № 1. – С. 94–110.
11. *Молчанов А.А.*, *Сирик С.В.*, *Сальников Н.Н.* Выбор весовых функций в методе Петрова–Галеркина для интегрирования двумерных нелинейных уравнений типа Бюргерса // Математические машины и системы. – 2012. – № 2. – С. 136–144.
12. *Сирик С.В.* Анализ применения сосредоточенных аппроксимаций в методе конечных элементов при решении задач конвекции–диффузии // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 5. – С. 152–163.
13. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
14. *Основи* математичного моделювання в екології / А.В. Гладкий, І.В. Сергієнко, В.В. Скопецький та ін. – К.: НТУУ «КПІ», 2009. – 240 с.
15. *Griffiths D.F.*, *Lorenz J.* An analysis of the Petrov–Galerkin finite element method // Comp. Methods in Applied Mechanics and Engin. – 1978. – **14**. – P. 39–64.
16. *Рихтмайер Р.*, *Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
17. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
18. *Ортега Дж.*, *Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 563 с.
19. *Михеев С.Е.*, *Михеев В.С.* Точная релаксация с учетом невязки // Вычислительные технологии. – 2009. – Т. 14, № 2. – С. 74–84.
20. Михеев С.Е. Применение полупроизводной в численном анализе // ЖВММФ. – 2008. – Т. 48, № 1. – С. 3–17.

Поступила 03.12.2013

Тел. для справок: +38 067 662-2595, +38 095 575-6543 (Киев)
E-mail: *accandar@gmail.com*, *salnikov.nikolai@gmail.com*

●