УДК 65.012.122

А.И. Иванешкин

Ситуационное управление ресурсами узла информационной сети с переменным во времени числом активных устройств обслуживания

Описана работа узла информационной сети, формализованная многоканальной управляемой системой массового обслуживания с потерями, переменным во времени числом активных устройств, ситуационными условиями их подключения и отключения. Получены явного вида аналитические выражения стационарных вероятностей состояний системы, участвующих в поиске основных функциональных характеристик и оптимизации работы узла.

Ключевые слова: ситуационное управление, система массового обслуживания, переменное число устройств, пороги.

Описано роботу вузла інформаційної мережі, формалізованої багатоканальною керованою системою масового обслуговування з втратами, змінною в часі кількістю активних пристроїв, ситуаційними умовами їх підключення і відключення. Отримано явного вигляду аналітичні вирази стаціонарних імовірностей станів системи, що беруть участь у пошуку основних функціональних характеристик і оптимізації роботи вузла.

Ключові слова: ситуаційне управління, система масового обслуговування, змінна кількість пристроїв, пороги.

Введение. Переход мирового сообщества к постиндустриальному (информационному) типу, связанный с этим фактом рост объемов получаемой, хранимой и активно используемой информации, способствовали повышению значимости информационного обмена и обеспечения, созданию и повсеместному внедрению различного рода информационных сетей и систем. В то же время интеграция достижений в области информационных технологий с универсальной (цифровой) формой представления информации привела к необходимости коллективного использования средств ее хранения, обработки и передачи, сделав многоканальность основной чертой преобладающего большинства входящих в структуру сетей компонентов (узлы, каналы связи). При этом стохастическая природа происходящих в узлах процессов приводит к тому, что количество устройств, принимающих в каждый момент времени t $(0 < t)$ участие в обслуживании сообщений (пакетов, заявок), равно как и число каналов, обеспечивающих их передачу, не является постоянным, а ограниченность технических ресурсов узла становится причиной возникающих перегрузок средств временного хранения, влекущей за собой потери.

Кроме сетей, указанные свойства присущи значительному количеству технических систем (автоматизированные системы управления техническим производством, запасами, техническим обслуживанием и др.). Сходство происходящих в таких объектах процессов и возможность их формализованного описания аналогичными системами массового обслуживания (СМО), значительно расширяет сферу применения последних, делая актуальной разработку и исследование более общего типа моделей, наделенных способностью многопараметрической настройки (адаптации) под постоянно изменяющиеся условия работы.

Модели, рассматривавшие отдельные варианты указанной ситуации, описаны в [1, 2] и приведенных в них литературных ссылках. При этом буфер имел конечный объем R, минимальное число обслуживающих устройств n (при общем количестве $N < \infty$) удовлетворяло условию $1 \le n < N$, поводом к подключению любого из $N - n - 1$ свободных устройств служило накопление в очереди фиксированного, конечного числа r $(0 < r < \infty)$ заявок, а к отключению – отсутствие заявок в очереди. Исследованная в [2] многоканальная СМО учла наличие различных пороговых значений длины очереди заявок r_q $(n \le q \le N - 1,\ 0 < r_q < \infty,\ r_q \le r_{q+1})$, достижение которых приводит к подключению очередного устройства из числа свободных.

Введя связь каждого r_q с текущей длиной очереди и количеством занятых устройств, учтя конечный буфер и наличие в системе потерь, а также позволив выписать явные выражения для стационарных вероятностей состояний, модель, однако, сохранила существенное ограничение, заметно сужающее область своего практического применения. Как и в [1], это ограничение состояло в едином для всех q ($n \le q \le N$), занятых обслуживанием устройств, условии отключения от процесса обслуживания – отсутствие стоящих в очереди заявок.

В статье приведены результаты исследований значительно более общего случая, не сводимого к рассмотренным в [1, 2] вариантам многоканальной СМО. Причиной несведения есть различное число входящих в формируемые системы уравнений и вид части из них, исключающий возможность взаимного преобразования в случае равенства нулю значений отдельных параметров.

Цель работы

Поиск явного вида стационарных вероятностей состояний исследуемой СМО, играющих основную роль при анализе информационно-технических характеристик, описываемых с ее помощью объектов, и решении задач многопараметрической оптимизации.

В статье использованы пуассоновские и эрланговские законы распределения случайных величин, которые в сравнении с реальными, как правило, дают несколько завышенные оценки. Несмотря на этот факт, в различных научных изданиях продолжают появляться статьи с указанной особенностью, поскольку завышенность оценок обеспечивает некоторый запас *прочности* результатов, а наличие явных аналитических выражений дает ощутимое преимущество как при моделировании процессов функционирования исследуемых объектов, так и при оптимизации их работы.

Описание системы

Работа узла сети описывается управляемой многоканальной системой массового обслуживания (УСМО) типа $E_r/M/N/R$ с потерями, эрланговским r-фазным ($1 < r$) входящим потоком заявок с параметром λ, показательным законом распределения времен их обслуживания с параметром μ и буфером (буферным пулом) конечного объема R ($R < \infty$). В состав системы входит конечное число N ($1 < N$) однотипных, абсолютно надежных устройств обслуживания, из которых n ($1 \le n < N$) находятся в режиме *горячей* готовности. Это значит, что если общее число m, находящихся в системе заявок, удовлетворяет условию $m \le n$, то все они обслуживаются, а очередные $n - m$ поступивших заявок будут немедленно приняты на обслуживание, минуя постановку в очередь, которая в данном случае будет отсутствовать. Занятость n устройств приводит к образованию очереди и приходящие в систему заявки становятся в ее конец. Обслуживание заявок n устройствами будет продолжаться до тех пор, пока очередь не исчезнет или пока по мере роста ее длина не достигнет первого порогового значения $R_n + 1$ ($0 < R_n$). Во втором случае к обслуживанию заявок из очереди немедленно подключится любое из ($N - n$) свободных устройств. Выбор заявки из очереди на обслуживание к подключаемому устройству определяется дисциплиной *FIFO* (*FCFS*) [3], а поступившее сообщение помещается в конец очереди на последнее R_n-е место. При общем числе $n + q$ ($1 \le q \le N - 1 - n$) занятых устройств, подключение к процессу обслуживания, ожидающих в очереди заявок, одного из $N - 1 - (n + q)$ свободных произойдет в момент времени достижения очередью фиксированного порогового значения $R_{n+q} + 1$, величина которого определяется исключительно значением $n + q$. Все $N - 1 - n$ пороговые значения упорядочены ($R_{n+q} < R_{n+q+1}$) и удовлетворяют условиям $2 < R_{n+q+1} - R_{n+q}$. Как следует из сказанного выше, $R_q = 0$ ($1 \le q < n$). Если все N входящих в состав УСМО устройств заняты и очередь имеет максимально возможную длину $R_N = R$ ($R_{n+q} < R_N$, $1 \le q \le N - 1 - n$), поступающие в систему заявки теряются.

По мере уменьшения очереди, совместное обслуживание заявок $n + q$ ($1 \le q \le N - n$) устройствами будет продолжаться до момента достижения очередью значения D_{n+q-1} ($D_{n+q-1} < R_{n+q-1} < D_{n+q} < R_{n+q}$, $D_r = 0$ при $1 \le r \le n - 1$). После этого первое освободившееся устройство отключится, а процесс обслуживания продолжится $n + q - 1$ устройствами. Это значит, что при $n + q$ $(1 \le q \le N - n)$ занятых обслуживанием устройствах, число ждущих в очереди заявок не может превышать R_{n+q} (по причине неизбежности подключения к работе любого из свободных устройств) и не может быть меньше D_{n+q-1} (из-за перехода освобождающегося устройства в группу временно не занятых обслуживанием). Очевидно, что $\{D_{n+q}\}_q$, также упорядочены.

Если приход новых заявок в моменты времени $\{t_k\}_k$ увеличивает очередь, подключение свободных устройств происходит по описанному выше сценарию с ориентацией на соответствующие пороговые значения $\{R_{n+q}\}_q$. При i $(i < n)$ занятых устройствах очередь отсутствует и отключение освобождающихся, как и подключение любых из $n - i$, находящихся в режиме *горячей* готовности, происходит согласно ранее описанной схеме.

Процесс функционирования узла сети является случайным, регулярным марковским процессом $\xi(t) = i(t), j(t), d(t)\}$ с конечным, не приводимым и не разложимым фазовым пространством состояний (ФПС) [4] $H = \{\alpha\}$ $\{\alpha = (i, j, d)\}$, общее количество состояний D которого определяется следующим образом:

$$D = \dim(H) = r(n + \sum_{q=n}^{N}(R_q - D_{q-1} + 1)), (D_{n-1} \equiv 0).$$

При этом компоненты $i = i(t)$ $(0 \le i \le N)$, $j = j(t)$ $(0 \le j \le R)$ *и* $d = d(t)$ $(0 \le d \le r - 1)$ принимают целочисленные (более точно – натуральные) значения и, соответственно, означают общее количество устройств, занятых обслуживанием, общее число образующих очередь заявок, а также номер фазы поступающего в систему сообщения в момент времени наблюдения t.

Определяя $P_{i,j,d}(t) = P\{i(t) = i,\ j(t) = j,\ d(t) = d\}$ как вероятность того, что в момент времени t исследуемая УСМО пребывает в состоянии (i, j, d), необходимо отметить, что присутствие фактора многофазности в поступлении заявок вносит дополнительную специфику в процедуру формирования, соответствующей рассматриваемому случаю, системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) гибели–размножения [3], существенно усложняя процесс ее решения с целью определения явного вида выражений для стационарных вероятностей состояний $P_{i,j,d} = \lim_{t\to\infty}\left(P\{i(t), j(t), d(t)\}\right)$.

Учитывая многофазность поступления заявок, особенности переходов $\xi(t)$ и полагая $\sigma_m = \dfrac{m\mu}{\lambda} = m\sigma_1\left(\rho_m = \dfrac{1}{\sigma_m}\right)$ $(1 \le m \le N,\ \sigma_0 = 0)$, определим значения указанных вероятностей в момент времени $t+\Delta t$. Группируя подобные слагаемые, разделим все на Δt. Устремив $\Delta t \to 0$ и, учитывая, что в интересующем нас эргодическом случае $\lim_{t\to\infty}\dfrac{dP_{i,j,d}(t)}{dt} = 0$, сформируем СЛАУ в наиболее удобном для практического использования виде, объединив уравнения в группы:

Случай $i = 0$:

$$P_{0,0,0} = \sigma_1 P_{1,0,0};\ i = 0, j = 0,\ d = 0; \quad (1)$$

$$P_{0,0,d} = P_{0,0,d-1} + \sigma_1 P_{1,0,d};\ i = 0, j = 0,\ 1 \le d \le r - 1;$$

Случай $1 \le i \le n - 1$:

$$(1+\sigma_i)P_{i,0,0} = P_{i-1,0,r-1} + \sigma_{i+1}P_{i+1,0,0};$$
$$1 \le i \le n - 1, j = 0, d = 0; \quad (2)$$

$$(1+\sigma_i)P_{i,0,d} = P_{i,0,d-1} + \sigma_{i+1}P_{i+1,0,d};$$
$$1 \le i \le n - 1, j = 0, 1 \le d \le r - 1.$$

Случай $i = n$:

$$(1+\sigma_n)P_{n,0,0} = P_{n-1,0,r-1} + \sigma_n P_{n,1,0};\ j = 0,\ d = 0; \quad (3)$$

$$(1+\sigma_n)P_{n,0,d} = P_{n,0,d-1} + \sigma_n P_{n,1,d};\ j = 0,\ 1 \le d \le r - 1;$$

$$(1+\sigma_n)P_{n,j,0} = P_{n,j-1,r-1} + \sigma_n P_{n,j+1,0};$$
$$1 \le j \le D_n - 1,\ d = 0; \quad (4)$$

$$(1+\sigma_n)P_{n,j,d} = P_{n,j,d-1} + \sigma_n P_{n,j+1,d};$$
$$1 \le j \le D_n - 1,\ 1 \le d \le r - 1;$$

$$(1+\sigma_n)P_{n,D_n,0} = P_{n,D_n-1,r-1} + \sigma_n P_{n,D_n+1,0} + \sigma_{n+1} P_{n+1,D_n,0};$$
$$j = D_n,\ d = 0; \quad (5)$$

$$(1+\sigma_n)P_{n,D_n,d} = P_{n,D_n,d-1} + \sigma_n P_{n,D_n+1,d} + \sigma_{n+1} P_{n+1,D_n,d};$$
$$j = D_n,\ 1 \le d \le r - 1;$$

$$(1+\sigma_n)P_{n,j,0} = P_{n,j-1,r-1} + \sigma_n P_{n,j+1,0};$$
$$D_n + 1 \le j \le R_n - 1,\ d = 0; \quad (6)$$

$$(1+\sigma_n)P_{n,j,d} = P_{n,j,d-1} + \sigma_n P_{n,j+1,d};$$

$$D_n + 1 \le j \le R_n - 1,\ 1 \le d \le r - 1;$$

$$(1+\sigma_n)\, P_{n,R_n,0} = P_{n,R_n-1,r-1};\ j = R_n,\ d = 0; \quad (7)$$

$$(1+\sigma_n)\, P_{n,R_n,d} = P_{n,R_n,d-1};\ j = R_n,\ 1 \le d \le r - 1.$$

Случай $n + 1 \le i \le N - 1$:

$P_{i,j,d} = 0$; (из-за отключения устройства).

$$0 \le j \le D_{i-1} - 1,\ 0 \le d \le r - 1; \quad (8)$$

$$(1+\sigma_i)\, P_{i,D_{i-1},0} = \sigma_i P_{i,D_{i-1}+1,0};\ j = D_{i-1},\ d = 0; \quad (9)$$

$$(1+\sigma_i)\, P_{i,D_{i-1},d} = P_{i,D_{i-1},d-1} + \sigma_i P_{i,D_{i-1}+1,d};$$
$$j = D_{i-1},\ 1 \le d \le r - 1;$$

$$(1+\sigma_i) P_{i,j,0} = P_{i,j-1,r-1} + \sigma_i P_{i,j+1,0};$$
$$D_{i-1}+1 \le j \le R_{i-1} - 1,\ d = 0; \quad (10)$$

$$(1+\sigma_i) P_{i,j,d} = P_{i,j,d-1} + \sigma_i P_{i,j+1,d};$$
$$D_{i-1} + 1 \le j \le R_{i-1} - 1,\ 1 \le d \le r - 1;$$

$$(1+\sigma_i)\, P_{i,R_{i-1},0} = P_{i-1,R_{i-1},r-1} + P_{i,R_{i-1}-1,r-1} + \sigma_i P_{i,R_{i-1}+1,0};$$
$$j = R_{i-1},\ d = 0; \quad (11)$$

$$(1+\sigma_i)\, P_{i,R_{i-1},d} = P_{i,R_{i-1},d-1} + \sigma_i P_{i,R_{i-1}+1,d};$$
$$j = R_{i-1},\ 1 \le d \le r - 1;$$

$$(1+\sigma_i) P_{i,j.0} = P_{i,j-1,r-1} + \sigma_i P_{i,j+1,0};$$
$$R_{i-1} + 1 \le j \le D_i - 1,\ d = 0; \quad (12)$$

$$(1+\sigma_i) P_{i,j,d} = P_{i,j,d-1} + \sigma_i P_{i,j+1,d};$$
$$R_{i-1} + 1 \le j \le D_i - 1,\ 1 \le d \le r - 1;$$

$$(1+\sigma_i)\, P_{i,D_i,0} = P_{i,D_i-1,r-1} + \sigma_i P_{i,D_i+1,0} + \sigma_{i+1} P_{i+1,D_i,0};$$
$$j = D_i,\ d = 0; \quad (13)$$

$$(1+\sigma_i)\, P_{i,D_i,d} = P_{i,D_i,d-1} + \sigma_i P_{i,D_i+1,d} + \sigma_{i+1} P_{i+1,D_i,d};$$
$$j = D_i,\ 1 \le d \le r - 1;$$

$$(1+\sigma_i) P_{i,j,0} = P_{i,j-1,r-1} + \sigma_i P_{i,j+1,0};$$
$$D_i + 1 \le j \le R_i - 1,\ d = 0; \quad (14)$$

$$(1+\sigma_i) P_{i,j,d} = P_{i,j,d-1} + \sigma_i P_{i,j+1,d};$$
$$D_i + 1 \le j \le R_i - 1,\ 1 \le d \le r - 1;$$

$$(1+\sigma_i)\, P_{i,R_i,0} = P_{i,R_i-1,r-1};\ j = R_i,\ d = 0; \quad (15)$$

$$(1+\sigma_i)\, P_{i,R_i,d} = P_{i,R_i,d-1};\ j = R_i,\ 1 \le d \le r - 1.$$

Случай $i = N$:

$P_{N,j,d} = 0$; (из-за отключения устройства).

$$0 \le j \le D_{N-1} - 1,\ 0 \le d \le r - 1; \quad (16)$$

$$(1+\sigma_N)\, P_{N,D_{N-1},0} = \sigma_N P_{N,D_{N-1}+1,0};$$
$$j = D_{N-1},\ d = 0; \quad (17)$$

$$(1+\sigma_N)\, P_{N,D_{N-1},d} = P_{N,D_{N-1},d-1} + \sigma_N P_{N,D_{N-1}+1,d};$$
$$j = D_{N-1},\ 1 \le d \le r - 1;$$

$$(1+\sigma_N) P_{N,j,0} = P_{N,j-1,r-1} + \sigma_N P_{N,j+1,0};$$
$$D_{N-1}+1 \le j \le R_{N-1}-1,\ d = 0; \quad (18)$$

$$(1+\sigma_N) P_{N,j,d} = P_{N,j,d-1} + \sigma_N P_{N,j+1,d};$$
$$D_{N-1} + 1 \le j \le R_{N-1} - 1,\ 1 \le d \le r - 1;$$

$$(1+\sigma_N)\, P_{N,R_{N-1},0} = P_{N,R_{N-1}-1,r-1} + P_{N-1,R_{N-1}-1,r-1} +$$
$$+ \sigma_N P_{N,R_{N-1}+1,0};\ j = R_{N-1},\ d = 0; \quad (19)$$

$$(1+\sigma_N)\, P_{N,R_{N-1},d} = P_{N,R_{N-1},d-1} + \sigma_N P_{N,R_{N-1}+1,d};$$
$$j = R_{N-1},\ 1 \le d \le r - 1;$$

$$(1+\sigma_N) P_{N,j,0} = P_{N,j-1,r-1} + \sigma_N P_{N,j+1,0};$$
$$R_{N-1} + 1 \le j \le R_N - 1,\ d = 0; \quad (20)$$

$$(1+\sigma_N) P_{N,j,d} = P_{N,j,d-1} + \sigma_N P_{N,j+1,d};$$
$$R_{N-1} + 1 \le j \le R_N - 1,\ 1 \le d \le r - 1;$$

$$(1+\sigma_N)\, P_{N,R_N,0} = P_{N,R_N-1,r-1} + P_{N,R_N,r-1};$$
$$j = R_N,\ d = 0; \quad (21)$$

$$(1+\sigma_N)\, P_{N,R_N,d} = P_{N,R_N,d-1};\ j = R_N,\ 1 \le d \le r - 1.$$

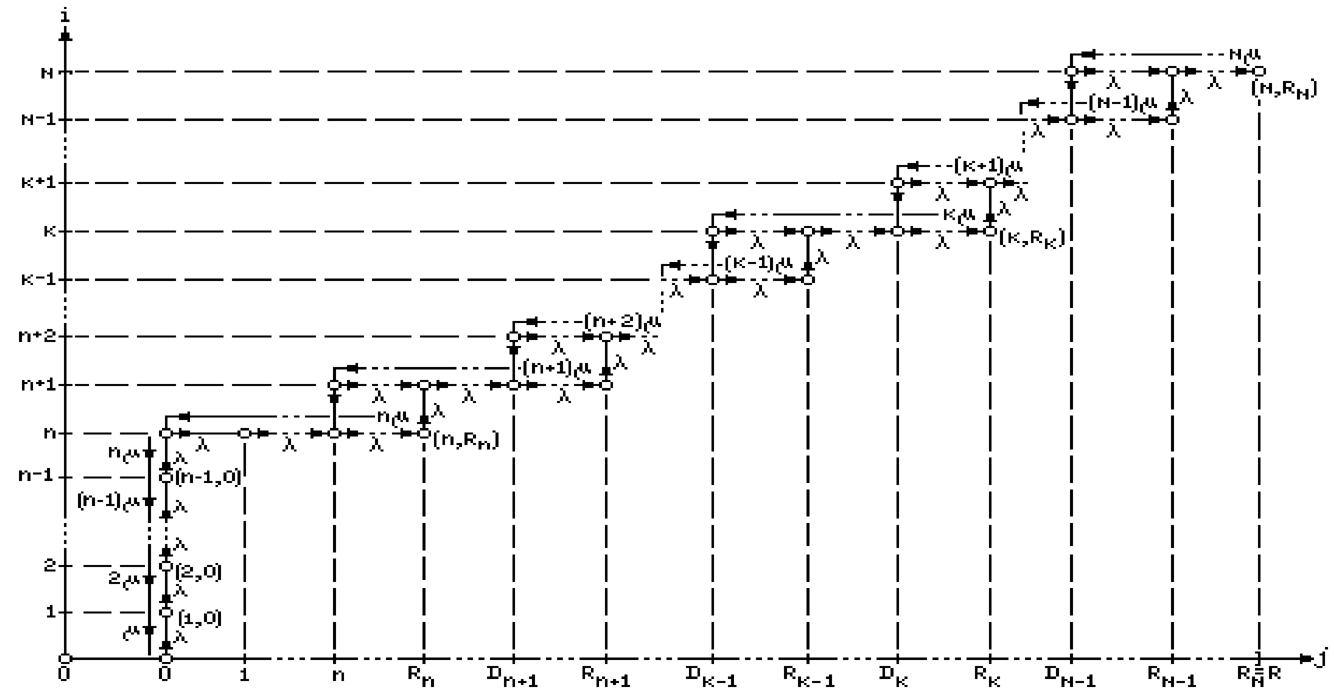
Попытки решить эту СЛАУ с целью поиска явного вида $P_{i,j,d}$ пока не увенчались успехом даже при использовании помогавших в ряде случаев разработанных, специального вида числовых рядов [5]. Поэтому детально рассмотрен случай, когда количество фаз поступления требований входящего потока $r \equiv 1$, а граф реальных физических переходов $\xi(t)$ имеет вид (см. рисунок).

Для конкретизации этого случая в СЛАУ необходимо оставить лишь пронумерованные уравнения, удалив в них параметр количества реализованных на момент t фаз d поступающей заявки.

Тогда уже двухпараметрические $P_{i,j}(t) = P\{i(t) = i, j(t) = j\}$ будут определять вероятности того, что в момент времени t $(0 < t)$ процесс $\xi(t)$ находится в состоянии (i, j).

Выразим в (1) $P_{1,0}$ через $P_{0,0}$. Изменяя значение индекса i и, конкретизируя определяемые на предыдущих шагах входящие в левую часть уравнения (2) $P_{i-1,0}$ и $P_{i,0}$, окончательно получаем

$$P_{i,0} = \frac{\lambda^i}{\mu^i i!} P_{0,0} = \frac{1}{\sigma_1^i i!} P_{0,0} = \left(\prod_{m=1}^{i} \sigma_m\right)^{-1} P_{0,0} = \frac{n^i}{\sigma_n^i i!} P_{0,0};$$
$$1 \le i \le n. \quad (22)$$



Поступая аналогично с уравнением (3), а затем с (4), можно показать, что имеет место следующего вида представление

$$P_{n,j}=\frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\frac{1}{\sigma_n^{j+1}}P_{0,0}\,;\;0\le j\le D_n. \qquad (23)$$

Выразив в (7) P_{n,R_n-1} через P_{n,R_n} и произведя циклические подстановки в (6), находим

$$P_{n,j}=\frac{\sigma_n^{R_n-j+1}-1}{\sigma_n-1}P_{n,R_n}\,;\;D_n\le j\le R_n. \qquad (24)$$

Сравнение (23) и (24) при идентичном значении параметра $j = D_n$, позволяет выразить P_{n,R_n} через $P_{0,0}$ и установить следующего вида зависимость

$$P_{n,R_n}=\frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\frac{1}{\sigma_n^{D_n+1}}\frac{\sigma_n-1}{\sigma_n^{R_n-D_n+1}-1}P_{0,0}.$$

Подставив полученное выражение в (24), получим

$$P_{n,j}=\frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\frac{1}{\sigma_n^{D_n+1}}\frac{\sigma_n^{R_n-j+1}-1}{\sigma_n^{R_n-D_n+1}-1}P_{0,0}\,;$$
$$D_n+1\le j\le R_n. \qquad (25)$$

Рассмотрим (5) и, после несложных преобразований, определим из него P_{n+1,D_n}, а именно,

$$P_{n+1,D_n}=\frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\frac{1}{\sigma_n^{D_n+1}}\frac{\sigma_n-1}{\sigma_n^{R_n-D_n+1}}\left[\frac{1}{\sigma_{n+1}}\right]P_{0,0}=$$
$$=\frac{1}{\sigma_{n+1}}P_{n,R_n}. \qquad (26)$$

Положим $i = n + 1$. Учитывая, что согласно (8) при $j = D_n$ по причине отключения освободившегося устройства

$$P_{n+1,j}=0;\;0\le j\le D_{n-1}, \qquad (27)$$

перейдем к (9). Выражая в нем P_{n+1,D_n+1} через P_{n+1,D_n} и производя циклическую подстановку получаемых выражений в (10), имеем

$$P_{n+1,j}=\frac{1}{\sigma_{n+1}^{j-D_n}}\frac{\sigma_{n+1}^{j-D_n+1}-1}{\sigma_{n+1}-1}P_{n+1,D_n}\,;$$
$$D_n+1\le j\le R_n. \qquad (28)$$

С учетом (26) последнему выражению можно придать следующий вид

$$P_{n+1,j}=\frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\frac{1}{\sigma_n^{D_n+1}}\frac{\sigma_n-1}{\sigma_n^{R_n-D_n+1}}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\sigma_{n+1}^{j-D_n+1}}\frac{\sigma_{n+1}^{j-D_n+1}-1}{\sigma_{n+1}-1}\right]P_{0,0};\quad D_n\le j\le R_n. \qquad (29)$$

Решив (11) и осуществив требуемые преобразования, получим

$$P_{n+1,R_n+1} = \frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\frac{1}{\sigma_n^{D_n+1}}\frac{\sigma_n - 1}{\sigma_n^{R_n-D_n+1}}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\sigma_{n+1}^{R_n-D_n+2}}\frac{\sigma_{n+1}^{R_n-D_n+1}-1}{\sigma_{n+1}-1}\right]P_{0,0}. \quad (30)$$

Подставим (30) в (12). Изменяя значение индекса j согласно $j = \overline{R_n+1, D_{n+1}-1}$ и находя из (12) $P_{n+1,j}$, которое является результатом реализации предшествующего цикла для $P_{n+1,j-1}$, окончательно имеем

$$P_{n+1,j} = \frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\frac{1}{\sigma_n^{D_n+1}}\frac{\sigma_n - 1}{\sigma_n^{R_n-D_n+1}}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\sigma_{n+1}^{j-D_n+1}}\frac{\sigma_{n+1}^{R_n-D_n+1}-1}{\sigma_{n+1}-1}\right]P_{0,0}; R_n+1 \le j \le D_{n+1}. \quad (31)$$

Прежде чем приступать к решению (13), рассмотрим уравнения (15) и (14). Выражая в (15) $P_{n+1,R_{n+1}-1}$ через $P_{n+1,R_{n+1}}$, получаем

$$P_{n+1,R_{n+1}-1} = (1+\sigma_{n+1})P_{n+1,R_{n+1}},$$

а подставляя последнее в (14), незамедлительно находим

$$P_{n+1,j} = \sum_{m=0}^{R_{n+1}-j}\sigma_{n+1}^m P_{n+1,R_{n+1}} = \frac{\sigma_{n+1}^{R_{n+1}-j+1}-1}{\sigma_{n+1}-1}P_{n+1,R_{n+1}};$$
$$D_{n+1} \le j \le R_{n+1}. \quad (32)$$

Приравнивая выражения (31) и (32) при одинаковом $j = D_{n+1}$, получаем

$$P_{n+1,R_{n+1}} = \frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\frac{1}{\sigma_n^{D_n+1}}\frac{\sigma_n - 1}{\sigma_n^{R_n-D_n+1}}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\sigma_{n+1}^{D_{n+1}-D_n+1}}\frac{\sigma_{n+1}^{R_n-D_n+1}-1}{\sigma_{n+1}^{R_{n+1}-D_{n+1}+1}-1}\right]P_{0,0}, \quad (33)$$

что дает возможность представить (32) в виде

$$P_{n+1,j} = \frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\frac{1}{\sigma_n^{D_n+1}}\frac{\sigma_n - 1}{\sigma_n^{R_n-D_n+1}}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\sigma_{n+1}^{D_{n+1}-D_n+1}}\frac{\sigma_{n+1}^{R_n-D_n+1}-1}{\sigma_{n+1}^{R_{n+1}-D_{n+1}+1}-1}\right]\frac{\sigma_{n+1}^{R_{n+1}-j+1}}{\sigma_{n+1}-1}P_{0,0}; \quad (34)$$
$$D_{n+1} \le j \le R_{n+1}.$$

Тем самым мы завершили определение всех $P_{n+1,j}$ для $i = n+1$. Имея (34) и решая (13), можно определить $P_{n+2,D_{n+1}}$, выступающее в качестве слагаемого (9) при очередном значении индекса $i = n+2$. Повторяя связанную с поиском выражений (27) – (34) процедуру последовательно для значений $i = n+2, n+3, \ldots, N-1$ и учитывая, что $R_{n-1} = D_{n-1} = 0$, для $n+1 \le i \le$ $\le N-1$ можно записать

$$P_{i,j} = 0;\ 0 \le j \le D_{i-1}-1. \quad (35)$$

$$P_{i,j} = \frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\times$$
$$\times\left\{\prod_{m=n}^{i-1}\left[\frac{1}{\sigma_m^{D_m-D_{m-1}+1}}\frac{\sigma_m^{R_{m-1}-D_{m-1}+1}-1}{\sigma_m^{R_m-D_m+1}-1}\right]\right\}\times \quad (36)$$
$$\times\frac{1}{\sigma_i^{j-D_{i-1}+1}}\frac{\sigma_i^{j-D_{i-1}+1}-1}{\sigma_i-1}P_{0,0}; \quad D_{i-1} \le j \le R_{i-1}.$$

$$P_{i,j} = \frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\times$$
$$\times\left\{\prod_{m=n}^{i-1}\left[\frac{1}{\sigma_m^{D_m-D_{m-1}+1}}\frac{\sigma_m^{R_{m-1}-D_{m-1}+1}-1}{\sigma_m^{R_m-D_m+1}-1}\right]\right\}\times \quad (37)$$
$$\times\frac{1}{\sigma_i^{j-D_{i-1}+1}}\frac{\sigma_i^{R_{i-1}-D_{i-1}+1}-1}{\sigma_i-1}P_{0,0}; \quad R_{i-1}+1 \le j \le D_i.$$

$$P_{i,j} = \frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\times$$
$$\times\left\{\prod_{m=n}^{i}\left[\frac{1}{\sigma_m^{D_m-D_{m-1}+1}}\frac{\sigma_m^{R_{m-1}-D_{m-1}+1}-1}{\sigma_m^{R_m-D_m+1}-1}\right]\right\}\times \quad (38)$$
$$\times\frac{\sigma_i^{R_i-j+1}-1}{\sigma_i-1}P_{0,0}; D_i+1 \le j \le R_i.$$

Переходя к решениям уравнений (16) – (21) и выражая входящее в (17) и (18) $P_{N,j}$ через $P_{N,D_{N-1}}$, получаем

$$P_{N,j} = \frac{1}{\sigma_N^{j-D_{N-1}}}\frac{\sigma_N^{j-D_{N-1}+1}-1}{\sigma_N-1}P_{N,D_{N-1}};$$
$$D_{N-1} \le j \le R_{N-1}. \quad (39)$$

Поступим аналогичным образом с уравнениями (21) и (20). Выразим P_{N,R_N-1} через P_{N,R_n} и, используя рекуррентную процедуру с последовательным уменьшением значения индекса j, имеем

$$P_{N,j} = \sigma_N^{R_N-j}P_{N,R_N};\ R_{N-1} \le j \le R_N - 1. \quad (40)$$

Сравнивая (39) и (40) при $j = R_N - 1$, находим

$$P_{N,R_N}=\frac{1}{\sigma_N^{R_N-D_{N-1}}}\frac{\sigma_N^{R_{N-1}-D_{N-1}+1}-1}{\sigma_N-1}P_{N,D_{N-1}}, \quad (41)$$

что дает возможность, применительно к (39) при $j = R_N - 1$, преобразовать (41) к виду

$$P_{N,j}=\frac{1}{\sigma_N^{j-D_{N-1}}}\frac{\sigma_N^{R_{N-1}-D_{N-1}+1}-1}{\sigma_N-1}P_{N,D_{N-1}};$$

$$R_{N-1}+1\le j\le R_N. \quad (42)$$

Учтем то обстоятельство, что выражение (36), получаемое из уравнения (13) на последнем (при $i = N$ и $j = D_{N-1}$) шаге рекуррентной процедуры решения подсистемы (8) – (15), также остается в силе. Поэтому, определив $P_{N,D_{N-1}}$ из (36) и подставив его в (39) и (42), получим следующую совокупность выражений для стационарных вероятностей $P_{N,j}$ нахождения исследуемой УСМО в состояниях (N, j), характеризующих случай, когда все N имеющихся в наличии устройств заняты обслуживанием сообщений, а именно

$$P_{N,j}=0;\ 0\le j\le D_{N-1}-1. \quad (43)$$

$$P_{N,j}=\frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\times$$
$$\times\left\{\prod_{m=n}^{N-1}\left[\frac{1}{\sigma_m^{D_m-D_{m-1}+1}}\frac{\sigma_m^{R_{m-1}-D_{m-1}+1}-1}{\sigma_m^{R_m-D_m+1}-1}\right]\right\}\times \quad (44)$$
$$\times\frac{1}{\sigma_N^{j-D_{N-1}+1}}\frac{\sigma_N^{j-D_{N-1}+1}-1}{\sigma_N-1}P_{0,0};\ D_{N-1}\le j\le R_{N-1}.$$

$$P_{N,j}=\frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\times$$
$$\times\left\{\prod_{m=n}^{N-1}\left[\frac{1}{\sigma_m^{D_m-D_{m-1}+1}}\frac{\sigma_m^{R_{m-1}-D_{m-1}+1}-1}{\sigma_m^{R_m-D_m+1}-1}\right]\right\}\frac{1}{\sigma_N^{j-D_{N-1}+1}}\times \quad (45)$$
$$\times\frac{\sigma_N^{R_{N-1}-D_{N-1}+1}-1}{\sigma_N-1}P_{0,0};\ R_{N-1}+1\le j\le R_N.$$

Используя (22), (23), (25), (35) – (38), (42) – (45) и традиционное условие нормировки

$$1=P_{0,0}+\sum_{i=1}^{n-1}P_{i,0}+\sum_{j=0}^{R_n}P_{n,j}+\sum_{i=n+1}^{N}\left(\sum_{j=D_{i-1}}^{R_i}P_{i,j}\right), \quad (46)$$

можно найти явный вид стационарной вероятности $P_{0,0}$, которая, будучи общим сомножителем всех слагаемых правой части выражения (46), допускает вынесение за скобки.

Зная $P_{i,j}$, можно определить все наиболее важные в практическом отношении характеристики исследованной УСМО: вероятность потери поступающей заявки, среднюю длину очереди ожидающих обслуживания заявок и среднее число занятых устройств, вероятность незамедлительного начала обслуживания поступающей в систему заявки, среднее время ожидания заявкой начала обслуживания и др. Как правило, эти характеристики и их комбинации являются компонентами различного вида функционалов (критериев) качества работы исследуемой УСМО. Фиксируя λ и μ и варьируя параметры (n, N, R, $\left\{R_{n+q}\right\}_{q=0}^{N-n-1}$, $\left\{D_{n+q}\right\}_{q=0}^{N-n-1}$), можно решить крайне актуальную задачу оптимизации процесса функционирования исследованной УСМО для выбранного показателя качества. В роли последнего целесообразно использовать широко применяемый для этих целей аддитивный функционал. Для решения оптимизационной задачи введем следующую совокупность параметров:

$[0,T]$ – интервал времени наблюдения за поведением системы;

ε, β – соответственно плата за использование входящего в состав УСМО устройства и доход за обслуживание им заявки в единицу времени. Для состояния (i, j) величина платы и дохода соответственно имеют вид $\varepsilon{*}i$, $\beta{*}i$;

φ – доход системы в единицу времени за аренду устройства на выполнение дополнительных работ, если при i занятых обслуживанием устройствах некоторая часть свободных $s(N-i)$ $(0\le s(N-i)\le N-i)$ передаются для указанных целей. Для состояния (i, j) величина дохода определится как $\varphi{*}s(N-i)$;

γ – штраф за простой устройства обслуживания в единицу времени. Для состояния (i, j) его величина характеризуется значением $\gamma{*}(N-i)$;

δ – штраф за потерю поступившей в УСМО (в узел) заявки, но покинувшей ее необслуженной по причине занятости всех $R_N = R$ мест в буфере;

ω – штраф за простой в единицу времени находящейся в буфере заявки. Для состояния системы (i, j) его значение определяется величиной $\omega{*}j$;

χ – штраф за простой в единицу времени единицы места буфера. Для состояния (i, j), без учета размера заявок, этот убыток характеризуется величиной $\chi*(R-j)$.

Пусть $t_{i,j}(T)$ – суммарное время пребывания системы в состоянии (i, j) на интервале наблюдения $[0, T]$ [3, 4]. Используя совокупность $\{t_{i,j}(T)\}_{i,j}$, введем в рассмотрение функционал $F(T, \lambda, \mu, n, N, R, \{R_{n+q}\}_{q=0}^{N-n-1}, \{D_{n+q}\}_{q=0}^{N-n-1})$, определяющий общую величину доходов и убытков (интегральные доходо-убытки), полученных системой за время T. Тогда

$$f(\lambda,\mu,n,N,R,\{R_{n+q}\}_{q=0}^{N-n-1}, \{D_{n+q}\}_{q=0}^{N-n-1}) = \\ = \lim_{T\to\infty}\frac{F(T,\lambda,\mu,n,N,R,\{R_{n+q}\}_{q=0}^{N-n-1}, \{D_{n+q}\}_{q=0}^{N-n-1})}{T} \quad (47)$$

будет характеризовать удельные доходо-убытки системы в единицу времени.

Используем (47) в качестве показателя эффективности работы исследованной УСМО и конкретизируем входящие в него компоненты. Помня, что при $T\to\infty$ стационарная вероятность $P_{i,j}$ определяет долю времени, пребывания системы в состоянии $(i, j) \in H$, имеем

$$f(\lambda,\mu,n,N,R,\{R_{n+q}\}_{q=0}^{N-n-1},\{D_{n+q}\}_{q=0}^{N-n-1}) = -\varepsilon*N + \\ +\sum_{i=0}^{n-1}P_{i,0}*(\beta*i+\phi*d(N-i)-\gamma*(N-i)-\chi*R)+ \\ +\sum_{j=0}^{R_n}P_{n,j}*\big(\beta*n+\varphi*d(N-n)- \\ -\gamma*(N-n)-\chi*(R-j)\big)+ \\ +\sum_{i=n+1}^{N}\left[\sum_{j=D_{i-1}}^{R_i}P_{i,j}*\big(\beta*i+\varphi*d(N-i)- \right. \\ \left. -\gamma*(N-i)-\omega*j-\chi*(R-j)\big)\right]-P_{N,R_N}*\delta. \quad (48)$$

Оптимизируя (48) по совокупности параметров n, N, R, $\{R_{n+q}\}_{q=0}^{N-n-1}$ и $\{D_{n+q}\}_{q=0}^{N-n-1}$, найдем лучший (по получаемым удельным доходо-убыткам) вариант системы. Для оптимизации можно применить аппарат динамического программирования [6] или методы из [7].

Отметим важные в практическом отношении моменты

• Величины порогов D_{n+q} могут назначаться иным способом, при этом надлежит помнить о следующих важных моментах. *Первое*, во избежание путаницы при выписывании исходной СЛАУ типа (1) – (21), пороги обязаны быть упорядочены и согласованы с соответствующими значениями R_{n+q}. *Второе*, изменение D_{n+q} приведет к изменению вида СЛАУ для решения которой могут быть использованы изложенные выше подходы. *Третье*, равенство $R_{n+q-1} = D_{n+q}$ (хотя бы для одного q) приведет к появлению в фазовом пространстве H *поглощающих* состояний [4], попадание в которые приведет к бесконечно-хаотичному, не допускающему контроля циклу переключений (подключение/отключение) режимов работы устройств обслуживания, делая работу УСМО анормальной, а ее объективный анализ невозможным без введения дополнительных, ранее не оговоренных условий.

• При конечном объеме буфера $R = R_N$, а значит и конечном множестве состояний H процесса $\xi(t)$ ($D = dim(H) < \infty$), выполнение условия (46) требует наложения на значения параметров σ_m единственного условия $\sigma_m \neq 1$ $(1 \le m \le N)$. Если же какая-либо $\sigma_m \equiv 1$ (ее единственность непосредственно следует из вида σ_m), раскрыть неопределенность вида 0/0 можно хорошо известным способом. Для моделирования конкретных ситуаций удобно воспользоваться пакетом математического моделирования *Maple*, обладающим визуально наглядными средствами представления конечных результатов.

• В случае неограниченного объема буферного пула, исследованная система становится пуассоновской УСМО с ожиданием. Ее анализ осуществляется с помощью частично модифицированной СЛАУ гибели–размножения, приведенной в начале статьи. Для этого пару уравнений (20) и (21) необходимо заменить на единственное уравнение вида

$$(1+\sigma_N)P_{N,j} - \sigma_N P_{N,j+1} = P_{N,j-1}, \quad R_{N-1} + 1 \le j.$$

Учитывая, что при этом уравнения (1) – (19) сохранят прежний вид и найденные для них решения (22) – (39) останутся в силе, для получения недостающих $\{P_{N,j}\}_j$ ($i = N$, $R_{N-1} \le j$) необходимо решить совокупность уравнений, которую, для удобства использования рекуррентных процедур, целесообразно представить следующим образом

$$P_{N,R_{N-1}+1} = \left(1+\frac{1}{\delta_N}\right)P_{N,R_{N-1}} - \frac{1}{\sigma_N}P_{N,R_{N-1}-1} - \\ -\frac{1}{\delta_N}P_{N-1,R_{N-1}},\ j = R_{N-1}; \tag{49}$$

$$P_{N,j+1} = \left(1+\frac{1}{\sigma_N}\right)P_{N,j} - \frac{1}{\sigma_N}P_{N,j-1},\ R_{N-1}+1 \le j. \tag{50}$$

Подставим в (49) вместо $P_{N-1,R_{N-1}}$ выражение из (38), выписанное для $i = N-1$ и $j = R_{n-1}$, а вместо $P_{N,R_{N-1}-1}$ и $P_{N,R_{N-1}}$ выражения из (44), конкретизированные при $i = N$, соответственно, для значений $j = R_{n-1} - 1$ и $j = R_{n-1}$. В результате получим

$$P_{N,R_{N-1}+1} = \frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\times \\ \times\left\{\prod_{m=n}^{N-1}\left[\frac{1}{\sigma_m^{D_m-D_{m-1}+1}}\frac{\sigma_m^{R_{m-1}-D_{m-1}+1}-1}{\sigma_m^{R_m-D_m+1}-1}\right]\right\}\times \\ \times\frac{\sigma_N^{R_{N-1}-D_{N-1}+1}}{\sigma_N^{R_{N-1}-D_{N-1}+2}\left(\sigma_N-1\right)}P_{0,0},\ j = R_{N-1}+1. \tag{51}$$

Перейдем к совокупности уравнений (50) и, используя приведенные в (51) и (39) выражения для исходного значения параметра цикла $j = R_{N-1}+1$, найдем $P_{N,R_{N-1}+2}$. Заставляя j пошагово изменяться, каждый раз увеличиваясь на единицу и выражая $P_{N,j}$ через пару найденных на предыдущих шагах $P_{N,j-1}$ и $P_{N,j-2}$, получим общего вида аналитическое выражение, описывающее все не найденные до настоящего момента стационарные вероятности $P_{N,j}$ ($R_{N-1} + +1 \le j$), а именно

$$P_{N,j} = \frac{n^{n-1}}{\sigma_n^{n-1}(n-1)!}\times \\ \times\left\{\prod_{m=n}^{N-1}\left[\frac{1}{\sigma_m^{D_m-D_{m-1}+1}}\frac{\sigma_m^{R_{m-1}-D_{m-1}+1}-1}{\sigma_m^{R_m-D_m+1}-1}\right]\right\}\times \\ \times\frac{\sigma_N^{R_{N-1}-D_{N-1}+1}-1}{\sigma_N^{j+1-D_{N-1}}\left(\sigma_N-1\right)}P_{0,0},\ R_{N-1}+1 \le j. \tag{52}$$

На этом поиск всех $\{P_{i,j}\}_{j,i}$ ($0 \le i \le N$, $0 \le j$) можно считать завершенным.

Для корректного использования функционала (48), в нем необходимо удалить параметры, которые перестанут входить в число оценочных характеристик качества работы такой системы. К таковым относятся: δ – по причине отсутствия потерь заявок и параметр простоя единицы места в буфере χ. Важно помнить, что для существования стационарного распределения $P_{i,j}$ требуется обязательное выполнение условия $\rho_N = \dfrac{\lambda}{N\mu} = \dfrac{\rho}{N} < 1$ $\left(\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < N\right)$, которое обеспечивает сходимость сумм в аналоге нормирующего условия (46).

Заключение. Рассмотренные, удобные в плане практических применений модели, допускают значительное количество разнообразных технических интерпретаций. В частности, применительно к информационным сетям их можно рассматривать как средство анализа пропускной способности участка сети между парами $A \to B$ смежных узлов с буферным пулом (не)ограниченного объема, и пучком однотипных каналов связи (в узле A). Наличие явных аналитических выражений позволяет оценить потерянную $\lambda P_{N,R}$ и обслуженную λ $(1 - \lambda P_{N,R})$ на участке $A \to B$ нагрузки и оптимизировать первую согласно используемому критерию качества. Если учесть аспект надежности входящих в состав пучка каналов связи и ввести в (48) слагаемое, определяющее затраты на достижение требуемого коэффициента надежности пучка, можно обеспечить дальнейшее повышение практической значимости модели. Комплексное решение перечисленных вопросов будет способствовать дальнейшему улучшению анализа пропускных способностей путей и направлений, а также совершенствованию элементов информационных технологий и повышению эффективности информационных сетей в целом.

1. *Броди С.М.*, *Погосян И.А.* Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания. – Киев: Наук. думка, 1973. – 127 с.
2. *Иванешкин А.И.* Оптимизация работы многоканальной системы массового обслуживания с переменным числом устройств // Кибернетика и системн. анализ. – 2007. – № 4. – С. 92–101.
3. *Гнеденко Б.В.*, *Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1966. – 432 с.
4. *Королюк В.С.*, *Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1976. – 184 с.
5. *Иванешкин А.И.* Специальные числовые рады с целочисленными компонентами // Кибернетика и системн. анализ. – 2005. – № 4. – С. 163–171.
6. *Джевелл В.С.* Управляемые полумарковские процессы // Кибернетический сборник. – 1967. – **4**. – С. 97–137.
7. *Вычислительные* методы выбора оптимальных проектных решений. / Под ред. В.С. Михалевича. – Киев: Наук. думка, 1977. – 178 с.

Поступила 09.04.2015

Тел. для справок: +38 44 502-6328 (Киев)

UDC 65.012.122

Ivaneshkin A.I.

The Situation Management of the Informative Network Knot Resources with the Variable in Time Number of the Active Service Devices

Keywords: situation management, queuing system, variable number of devices, thresholds.

An existent tendency of the collective using of the storage facilities, treatment and passing of the information, did the multichannelity as the basic feature of the large majority of incoming in the structure of networks components (knots, communication channels). At the same time, the narrow-mindedness of technical resources of network knots and fundamental role of the stochastic nature of processes, became the main reason of constantly overloads, resulting the losses of entering in knots information and reducing the networks work efficiency.

Except for the knots of networks the noted properties are inherent by the majority of the technical systems (automated control systems of a technical production, supplies, technical service, control systems of airplanes landing in air-ports and other).

The similarity of the indicated objects processes and the possibility of their formalized description by the identical guided queuing systems (GQS), made topical the development and the research of more general type of analysis models, to decide the questions of situation adaptation of the objects structure and the optimization of their conduction in the constantly changing terms.

The objects of research are two more general views analytical models of GQS, describing the work of the network knot and the objects indicated above. The problems of research are the obvious type of permanent states probabilities, playing the fundamental part in the analysis of their basic informational and technical descriptions and the subsequent multiparametric optimization of the process functioning.

The work of network knots is formalized by multichannel Poisson GQS with the losses, eventual, variable in time the active devices number of service with the terms of their connecting and disconnecting and the additive functional of quality. The cases of eventual and endless volume of buffer pool are considered. The research basis is the vehicle of theory of chances and guided stochastic processes.

At erlang incoming stream of requests, as models of GQS the developed systems of linear algebraic equalizations of death-reproduction are used. The cases of Poisson incoming stream are explored in details. The obvious kind analytical expressions for stationary probabilities of the real physical conditions of GQS are received, the searching tasks of the optimum strategy of multiparametric situation process of functioning of network knots are decided.

The explored models summarize a number of the results received before and assume many various technical interpretations. The received states stationary probabilities is the most comfortable in the way of practical applications and provides the possibility of complex decision while the basic descriptions of the described objects searching, the multiparametric optimization of the functioning processes and increases the work efficiency of the informative networks as a whole.

●