УДК 519.17

Д.А. Петренюк

Граціозні дерева. Аналіз проблеми та перспективи

Предложен анализ результатов относительно гипотезы о грациозности деревьев. Рассмотрены два подхода к вопросу истинности гипотезы о данных деревьях, основные классы грациозных деревьев, способы получения больших деревьев из меньших, а также результаты компьютерных вычислений о грациозности деревьев. Приведены некоторые аргументы против гипотезы о грациозности деревьев.

Запропоновано аналіз результатів щодо гіпотези про граціозність дерев. Розглянуто два підходи до питання правдивості гіпотези про дані дерева, описано основні класи таких дерев, способи отримання більших дерев з менших, а також результати комп'ютерних обчислень стосовно граціозності дерев. Подано деякі аргументи проти гіпотези про граціозність дерев.

Вступ. Гіпотеза про граціозність дерев є однією з найпопулярніших математичних гіпотез, яка уперше була сформульована в 1976 р. [1], і з того часу спроби довести або спростувати її не припиняються. Незважаючи на значний інтерес до гіпотези за кордоном, в Україні цій темі досі приділялося небагато уваги. Запропонована функція нумерації вершин графа отримала назву β-*оцінки* [1]; пізніше таку нумерацію назвали *граціозною*, і зараз цей термін вживається найбільш широко [2].

Існує два основних підходи до розв'язання проблеми істинності гіпотези про граціозність дерев. Перший з них полягає в доведенні граціозності та отриманні алгоритмів граціозної нумерації для окремих класів дерев. Якби вдалося продемонструвати граціозність усіх можливих класів дерев, то гіпотезу було б доведено. Сьогодні граціозність доведено для зірок, ланцюгів, гусениць, оливкових дерев, деяких підкласів омарів (феєрверків, (2,2)-гусениць, омарів з досконалими паросполученнями), бананових та узагальнених бананових дерев та низки інших класів дерев. Знайдено значну кількість методів поєднання кількох граціозних дерев для отримання більшого граціозного дерева. Найважливіші з цих результатів розглянуто в даній статті.

Інший підхід до відповіді на питання про граціозність усіх дерев полягає у використанні комп'ютера для перевірки граціозності дерев, кількість вершин яких не перевищує заданої скінченної величини. Такий підхід є додатковим джерелом алгоритмів граціозної нумерації дерев, а також може бути використаний для спростування гіпотези, якщо буде знайдено хоча б одне дерево, яке не допускає граціозної нумерації. Досі, щоправда, такого дерева не знайдено. У 2010 р. використано детермінований алгоритм пошуку з поверненням і доведено, що всі дерева, які мають не більше 35 вершин, граціозні [3].

Постановка задачі

Граціозною нумерацією неорієнтованого графа G з n ребрами називають взаємно однозначну відповідність між множиною вершин графа G та множиною $\{0, 1, 2, ..., n\}$, де всі індуковані мітки ребер є різними. Індукована мітка ребра – це абсолютна величина різниці між номерами (мітками) двох його кінців. Іншими словами, нумерація φ граціозна, якщо $\varphi: V \to \{0, 1, 2, ..., |E|\}$ є ін'єктивним відображенням і якщо всі ребра графа G мають різні номери з множини $\{1, 2, ..., |E|\}$. В [1] також показано, що існування граціозної нумерації для заданого графа G з n ребрами є достатньою умовою існування циклічного розкладу повного графа порядку $2n + 1$ на підграфи, ізоморфні графу G. Приклад такого розкладу для $n = 3$ показано на рис. 1.

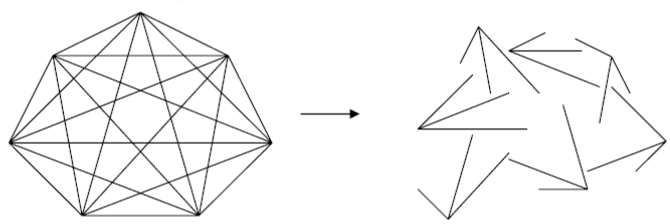

Рис. 1

Граф є *граціозним*, якщо він допускає граціозну нумерацію. Знаменита *гіпотеза про граціозність дерев* (також відома як гіпотеза Рінгеля–Коціга, або гіпотеза Роси, або навіть гіпотеза Рінгеля–Коціга–Роси) полягає в тому, що всі дерева є граціозними.

Гіпотезу про граціозність дерев досі не доведено, тож вона продовжує привертати увагу професійних науковців та аматорів. Сьогодні потік публікацій про граціозність дерев не вщухає, тому відслідковувати усі нові результати досить важко. Далі перераховано лише основні класи дерев, граціозність яких вже доведено.

Класи граціозних дерев

Зірка

Зіркою називають дерево, яке має не більше однієї вершини, степінь якої перевищує *одиницю*, а усі інші вершини мають степінь *одиниця*. Доведено, що усі зірки є граціозними. Граціозно занумеровану зірку зображено на рис. 2.

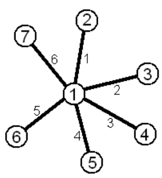

Рис. 2

Ланцюг

Ланцюгом називають дерево, в якому лише дві вершини (кінці ланцюга) мають степінь *одиниця*, а усі інші вершини мають степінь *два*. У будь-якому ланцюгу допускається граціозна нумерація. Граціозно занумеровані ланцюги показано на рис. 3.

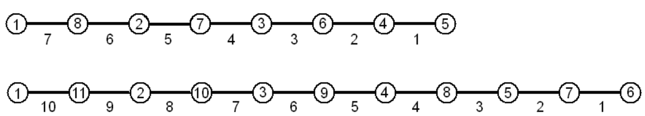

Рис. 3

Гусениця

Гусеницею (або *однодистантним деревом* [4]) називають дерево, яке після вилучення усіх висячих вершин (тобто вершин степеня *один*) перетворюється на ланцюг. Усі гусениці допускають граціозну нумерацію. Граціозно розмічену гусеницю показано на рис. 4.

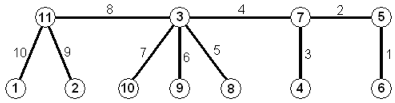

Рис. 4

Оливкові дерева

Оливкове дерево – це сукупність i ланцюгів, з'єднаних в одній вершині, причому довжина i-го ланцюга дорівнює i. Доведено [5], що усі оливкові дерева є граціозними. Граціозно занумероване оливкове дерево показано на рис. 5.

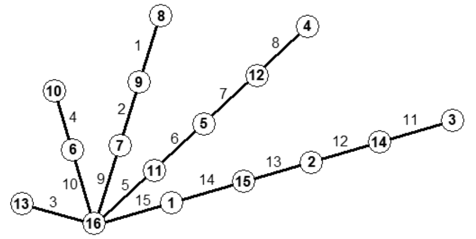

Рис. 5

Граціозність деяких видів омарів

Омаром (або *дводистантним деревом* [4]) називають дерево, яке після видалення усіх висячих вершин перетворюється на гусеницю (рис. 6). Іншими словами, це є дерево, що містить ланцюг (хребет), відстань від якого до кожної вершини не перебільшує двох.

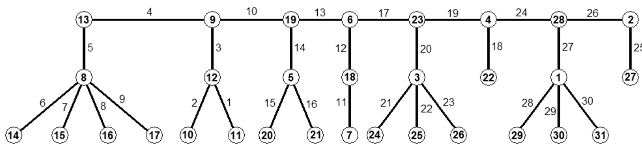

Рис. 6

У 1979 р. висловлено гіпотезу про те, що всі омари граціозні [6]. Зроблено багато спроб довести цю гіпотезу, проте нікому досі це не вдалося. Сьогодні відомі наступні граціозні підкласи омарів.

Феєрверки

Феєрверк F – це дерево, що складається з ланцюга $P(F)$ і множини зірок, де кожну вершину ланцюга $P(F)$ з'єднано з центральною вершиною однієї зірки. Доведено, що усі феєрверки є граціозними [7]. Граціозно занумерований феєрверк показано на рис. 6.

$(2, k)$-гусениці

Дерево, отримане приєднанням до кожної вершини ланцюга r ланцюгів довжини k, називають (r, k)-*гусеницею*. Простий спосіб отримання граціозної нумерації для окремого підкласу омарів – $(2, 2)$-гусениць запропоновано у [8]. Граціозно занумеровану $(2, 2)$-гусеницю показано на рис. 7.

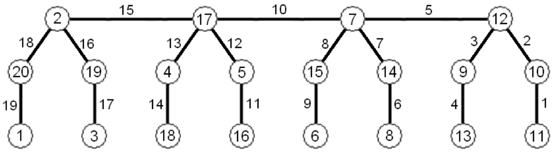

Рис. 7

Омари з досконалими паросполученнями

Паросполученням у графі називають множину ребер цього графа, які не мають спільних вершин. *Досконалим паросполученням*, або 1-*фактором* в графі називають таке паросполучення, яке містить усі вершини даного графа. Доведено [4], що усі омари з досконалими паросполученнями є граціозними.

Бананові дерева та узагальнені бананові дерева

Бананове дерево складається з сукупності зірок та вершини *v*, причому одну кінцеву вершину кожної зірки з'єднано з вершиною *v* (рис. 8). Всі бананові дерева та узагальнені бананові дерева (графи, отримані сполученням однієї вершини з однією кінцевою вершиною кожної з будь-якої кількості зірок, де сполучення виконується за допомогою ланцюга довжиною не менше двох), є граціозними [9].

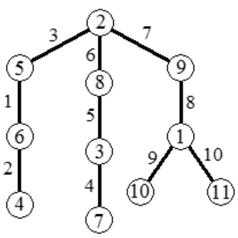

Рис. 8

Сімейство граціозних павуків

Павук – це дерево, у якому лише одна вершина має степінь більшу, за два. Якщо така вершина існує, її називають *вузловою* вершиною дерева. *Ногою* павука називають будь-який з ланцюгів, що з'єднує вузлову вершину з кінцевою вершиною дерева.

Кожне дерево-павук T з l ногами, кожна з яких має довжину з проміжку $\{m, m+1\}$ для деякого $\{m > 1\}$, граціозне [10]. Граціозну нумерацію дерева-павука з сімома ногами та 18 вершинами показано на рис. 9.

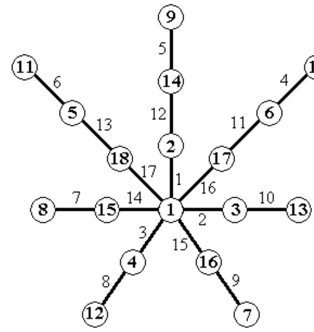

Рис. 9

Симетричні дерева

Симетричне дерево – це кореневе дерево, у якого всі вершини, розташовані на однаковій відстані від кореня, мають однаковий степінь.

Граціозність всіх симетричних дерев доведено у 1975 р. [11]. Симетричне дерево та його граціозну нумерацію показано на рис. 10.

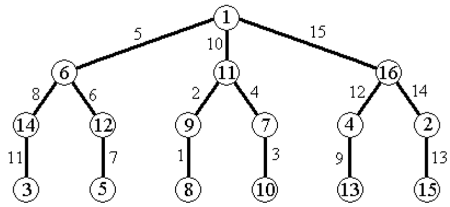

Рис. 10

Дерева, діаметр яких не перевищує п'яти

Діаметр дерева – це довжина найдовшого маршруту в цьому дереві. Всі дерева діаметром п'ять – граціозні [12].

Методи отримання більших граціозних дерев з менших

Приєднання гусениці до граціозно занумерованого дерева

Якщо до вершини з номером 1 граціозно занумерованого дерева G_n приєднати гусінь, то отримане дерево допускатиме граціозну нумерацію [13]; гусениця має приєднуватися крайньою вершиною її хребта (рис. 11).

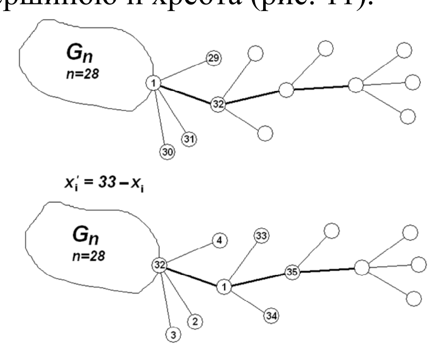

Рис. 11

Поділ ребер граціозного дерева

У 1998 р. у [14] показано, що всі дерева, отримані з граціозних дерев заміною кожного ребра ланцюгом довжиною *два*, також є граціозними (рис. 12).

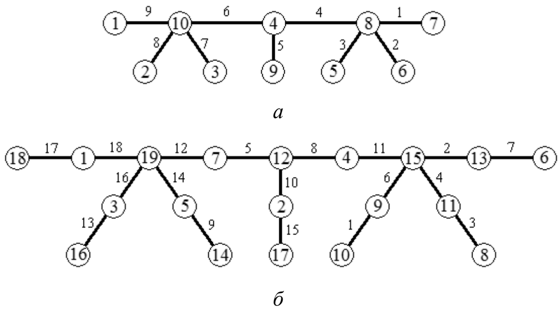

Рис. 12

Гірляндова побудова

Гірляндовою побудовою називають отримання нового дерева шляхом приєднання до кожної висячої вершини зірки ізоморфної копії граціозного дерева T тією вершиною, що відповідає вершині v дерева T, яка при граціозній нумерації отримує номер 1 або n.

Дерево, отримане гірляндовою побудовою, є граціозним [15]. На рис. 13 показано гірляндову побудову, за допомогою якої з трьох копій бананового дерева порядку 11 (див. рис. 13, *а*) отримано більше граціозне дерево порядку 34 (див. рис. 13, *б*).

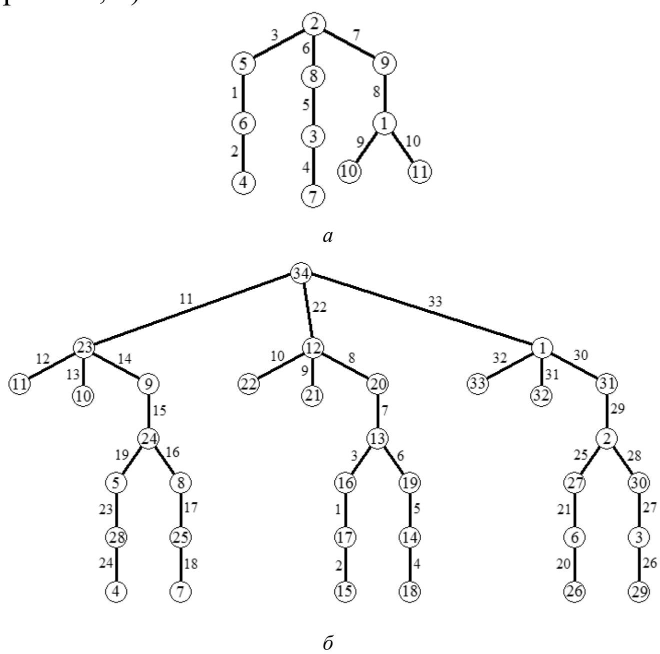

Рис. 13

Δ-побудова

Δ-побудовою називають отримання нового дерева з двох граціозних дерев шляхом приєднання до кожної вершини одного граціозного дерева (дерева–господаря) ізоморфної копії іншого граціозного дерева T вершиною, що відповідає деякій довільно обраній фіксованій вершині v дерева T.

Будь-яке дерево, отримане за допомогою Δ-побудови, є граціозним [16]. Приклад отримання граціозного дерева (*б*) з двох менших граціозних дерев (*а*) за допомогою Δ-побудови подано на рис. 14.

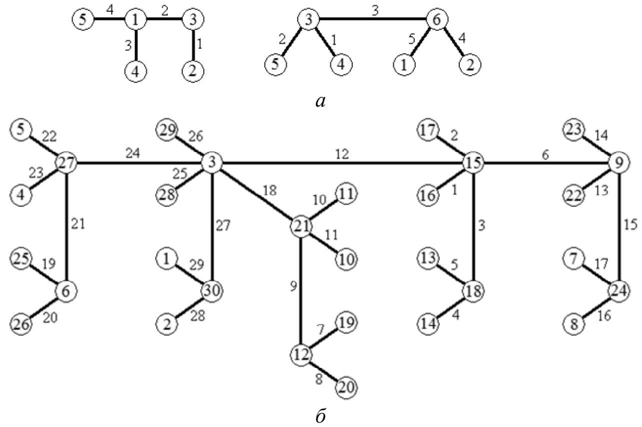

Рис. 14

Побудова приєднанням

Побудовою приєднанням називатимемо отримання нового дерева шляхом ідентифікації коренів довільної кількості копій заданого граціозного дерева в одній вершині r, яку називатимемо особливою вершиною побудованого дерева. Будь-яке дерево, отримане шляхом побудови приєднанням, є граціозним [16].

Розширені гірляндова побудова, Δ-побудова та побудова приєднанням

У 2008 р. у [17] розширено деякі результати [16] введенням поняття граціозно сумісних дерев та доведенням так званої теореми підстановок.

Два граціозно занумеровані дерева T_1 та T_2 з $|V(T_1)| = |V(T_2)|$ називатимемо *граціозно сумісними*, якщо виконується одна з наступних умов:

• граціозно занумеровані дерева T_1 та T_2 є ідентичними;

• нумерації θ_1 та θ_2 строго граціозні з однаковою потужністю, а також $\theta_1(w_1) = \theta_2(w_2)$.

Сімейство граціозно сумісних дерев з потужністю граціозної нумерації $k = 1$ показано на рис. 15.

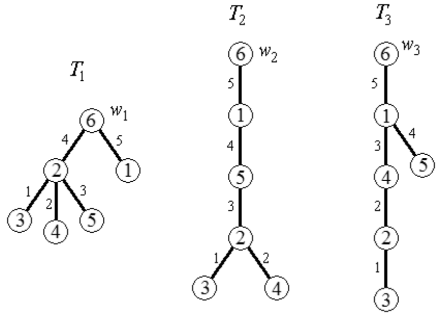

Рис. 15

Розширені гірляндова побудова, Δ-побудова та побудова приєднанням виконуються аналогічно звичайним, але замість копій лише одного граціозного дерева використовуються дерева з деякого сімейства граціозно сумісних дерев. У [17] доведено, що дерева, отримані розширеною побудовою, є граціозними. Приклади гірляндової побудови, розширеної побудови приєднанням та Δ-побудови показано на рис. 16, 17, 18 відповідно. Використано дерева T_1, T_2, T_3 з рис. 15.

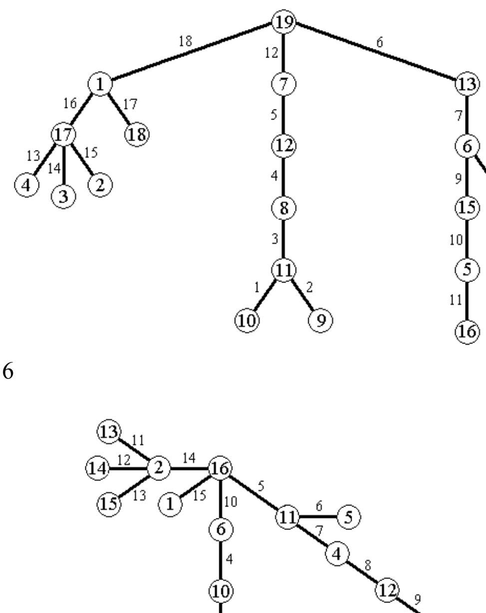

Рис. 16

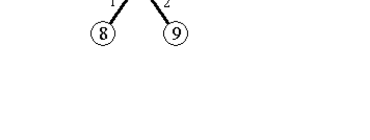

Рис. 17

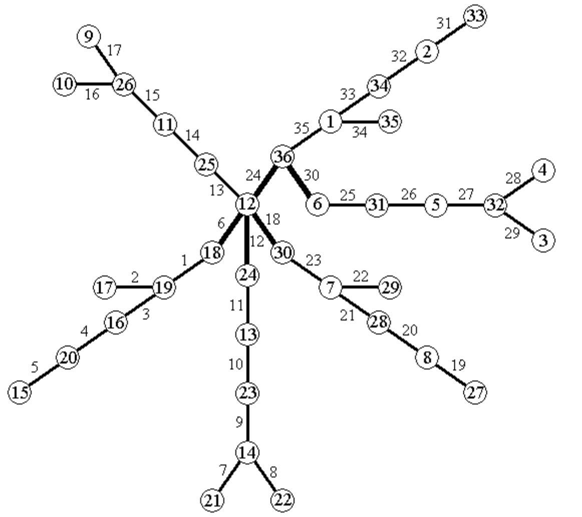

Рис. 18

Аргументи проти гіпотези та висновки

Обидва підходи до вивчення гіпотези про граціозність дерев досі давали лише підтвердження гіпотези. Проте деякі дослідники висловлюють серйозні сумніви щодо її коректності. Зокрема, у [18] відзначено, що переважну більшість методів побудови граціозної нумерації розроблено для дерев, які мають певні риси регулярності (зірки, симетричні дерева) або характеризуються досить простою структурою (гусениці, феєрверки), в той же час повністю відсутні доведення граціозності у випадках достатньо нерегулярних дерев (навіть граціозність усіх омарів ще досі не доведена). Серед ефективних шляхів критики гіпотези названо аналіз усіх можливих граціозних нумерацій деяких граціозних дерев, що дав би можливість оцінити вплив структури дерева на можливі номери його вершин. На думку автора [18], деякі дерева зі складною будовою можуть накладати настільки серйозні обмеження на нумерацію вершин, що граціозність цих дерев буде поставлено під сумнів. Хоча пошук граціозних нумерацій для усіх дерев з кількістю вершин до 35 включно визнається вагомим аргументом на користь правдивості гіпотези, але цей факт не виключає можливості існування неграціозних дерев, що мають більше, ніж 35 вершин.

Так чи інакше, сьогодні ще рано говорити про повне доведення або спростування гіпотези про граціозність дерев, незважаючи на те, що з часу її появи минуло майже півстоліття. У

2004 р. [19] та у 2009 р. [20] запропоновано варіанти доведення гіпотези, але вони виявилися хибними або неповними.

Втім, переважна більшість дослідників сьогодні схиляється до віри в справедливість гіпотези про граціозність дерев, беручи до уваги граціозність багатьох класів дерев, результати комп'ютерного пошуку та повну відсутність контрприкладів. Як зауважив один дослідник, «віра в справедливість гіпотези про граціозність дерев настільки сильна, що, якби навіть було насправді знайдено дерево, яке не допускає граціозної нумерації, його, скоріше за все, не визнали б деревом» [21].

1. *Rosa A*. On certain valuations of the vertices of a graph, Theory of Graphs (Internat. Sympos. Rome, 1966) / Eds. Gordon and Breach. – New York; Dunod, Paris, 1967. – P. 349–355.
2. *Golomb S.W*. How to number a graph // Graph Theory and Computing / Ed. by R.C. Read. – New York: Academic Press, 1972. – P. 23–37.
3. *Fang W.A* computational approach to the graceful tree conjecture. – Access Mode: arXiv:1003.3045v2 [cs.DM]
4. *Morgan D*. All lobsters with perfect matchings are graceful // Electron. Notes Discrete Math. – 2002. – N 11. – P. 503–508.
5. *Pastel A.M*., *Raynaud H.* Numerotation gracieuse des oliviers, in colloq. – Grenoble: Publ. University de Grenoble, 1978. – P. 218–223.
6. *Bermond J.C*. Graceful graphs, radio antennae and French windmills // Graph Theory and Comb. – London: Pitman, 1979. – P. 18–37.
7. *Chen W.C*., *Lü H.I*., *Yeh Y.N.* Operations of interlaced trees and graceful trees // Southeast Asian Bull. Math. – 1997. – № 21. – P. 337–348.
8. *Настоящий В.А*., *Петренюк А.Я*., *Петренюк Д.А*. Доведення існування півобертової *T*-факторизації для всіх півсиметричних дерев порядку $n = 22$ / Комбінаторні конфігурації та їх застосування: Матеріали Дев'ятого Міжвуз. наук.-практ. сем., 16–17 квітня 2010 р. / Відп. ред. Г.П. Донець. – Кіровоград, 2010. – С. 97–103.
9. *Sethuraman G*., *Jesintha J.* All extended banana trees are graceful // Proc. Internat. Conf. Math. Comp. Sci. – 2009. – N 1. – P. 4–8.
10. *Bahl M*., *Lake S*., *Wertheim A*. Gracefulness of Families of Spiders. – http://facstaff.unca.edu/pbahls/papers/Spiders.pdf
11. *Bermond J.C*., *Sotteau D.* Graph Decompositions and G-design // Proc. 5th British Comb. Conf. – 1975. – P. 52–72.
12. *Hrnčiar P*., *Haviar A.* All trees of diameter five are graceful // Discrete Math. – 2001. – N 233. – P. 133–150.
13. *Донец Г.А*., *Петренюк Д.А*. Построение *T*-факторизаций полного графа и проблема Роса // УСиМ. – 2010. – № 4. – С. 21–24.
14. *Burzio M*., *Ferrarese G*. The subdivision graph of a graceful tree is a graceful tree // Discrete Math. – 1998. – N 181. – P. 275–281.
15. *Koh K.M*., *Rogers D.G*., *Tan T.* On Graceful Trees // Nanta Mathematica – 1977. – N 10. – P. 207–211.
16. *Koh K.M*., *Tan T*., *Rogers D.G.* Two theorems on graceful trees // Discrete Math. – 1979. – N 25. – P. 141–148.
17. *Mavronicolas M*., *Michael L.* A substitution theorem for graceful trees and its applications // Discrete Mathematics. – 2009. – **309**, N 12. – P. 3757–3766.
18. *Vietri A*. Sailing towards, and then against, the Graceful Tree Conjecture: some promiscuous results // I.C.A. Bulletin. – 2008. – N 53. – P. 31–46.
19. *Krishnaa A.A.* study of the major graph labelings of trees // Informatica. – 2004. – N 15. – P. 515–524.
20. *Jesse Gilbert*. A Complete Proof of the Graceful Tree Conjecture Using the Concept of Edge Degree, Jan. 9, 2009. – Access Mode: arXiv:0709.2201 [cs.DM]
21. Towards the Graceful Tree Conjecture: A survey / M. Alfalayleh, L. Brankovic, H. Giggins et al. // Proc. AWOCA2004, 7–9 July, Ballina, Austrtalia, 2004.

Поступила 09.04.2015
E-mail: *quitar-player@meta.ua*

Д.А. Петренюк

Грациозные деревья. Анализ проблемы и перспективы

Введение. Гипотеза о грациозности деревьев – одна из наиболее популярных математических гипотез, которая впервые была сформулирована в 1976 г. [1], и с того времени попытки доказать или опровергнуть ее не прекращаются. Несмотря на значительный интерес к гипотезе за рубежом, в Украине этой теме до сих пор уделялось мало внимания. Предложенная функция разметки вершин графа получила название β-*оценки* [1]; позднее такую разметку назвали *грациозной*, и теперь этот термин употребляется наиболее широко [2].

Существует два основных подхода к решению проблемы истинности гипотезы о грациозности деревьев. Первый из них состоит в доказательстве грациозности и получении алгоритмов грациозной разметки для отдельных классов деревьев. Если бы удалось продемонстрировать грациозность всех возможных классов деревьев, то гипотеза была бы доказана. Сегодня грациозность доказана для целого ряда классов деревьев. Найдено значительное количество методов объединения нескольких грациозных деревьев для получения большего грациозного дерева. Наиболее весомые из этих результатов рассмотрены в данной статье.

Другой подход к ответу на вопрос о грациозности всех деревьев состоит в использовании компьютера для проверки грациозности деревьев, количество вершин которых не превышает заданной конечной величины. Такой подход – дополнительный источник алгоритмов грациозной разметки деревьев. Он также может быть использован для опровержения гипотезы, если будет найдено хотя бы одно дерево, не допускающее грациозной разметки. Однако такое дерево пока не найдено. В 2010 г. использован детерминированный алгоритм поиска с возвращением и доказано, что все деревья, имеющие не более 35 вершин, грациозны [3].

Постановка задачи

Грациозной разметкой неориентированного графа G с n ребрами называют такое взаимно однозначное соответствие между множеством вершин графа G и множеством $\{0, 1, 2, ..., n\}$, где все индуцированные метки ребер различны. Индуцированная метка ребра – это абсолютная величина разности между номерами (метками) двух его концов. Другими словами, разметка φ грациозна, если φ: $V \to \{0, 1, 2, ..., |E|\}$ есть инъективным отображением и если все ребра графа G имеют разные метки из множества $\{1, 2, ..., |E|\}$. В [1] также показано, что существование грациозной разметки для заданного графа G с n ребрами – достаточное условие существования циклического разложения полного графа порядка $2n + 1$ на подграфы, изоморфные графу G. Пример такого разложения для $n = 3$ показан на рис. 1.

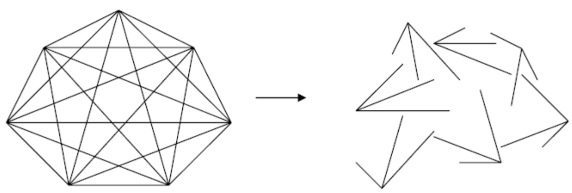

Рис. 1

Граф считается *грациозным*, если допускает грациозную разметку. Знаменитая *гипотеза о грациозности деревьев* (также известная как гипотеза Рингеля–Коцига, гипотеза Росы или гипотеза Рингеля–Коцига–Росы) заключается в том, что все деревья грациозны.

Гипотеза о грациозности деревьев до сих пор не доказана и продолжает привлекать внимание профессионалов и любителей. Сегодня поток публикаций о грациозности деревьев не прекращается, поэтому отслеживать все новые результаты достаточно сложно. Далее перечислены основные классы деревьев, грациозность которых уже доказана.

Классы грациозных деревьев

Звезда

Звездой называют дерево, имеющее не более одной вершины, степень которой превышает *единицу*, а все остальные вершины имеют степень *единица*. Доказано, что все звезды грациозны. На рис. 2 изображена грациозно размеченная звезда.

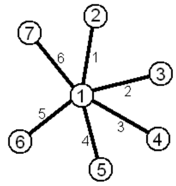

Рис. 2

Цепь

Цепью называют дерево, имеющее лишь две вершины (концы цепи) степени *единица*, а степень всех остальных вершин равна двум. В любой цепи допускается грациозная разметка. Грациозно размеченные цепи показаны на рис. 3.

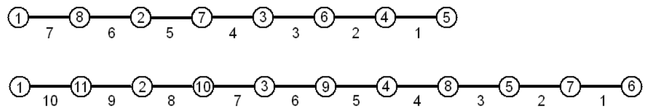

Рис. 3

Гусеница

Гусеницей (или *однодистантным деревом* [4]) называют дерево, которое после удаления всех висячих вершин (т.е. вершин степени *один*) превращается в цепь. Во всех гусеницах допускается грациозная разметка. Грациозно размеченные гусеницы показаны на рис. 4.

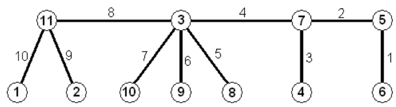

Рис. 4

Оливковые деревья

Оливковое дерево – это совокупность i цепей, соединенных в одной вершине, причем длина i-й цепи равна i. Доказано [5], что все оливковые деревья дерева грациозны. Грациозно размеченное оливковое дерево показано на рис. 5.

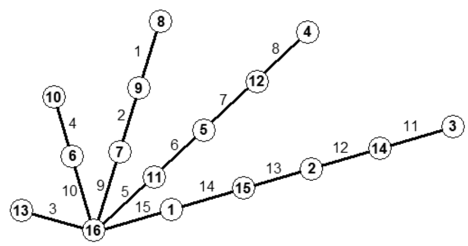

Рис. 5

Грациозность некоторых видов омаров

Омаром (или *двудистантным деревом* [4]) называют дерево, которое после удаления всех висячих вершин превращается в гусеницу (рис. 6). Другими словами, омаром называют дерево, содержащее цепь (хребет), расстояние от которой до каждой вершины не превышает двух.

В 1979 г. автор [6] высказал гипотезу о том, что все омары грациозны. Было предпринято много попыток доказать эту гипотезу, однако до сих пор никому не удалось это сделать. Сегодня известны следующие грациозные подклассы омаров.

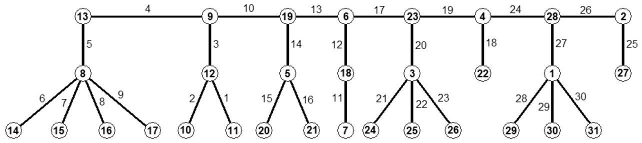

Рис. 6

Ф е й е р в е р к и

Фейерверк F – это дерево, состоящее из цепи $P(F)$ и множества звезд, когда вершина цепи $P(F)$ соединена с центральной вершиной одной звезды. Доказано [7], что все фейерверки грациозны. На рис. 6 показан грациозно размеченный фейерверк.

(2, *k*)-г у с е н и ц ы

Дерево, полученное присоединением к каждой вершине некоторой цепи r цепей длины k, называют (r, k)-*гусеницей*. Простой способ получения грациозной разметки для отдельного подкласса омаров – (2, 2)-гусениц предложен в [8]. Грациозно размеченная (2, 2)-гусеница показана на рис. 7.

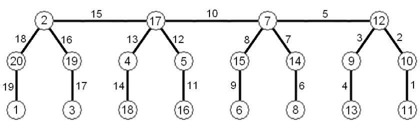

Рис. 7

О м а р ы с с о в е р ш е н н ы м и п а р о с о ч е т а н и я м и

Паросочетанием в графе называют множество ребер этого графа, не имеющих общих вершин. *Совершенным паросочетанием*, или 1-*фактором* в графе называют паросочетание, содержащее все вершины данного графа. Доказано [4], что все омары с совершенными паросочетаниями – грациозны.

Банановые деревья и обобщенные банановые деревья

Банановое дерево состоит из совокупности звезд и вершины v, причем одна конечная вершина каждой звезды соединена с вершиной v (рис. 8). Все банановые деревья и обобщенные банановые деревья (графы, полученные соединением одной вершины с одной конечной вершиной каждой из любого количества звезд, где соединение достигается при помощи цепи длиной не менее двух), – грациозны [9].

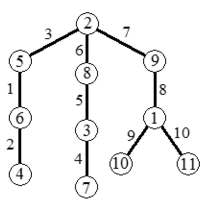

Рис. 8

Семейство грациозных пауков

Паук – это дерево, имеющее одну вершину со степенью, превышающей два. Если такая вершина существует, ее называют *узловой* вершиной дерева. *Ногой* паука называют любую из цепей, соединяющую узловую вершину с конечной вершиной дерева.

Каждое дерево-паук T с l ногами, каждая из которых имеет длину из промежутка $\{m, m+1\}$ для некоторого $m > 1$, грациозное [10]. Грациозная разметка такого дерева-паука с семью ногами и 18 вершинами показана на рис. 9.

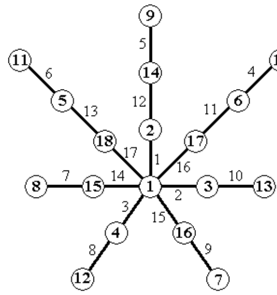

Рис. 9

Симметричные деревья

Симметричное дерево – это корневое дерево, у которого степень всех вершин, расположенных на одинаковом расстоянии от корня, одинакова.

Грациозность всех симметричных деревьев доказана в 1975 г. [11]. Грациозно размеченное симметричное дерево показано на рис. 10.

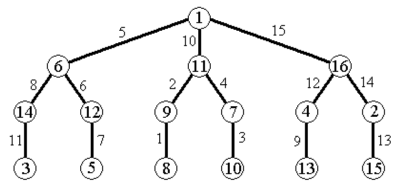

Рис. 10

Деревья, диаметр которых не превышает пяти

Диаметр дерева – это длина самого длинного маршрута в этом дереве. Все деревья диаметра пять – грациозны. Показано в 2001 г. [12].

Методы получения больших грациозных деревьев из меньших

Присоединение гусеницы к грациозно размеченному дереву

Если к вершине с номером 1 грациозно размеченного дерева G_n присоединить гусеницу, то полученное дерево допускает грациозную разметку [13]. Гусеница должна присоединяться крайней вершиной ее хребта (рис. 11).

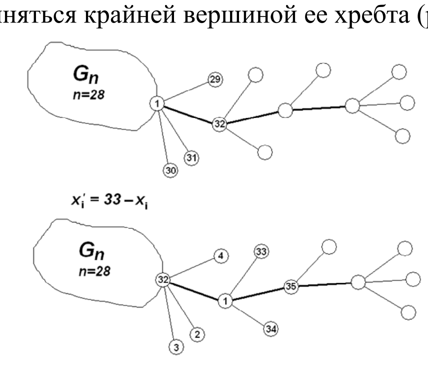

Рис. 11

Деление ребер грациозного дерева

В 1998 г.в [14] показано, что все деревья, полученные из грациозных деревьев заменой каждого ребра цепью длины два, также грациозны (рис. 12).

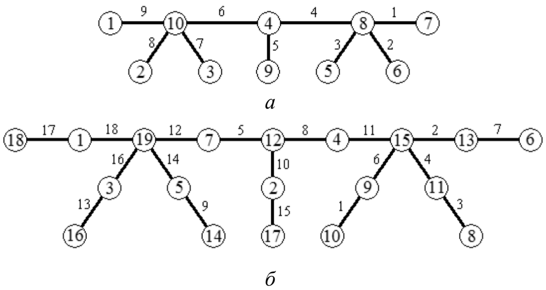

Рис. 12

Гирляндное построение

Гирляндным построением называют получение нового дерева путем присоединения к каждой висячей вершине звезды изоморфной копии грациозного дерева T вершиной, соответствующей вершине v дерева T, получающей при грациозной разметке метку 1 или n.

Дерево, полученное путем гирляндного построения, – грациозно [15]. Гирляндное построение, при помощи которого из трех копий бананового дерева порядка 11 (*а*) получено большее грациозное дерево порядка 34 (*б*), показано на рис. 13.

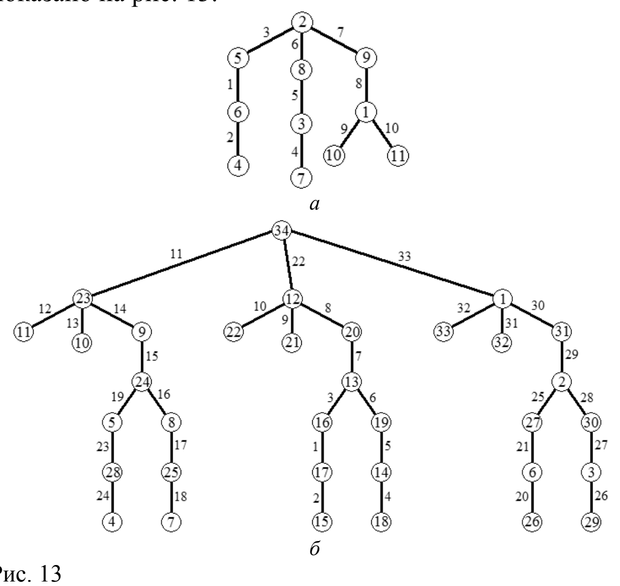

Рис. 13

Δ-построение

Δ-построением называют получение нового дерева из двух грациозных деревьев путем присоединения к каждой вершине одного грациозного дерева (*дерева–хозяина*) изоморфной копии другого грациозного дерева T вершиной, соответствующей некоторой произвольно выбранной фиксированной вершине v дерева T.

Любое дерево, полученное путем Δ-построения, – грациозно [16]. Пример получения грациозного дерева (*б*) из двух меньших грациозных деревьев (*а*) при помощи Δ-построения показан на рис. 14.

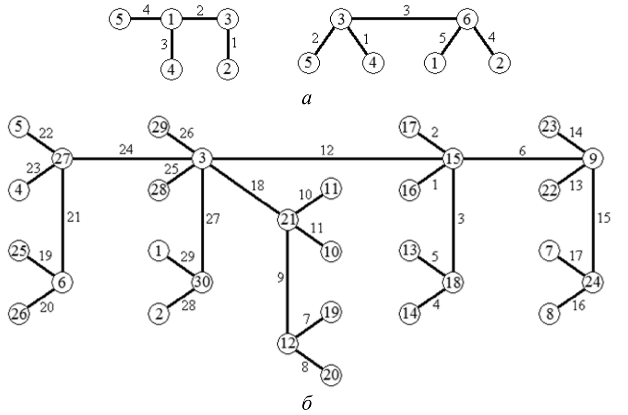

Рис. 14

Построение присоединением

Построение присоединением – это получение нового дерева путем идентификации корней произвольного числа копий заданного грациозного дерева в одной вершине r; вершину r будем называть особенной вершиной построенного дерева. Любое дерево, полученное путем построения присоединением, грациозно [16].

Расширенные гирляндное построение, Δ-построение и построение присоединением

В 2008 г.в [17] расширены некоторые результаты [16] введением понятия грациозно совместимых деревьев и доказательством так называемой теоремы подстановок.

Два грациозно размеченных дерева T_1 и T_2 с $|V(T_1)| = |V(T_2)|$ будем называть *грациозно совместимыми*, если выполняется одно из следующих условий:

- грациозно размеченные деревья T_1 и T_2 идентичны;
- разметки θ_1 и θ_2 строго грациозны с одинаковой мощностью, а также $\theta_1(w_1) = \theta_2(w_2)$.

Семейство грациозно совместимых деревьев (мощность грациозной разметки каждого из деревьев $k = 1$) показано га рис. 15.

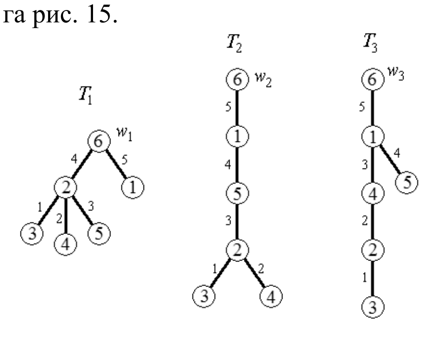

Рис. 15

Расширенные гирляндное построение, Δ-построение и построение присоединением выполняются аналогично, но вместо копий одного грациозного дерева используются деревья из некоторого семейства грациозно совместимых деревьев. В [17] доказано, что деревья, полученные расширенным построением, грациозны. Примеры гирляндного построения, расширенного построения присоединением и Δ-построением показаны на рис. 16, 17, 18 соответственно. Использованы деревья T_1, T_2, T_3 из рис. 15.

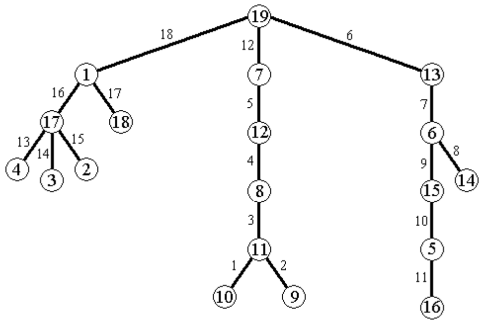

Рис. 16

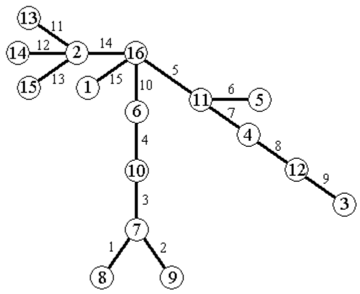

Рис. 17

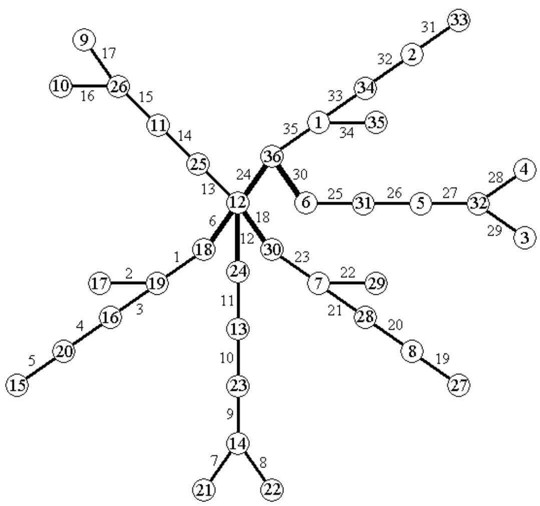

Рис. 18

Аргументы против гипотезы и заключение. Оба описанные подхода к изучению гипотезы о грациозности деревьев до сих пор давали лишь подтверждения гипотезы. Однако некоторые исследователи высказывают сомнения относительно ее истинности. В частности, в [18] отмечено, что подавляющее большинство методов построения грациозной разметки было разработано для деревьев, обладающих некоторыми признаками регулярности (звезды, симметричные деревья) либо характеризуются достаточно простой структурой (гусеницы, фейерверки). В то же время полностью отсутствуют доказательства грациозности в случаях достаточно нерегулярных деревьев (даже грациозность всех омаров пока не доказана). Среди эффективных путей критики гипотезы назван анализ всех возможных грациозных разметок некоторых грациозных деревьев, который позволил бы оценить влияние структуры дерева на возможные номера его вершин. По мнению автора [18], некоторые деревья со сложным строением могут накладывать настолько серьезные ограничения на метки вершин, что грациозность этих деревьев будет поставлена под сомнение. Хотя поиск грациозных разметок для всех деревьев с количеством вершин до 35 включительно признается весомым аргументом в пользу истинности гипотезы. Этот факт никоим образом не исключает возможности существования неграциозных деревьев, имеющих более 35 вершин.

Так или иначе, рано говорить о полном доказательстве или опровержении гипотезы о грациозности деревьев, несмотря на то, что с момента ее появления прошло почти полстолетия. В 2004 г. [19] и в 2009 г. [20] предложены варианты доказательства гипотезы, но они оказались ошибочными либо неполными.

Тем не менее, сегодня подавляющее большинство исследователей склоняется к вере в справедливость гипотезы о грациозности деревьев, принимая во внимание доказанную грациозность многих классов деревьев, результаты компьютерного поиска и полное отсутствие контрпримеров. Как заметил один исследователь, «вера в справедливость гипотезы о грациозности деревьев настолько сильна, что если бы даже действительно было найдено дерево, не допускающее грациозной разметки, его, скорее всего, не признали бы деревом» [21].

UDC 519.17

D.A. Petreniuk

Graceful Trees: the State of Arts and the Prospects

Graceful Tree Conjecture is one of the most popular math conjectures. It was formulated almost half a century ago, but even today it is still far from being completely solved. A. Krishnaa in 2004 and J. Gilbert in 2009 [19] proposed their proofs of the Conjecture, but they turned out to be wrong or incomplete. The article contains a brief review of the state of art in solving the Conjecture, including some results that have been proposed by the author.

Окончание на стр. 33

Graceful labeling of undirected graph G with n edges is an injection from vertex set of graph G to $\{0, 1, 2, ..., n\}$ such that all the induced edge labels are different. Induced edge label is the absolute value of the difference between the labels (numbers) of the two end-vertices of the edge. A graph is *graceful* if it admits graceful labeling. The *Graceful Tree Conjecture* claims that all trees are graceful.

There are two approaches to solving the Graceful Tree Conjecture. The first is to prove gracefulness and obtain graceful labeling algorithms for certain classes of trees; if once gracefulness of all classes of trees is shown, then the Conjecture is proved. For today, gracefulness is proved for stars, paths, caterpillars, olive trees, some subclasses of lobsters (firecrackers, (2,2)-caterpillars, lobsters with perfect matchings), banana and generalized banana trees, and some other classes. Many methods of combining few graceful trees to obtain a new bigger graceful tree have been found.

Another approach to solving the conjecture is to use computer to check if all trees with number of vertices not exceeding a given value are graceful. This approach can provide new graceful labeling algorithms and can be also used to disprove the Conjecture, once at least one tree that does not admit graceful labeling is found. However, no such tree has been found so far. It has been proved that all the trees having not more than 35 vertices are graceful.

Despite all the positive results, some researchers express serious doubts about the truthfulness of the Conjecture. They point out that the most graceful labeling methods have been designed for trees with regular or very simple structure, while there are no proofs of gracefulness for sufficiently irregular trees. However, the majority or researchers tend to believe that the Graceful Tree Conjecture is true and will be once proved completely.

●