УДК 313.42

Л.М. Малярец, А.В. Воронин, О.В. Гунько

Теоретические проблемы экономического роста

Рассмотрена математическая модель экономического роста, представляющая собой модификацию модели Харрода-Домара. В результате анализа поведенческих свойств предложенного экономического механизма выявлена гиперболическая динамика накопления капитала с конечным временем жизни макроэкономической системы.

Ключевые слова: капитал, доход, экономический рост, гипербола, кризис, уравнение Вольтерра, лог-периодические колебания, гипергеометрическое уравнение.

Розглянуто математичну модель економічного зростання, яка є модифікацією моделі Харрода–Домара. В результаті аналізу поведінкових властивостей запропонованого економічного механізму виявлено гіперболічну динаміку накопичення капіталу з кінцевим часом життя макроекономічної системи.

Ключові слова: капітал, дохід, економичне зростання, гіпербола, кризис, рівняння Вольтерра, лог-періодичні коливання, гіпергеометричне рівняння.

Введение. Кризисные явления в мировой экономике требуют создания новых теорий экономической эволюции либо пересмотр традиционных устоявшихся учений о закономерностях экономического роста. Особенности проведения анализа процессов глобализации, затронувшей всю мировую хозяйственную систему, обуславливают необходимость создания динамических моделей, ориентированных на получение долгосрочных, среднесрочных и краткосрочных прогнозов основных макроэкономических показателей. Все это укрепляет аналитическую основу для эффективной государственной экономической политики, направленной на устойчивый экономический рост с соблюдением соответствующих социальных стандартов качества жизни населения в условиях периодически появляющихся экономических кризисов. В экономической истории в мельчайших подробностях освещен факт того, как один из самых серьезных мировых экономических кризисов 1929–1933 гг. послужил толчком к созданию теории Дж.М. Кейнса и его последователей, существенно изменившие представления о ходе развития экономических процессов. Отметим, что, по мнению кейнсианцев, основной показатель состояния экономики – национальный доход (внутренний валовой продукт – ВВП), а модель отражает балансовое соотношение между уровнем ВВП и инвестиционной активностью.

Постановка задачи

Наиболее значимыми достижениями в теории экономического роста в духе кейнсианской традиции представляются модельные механизмы, созданные Р. Харродом и Е. Домаром. Краткое описание данного подхода будет рассмотрено авторами, следуя работе А.В. Прасолова [1]. Исходя из того, что инвестиции в основные фонды (капитал) составляют некоторую часть дохода, это ведет к увеличению основных фондов и, соответственно, к росту производства продукции. В самом упрощенном варианте данная модель формирует балансовые соотношения между национальным доходом Y, капиталом K и инвестициями I. Считается, что доход пропорционален основному капиталу: $K(t) = \nu Y(t)$, где t – время, ν – коэффициент оборота. Инвестиции служат источником прироста основного капитала, т.е. пропорциональны первой производной капитала по времени: $\dot{K}(t) = I(t)$. Также выдвинуто предположение о том, что часть дохода, направленная на инвестиции, постоянна: $I(t) = sY(t)$, где $0 < s < 1$ предельная склонность к сбережению.

Объединяя приведенные соотношения, получим систему трех идентичных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, имеющих решения:

$$K(t) = K_0 e^{\sigma t}; \quad I(t) = I_0 e^{\sigma t}; \quad Y(t) = Y_0 e^{\sigma t};$$
$$\sigma = \frac{s}{\nu}; \quad K_0 = K(0); \quad I_0 = I(0);$$
$$Y_0 = Y(0); \quad I_0 = \sigma K_0; \quad K_0 = \nu Y_0. \qquad (1)$$

Из системы формул (1) очевиден факт экспоненциального роста всех базовых переменных с постоянным темпом σ, имеющим размерность обратного времени.

Также в [1] утверждается, что модель имеет краткосрочный характер, поскольку длительное время капитал, доход и инвестиции устремляются в бесконечность, что естественно противоречит экономической действительности.

Анализ исследований и публикаций

В 2001 г. А. Мэддисоном [2] были опубликованы данные по динамике мирового ВВП сначала эры по 1973 г., которые характеризуют тенденцию роста ВВП как квадратично-гиперболическую зависимость дохода от времени

$$Y(t) = \frac{C}{(t_0 - t)^2}, \qquad (2)$$

где $Y(t)$ – мировой ВВП в миллиардах международных долларов 1990 г. в паритетах покупательной способности в год t; C = 17355487,3; $t_0 = 2005,56$. Значение $t_0 = 2005,56$ есть не что иное как 23 июля 2005 г., символизирующее так называемый *экономический конец света* [3]. По всей видимости с 1970 годов темпы экономического развития стали замедляться вследствие чего не оправдался алармистский прогноз на 2005 г.

Таким образом, эмпирическая зависимость (2) свидетельствует о неадекватности экспоненциального роста экономики на базе модели Харрода в дифференциальной форме, так как из системы (1) следует неизбежность макроэкономического роста на неограниченном временном интервале. В работах [4, 5] достаточно подробно проанализированы дефекты вышеуказанной модели, обусловленные применением категориального аппарата непрерывного анализа к соотношениям, природа которых заведомо дискретна.

По мнению авторов [4, 5], наиболее уязвимым местом в модели Харрода есть соотношение $K(t) = \nu Y(t)$, где ν – постоянная величина. Из данного соотношения следует, что доход мгновенно превращается в капитал, т.е. процесс преобразования не учитывает реальную экономическую ситуацию и, соответственно, обе величины меняются в одном темпе, а отношение *капитал–доход* остается постоянным. Взамен этого предполагается динамическая взаимосвязь между капиталом $K(t)$ и доходом $Y(t)$, где вместо мгновенного значения $Y(t)$ берут среднюю величину дохода за период времени t

$$K(t) = \frac{\nu}{t} \int_0^t Y(\tau) d\tau. \qquad (3)$$

Соотношение (3) характеризует кумулятивный процесс формирования капитала и в момент $t = 0$ выполнено условие $K_0 = \nu Y_0$. Интегрируя выражение $\dot{K}(t) = I(t) = sY(t)$ с начальным условием $K(0) = K_0$, получаем

$$K(t) = K_0 + s \int_0^t Y(\tau) d\tau. \qquad (4)$$

Выражая интеграл из (3) и подставляя в (4), легко найти выражение для $K(t)$:

$$K(t) = \frac{K_0}{1 - \sigma t}, \quad \sigma = \frac{s}{\nu}. \qquad (5)$$

Дифференцируя по времени (5), получим

$$\frac{K_0 \sigma}{(1 - \sigma t)^2} = sY(t) \quad \text{или} \quad Y(t) = \frac{Y_0}{(1 - \sigma t)^2}. \qquad (6)$$

Из формул (5) и (6) очевидным образом выявляется связь

$$K(t) = (\nu - st) Y(t). \qquad (7)$$

Соотношения (5–7) явным образом подчеркивают различие в динамике капитала и дохода: капитал растет в гиперболической зависимости, а доход – в квадратично-гиперболической. При этом отношение *капитал-доход* есть линейная убывающая функция времени.

Выражение для динамики капитала (5) в момент времени $t^* = \sigma^{-1} = \nu/s$ имеет особенность, называемую критичностью или моментом обострения. Если в выражении (3) и (4) подставить значение $t = \sigma^{-1}$ и приравнять их, то в рассматриваемый момент времени $K_0 = 0$. Иначе говоря, в критический момент времени ν/s начальный капитал полностью обесценивается и в (5) имеет место неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$. Такую ситуацию можно аргументировать с позиций возникновения экономического кризиса с выделенным моментом времени, так называемым *горизонтом прогноза*. На рис. 1 представлены траектории относительного роста дохода по формулам (1) и (6) для параметров $s = 0{,}45$ и $\nu = 9$ лет, т.е. $\sigma^{-1} = 20$ лет на временном интервале $0 < t < 20$. Очевидно, что квадратичная гипербола существенно быстрее растет во времени, чем экспонента.

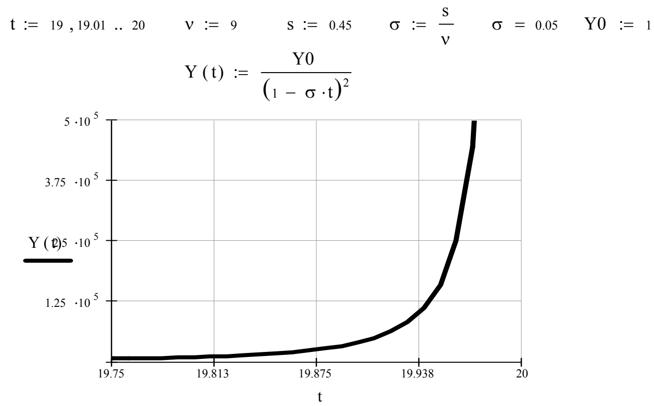

Рис. 1. Траектории относительного роста дохода

Основные результаты

Из анализа выражения для критического момента наступления кризиса следует, что данная величина увеличивается, если возрастает ν – коэффициент оборота капитала и уменьшается s – предельная склонность к сбережению. То есть, чем меньше мы сберегаем (больше потребляем), тем позже наступит кризис.

Существуют ли другие подходы по предотвращению кризисных явлений в экономике или минимизации их последствий? По всей видимости, вполне логичным было бы учесть условия, регулирующие экономический рост. Соответствующий процесс можно реализовать с учетом амортизации капитала. Одна из самых простых моделей такого рода построена на том, что инвестиции направлены не только на увеличение новых основных фондов, но и на возмещение выбывших:

$$I = \dot{K} + \alpha K\,, \tag{8}$$

где α – коэффициент амортизации капитала, измеряемый в обратном времени. Для получения дифференциального уравнения, описывающего динамику капитала, необходимо продифференцировать выражение (3):

$$t \cdot \dot{K} + K = \nu \cdot Y(t)\,. \tag{9}$$

Сопрягая (8) и (9) с учетом $I = sY$, имеем

$$\dot{K} = \frac{\sigma - \alpha}{1 - \sigma t} K\,,\;\; K(0) = K_0\,. \tag{10}$$

Из (10) нетрудно определить, что

$$K(t) = K_0 (1 - \sigma t)^{\frac{\alpha}{\sigma} - 1}\,. \tag{11}$$

Очевидно, что капитал будет возрастать при выполнении условия $\alpha < \sigma$. В случае равенства $\alpha = \sigma$ капитал остается постоянным и равным начальному, т.е. $K(t) \equiv K_0$. При помощи (9) и (11) с учетом того, что $K_0 = \nu Y_0$ можно показать связь между капиталом и доходом, а также вывести формулу изменения дохода:

$$K(t) = \frac{\nu - st}{1 - \alpha t} Y(t)\,, \tag{12}$$

$$Y(t) = (1 - \alpha t)(1 - \sigma t)^{\frac{\alpha}{\sigma} - 2} Y_0\,. \tag{13}$$

Из (11) – (13) следует, что амортизация – фактор замедления экономического роста при $\alpha < \sigma$, но момент наступления кризиса $t^* = \sigma^{-1}$ не устраняется.

На рис. 2 представлены зависимости капитала от времени при $\sigma = 0{,}05$ и $\alpha_1 = 0{,}00$, $\alpha_2 = 0{,}01$, $\alpha_3 = 0{,}025$, $\alpha_4 = 0{,}04$. Результаты моделирования убедительно подтверждают, что с ростом α, т.е. приближении отношения α/σ к единице, рост капитала $K(t)$ существенно уменьшается.

Рассмотрим еще одну модификацию исходной модели, особенностью которой есть протяженность во времени инвестиционного процесса. При этом предполагается, что на рост капитала влияют лишь реализованные инвестиции $I^*(t)$, т.е. $\dot{K} = I^*(t)$, а в целом происходит накопление инвестиционной составляющей $I(t) = \int_0^t \eta(t,\tau) I^*(\tau)\, d\tau$ или

$$I(t) = \int_0^t \eta(t,\tau) \dot{K}(\tau)\, d\tau\,, \qquad (14)$$

где $\eta(t,\tau)$ – заданная функция.

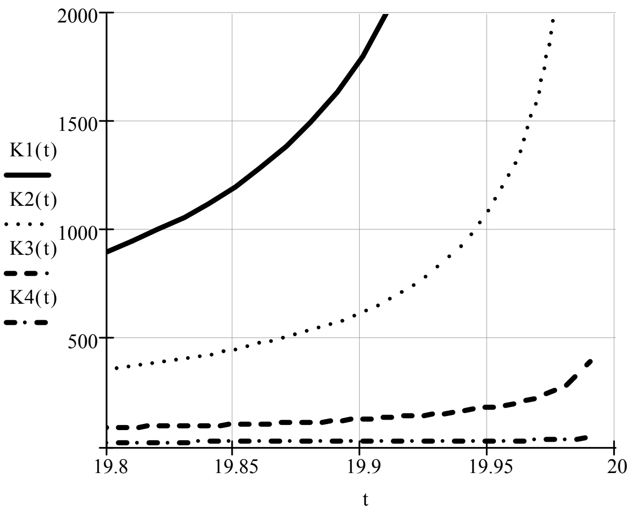

Рис. 2. Зависимость динамики капитала от различных коэффициентов амортизации

$\alpha = 0{,}00$, $\alpha = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}025$, $\alpha = 0{,}04$

Соотношения (14) и (9) с учетом $\dot{I} = sY$ определяют систему

$$\begin{cases} t\dot{K} + K = \dfrac{\dot{I}}{\sigma}, \\ \dot{I} = \displaystyle\int_0^t \eta(t,\tau)\dot{K}(\tau)d\tau, \end{cases} \qquad (15)$$

описывающую динамическое взаимодействие инвестиций и капитала. Исключая из системы (15) функцию $I(t)$, получим интегродифференциальное уравнение для изменения капитала $K(t)$:

$$\sigma \cdot t \cdot \dot{K} + \sigma K - \int_0^t \eta(t,\tau)\dot{K}(\tau)\, d\tau = 0\,. \qquad (16)$$

Если ввести новую переменную $z(t) = \dot{K}(t)$, то (16) примет вид интегрального уравнения для нахождения $z(t)$:

$$z(t) + \frac{1}{t}\int_0^t \left(1 - \frac{\eta(\theta)}{\sigma}\right) z(\tau)\, d\tau = 0\,. \qquad (17)$$

Допустим, что функция $\eta(t,\tau) = \eta\left(\dfrac{\tau}{t}\right)$. В таком случае однородное уравнение (17) может иметь нетривиальные решения. При этом вид собственных функций этого интегрального уравнения зависит от корней трансцендентного (алгебраического) уравнения относительно параметра λ:

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{\eta(\theta)}{\sigma}\right)\theta^\lambda d\theta + 1 = 0\,. \qquad (18)$$

Согласно с А.Д. Поляниным, А.В. Манжировым [6] имеет место следующая классификация решений (17).

- Действительным однократным корням λ_k уравнения (18) соответствуют собственные функции $z_k(t) = t^{\lambda_k}$.
- Действительным однократным корням λ_k кратности m соответствуют m собственных функций $z_{k1}(t) = t^{\lambda_k}$, $z_{k2}(t) = t^{\lambda_k}\ln t, \ldots,$ $z_{km}(t) = t^{\lambda_k}\ln^{m-1} t$.
- Комплексным однократным корням $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ соответствует пара собственных функций

$$z_k^1(t) = t^{\alpha_k}\cos(\beta_k \ln t), \quad z_k^2(t) = t^{\alpha_k}\sin(\beta_k \ln t)\,.$$

- Комплексным корням λ_k кратности m соответствуют m пар собственных функций

$z'_{k1}(t) = t^{\alpha_k}\cos(\beta_k \ln t)$	$z^2_{k1}(t) = t^{\alpha_k}\sin(\beta_k \ln t)$
$z'_{k2}(t) = t^{\alpha_k}\ln t \cdot \cos(\beta_k \ln t)$	$z^2_{k2}(t) = t^{\alpha_k}\ln t \cdot \sin(\beta_k \ln t)$
....	....
$z'_{km}(t) = t^{\alpha_k}\ln^{m-1} t \cdot cos(\beta_k \ln t)$	$z^2_{km}(t) = t^{\alpha_k}\ln^{m-1} t \cdot \sin(\beta_k \ln t)$

Общее решение однородного уравнения (17) есть не что иное как линейная комбинация собственных функций.

Кроме того, нетрудно заметить, что уравнение (18) очевидным образом преобразуется к виду

$$\int_0^1 \eta(\theta)\theta^{\lambda}d\theta = \sigma\frac{\lambda+2}{\lambda+1}. \qquad (19)$$

Пусть, например, $\eta(\theta)$ – линейная функция параметра θ, т.е. $\eta(\theta)=\eta_0+\eta_1\theta$, где η_0,η_1 – заданные постоянные величины. В результате подстановки в (19) и интегрирования получаем соотношение

$$\frac{\eta_0}{\lambda+1}+\frac{\eta_1}{\lambda+2}=\frac{\sigma(\lambda+2)}{\lambda+1},$$

которое равносильно при $\lambda\neq-1,\lambda\neq-2$ квадратному уравнению для нахождения параметра λ

$$\sigma\lambda^2+(4\sigma-\eta_0-\eta_1)\lambda+4\sigma-2\eta_0-\eta_1=0. \qquad (20)$$

Уравнение (20) может иметь два действительных, один двукратный и два комплексно-сопряженных, корня. Следовательно, решения (17) будут иметь вид, соответствующий первым трем формам из четырех описанных выше собственных функций. Если предположить, что выполнено условие $4\sigma=\eta_0+\eta_1$, то уравнение (20) запишется в виде $\lambda^2+\beta^2=0$, где $\beta^2=\frac{-\eta}{\sigma}$. Тогда в качестве решения (17) примем

$$z(t)=C_1\cos(\beta\ln t)+C_2\sin(\beta\ln t) \qquad (21)$$

и, соответственно, получим выражение для капитала

$$K(t)=\int_0^t \big(C_1\cos(\beta\ln\tau)+C_2\sin(\beta\ln\tau)\big)d\tau, \qquad (22)$$

где C_1,C_2 – произвольные постоянные.

Таким образом, динамика капитала и инвестиций может иметь характер лог-периодических колебаний, природа которых в настоящее время интенсивно изучается.

Рассмотрим еще один важный случай задания $\eta(t,\tau)=\mu e^{-\mu(t-\tau)}$, где $\mu>0$ – постоянная времени акселератора. В таком случае уравнение (17) трансформируется к виду

$$\sigma\left(t\cdot z(t)+\int_0^t z(\tau)d\tau\right)=\int_0^t \mu e^{-\mu(t-\tau)}z(\tau)d\tau. \qquad (23)$$

Дифференцируя левую и правую части (23) по времени t, получим:

$$\left(\sigma\cdot t\cdot\dot z+2\sigma z\right)=-\mu\int_0^t \mu e^{-\mu(t-\tau)}z(\tau)d\tau+\mu z$$

или

$$\sigma\cdot t\cdot\dot z+(2\sigma-\mu)z+\mu\sigma\left(tz+\int_0^t z(\tau)d\tau\right)=0. \qquad (24)$$

Возвращаясь к исходной переменной $K(t)=\int_0^t z(\tau)d\tau$ после необходимых преобразований имеем дифференциальное уравнение второго порядка для описания динамики капитала $K(t)$:

$$t\ddot K+\left(\mu t+2-\frac{\mu}{\sigma}\right)\dot K+\mu K=0. \qquad (25)$$

Если ввести новый масштаб времени при помощи соотношения $\tau=-\mu t$, то дифференциальное уравнение (25) предстанет в форме вырожденного гипергеометрического уравнения:

$$\tau\ddot K+(b-\tau)\dot K-aK=0 \qquad (26)$$

где $b=2-\frac{\mu}{\sigma}, a=1$ – соответствующие числовые параметры.

В известном справочнике Э. Камке [7] имеется исчерпывающая информация о свойствах решений вырожденного гипергеометрического уравнения, а также приведена обширная библиография по данной проблематике. Мы рассмотрим только лишь самый простой случай такого сочетания параметров, когда $\mu=\sigma$. Тогда (25) примет форму

$$t\ddot K+(\mu t+1)\dot K-\mu K=0$$

с решением в виде квадратуры

$$K(t)=e^{-\mu t}\left(C_2+C_1\int_0^t \frac{e^{\mu t}}{\tau}d\tau\right). \qquad (27)$$

Заключение. Акцентировано внимание на том, что все рассмотренные в статье модификации классических математических моделей экономического роста по своей структуре – линейны. Данный факт допускает возможность применения методологии эконометрического анализа динамических систем в традиционной постановке для решения задач прогнозирования реальных нестационарных экономических процессов.

1. *Прасолов А.В*. Математические методы экономической динамики: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2008. – 352 с.
2. *Maddison F*., 2001. Monitoring the World Economy: A Millenial Perspective: Paris, OECD.
3. *Акаев А.А*., *Коротаев А.В*., *Малинецкий Г.Г.* Прогноз и моделирование кризисов и мировой динамики. – М.: Изд-во ЛКИ, 2010 – 352 с.
4. *Perchik E.* The Problem of Modeling of Economic Dynamics (new version), **arXiv:1003.4382v1**.
5. *Chernyshov S.I.*, *Voronin A.V.*, *Razumovsky S.A.* Fundamental defect of the macroeconomic thinking as one of the main causes of the crisis endured, **arXiv:1004. 3067v1**.
6. *Манжиров А.В*., *Полянин А.Д*., Справочник по интегральным уравнениям. Точные решения. – М.: Факториал, 1998. – 432 с.
7. *Камке Э*. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 578 с.

Поступила 09.04.2015

E-mail: *Lyudmila.Malyarets@m.hneu.edu.ua*, *malyarets@ukr.net*, *voronin*61*@ukr/net*

UDC 313.42

L.M. Malyarets, A.V. Voronin, O.V. Gunko

Theoretical problems of the economic growth

Keywords: capital, income, economic growth, hyperbole, crisis, Volterra equation, log-periodic oscillations, hypergeometric equation.

The given work is devoted to analysis of traditional procedure of forming up the differential equations, which are used for modeling macroeconomic processes.

There is a number of contradictions which were not evaluated properly in due time. In the process of investigations related to the search of the overcoming, alternative concepts of mathematical modeling for economic dynamics are set up. The incorrectness of the Harrod’s model, widely presented in corresponding literature, is determined. According to this model, there is the possibility of macroeconomic growth on the unlimited time period. The incorrectness is explained by the application of standard mechanism of continuous analysis for balance correlations, which, in fact, are discrete. The correct model of economic growth is set up; this model indicates the inevitability of economic crisis appearance. This model is based on the integral dependence of capital on income.

This model gives a constructive opportunity for crisis prevention. The time estimation for crisis is given. It is shown that economic activity activation accelerates the crisis events.

In order to weaken possible crisis consequences, the model of economic dynamics is proposed. It is done taking into account the capital depreciation that leads to showing down the economic growth.

In conclusion it is drawn that the depreciation limits the process of growth, but it doesn’t eliminate the time of upper turning point.

All the modifications of classical models for economic growth examined in this work are linear and homogeneous in time.

The circumstance mentioned in this work gives the possibility for application of the methodology of econometric analysis of the time series for solving the tasks of the real economic processes identification.

●

Внимание !

Авторы статей **обязательно** должны подать структурированную (*Introduction, Purpose, Methods, Results, Conclusion*) расширенную аннотацию на английском до одной стр. текста через два интервала, информацию об авторах на английском и, кроме пристатейного списка литературы (на языке статьи), список литературы в транслитерации (с указанием в скобках перевода на англ. названия ссылки).