УДК 519.816

Н.К. Тимофієва

Доведення збіжності алгоритмів комбінаторної оптимізації з використанням підкласів розв'язних задач

На примере задачи коммивояжера с использованием подклассов разрешимых задач доказана сходимость методов, основанных на распознавании структуры входной информации. Показано, что сходимость последовательности решений, построенных методом структурно-алфавитного поиска для задачи коммивояжера приближается к нулю, а сходимость метода ближайшего соседа и «жадного» алгоритма зависит от структуры входных данных.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, комбинаторная конфигурация, целевая функция, задача коммивояжера, метод структурно-алфавитного поиска, метод ближайшего соседа, «жадный» алгоритм

На прикладі задачі комівояжера з використанням підкласів розв'язних задач доведено збіжність методів, які ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації. Показано, що збіжність послідовності розв'язків, побудованих методом структурно-алфавітного пошуку для задачі комівояжера наближається до нуля, а збіжність методу найближчого сусіда та «жадібного» алгоритму залежить від структури вхідних даних.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, комбінаторна конфігурація, цільова функція, задача комівояжера, метод структурно-алфавітного пошуку, метод найближчого сусіда, «жадібний» алгоритм

Вступ. Доведення збіжності послідовності наближених розв'язків до глобального розв'язку задачі комбінаторної оптимізації, яка будується певним алгоритмом, досить складна проблема. Це пов'язано з тим, що деякі класи таких задач є нерозв'язними з причини їхньої обчислювальної складності. Для класів задач з чіткою (точно заданою) структурою вхідних даних та таких, які розв'язуються на множині перестановок, їхні математичні моделі розроблено досить ґрунтовно, а тому за змодельованою цільовою функцією теоретично можна визначити глобальне розв'язання цих задач повним перебором, який збігається з метою дослідження. В задачах з нечіткими вхідними даними (задача розпізнавання, задача кластеризації), крім кількості при обчисленні операцій, витрачених на пошук глобального розв'язання, необхідно враховувати і міри подібності, які тут відіграють основну роль та від вибору яких значною мірою залежить власне розв'язок. До того ж через ситуацію невизначеності, яка спостерігається в більшості задач комбінаторної оптимізації, одержаний за змодельованою цільовою функцією глобальний результат у них не завжди збігається з метою дослідження. При розв'язанні задач обчислювального (штучного) інтелекту досить часто використовуються методи, які класифікують як евристичні. В них пошук оптимального розв'язку, який задовольняв би мету дослідження, проводиться за тими ж правилами, яких дотримується людина на інтуїтивному рівні. Ці методи ефективні за швидкодією, але досить часто результат, одержаний таким шляхом, далекий від глобального оптимуму. Постає проблема доведення ефективності за точністю та швидкодією таких алгоритмів.

Проблемі збіжності методів та алгоритмів математичного програмування присвячено багато робіт, наприклад [1–5]. В цих роботах на формальному рівні вводяться необхідні ознаки та достатні умови їхньої збіжності. В нейронних мережах досліджують збіжність алгоритмів самонавчання. Для доведення збіжності використовують теорію рядів, функції Ляпунова тощо. Цю проблему ще зводять до задачі збіжності наближеного розв'язку операторних рівнянь. Їх використання для певного алгоритму досить складне. В роботі [5] на прикладі задач, які розв'язуються на графах, проводиться зведення NP-повної задачі до задачі P. З цією метою розробленими процедурами знаходиться нижня границя, наближена до глобального розв'язку. У комбінаторній оптимізації, як правило, розглядають обчислювальну складність розв'язання задач оптимізації та точність алгоритму.

Далі подано спосіб доведення збіжності деяких методів комбінаторної оптимізації, які ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації (метод структурно-алфавітного пошуку, метод найближчого сусіда, «жадібний» алгоритм). З цією метою використано підкласи розв'язних задач із класу задачі комівояжера. Доводиться збіжність послідовності розв'язків, які будуються оговореними алгоритмами, та встановлюється швидкість цієї збіжності.

Методи, що використовуються для розв'язання оптимізаційних задач

Для розв'язання задач із класів задач комбінаторної оптимізації виділимо такі основні методи та алгоритми [6]:

- ітераційні методи та алгоритми, що ґрунтуються на частковому переборі варіантів;
- методи та алгоритми, що ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації, які ще називають евристичними, такими, в яких моделюються правила вибору оптимального рішення в ручному режимі [7].

До ітераційних методів та алгоритмів належать як універсальні методи та алгоритми математичного програмування, так і спеціальні, які враховують специфіку даної проблеми (точні та наближені). Це – методи лінійного, цілочислового, динамічного, нелінійного, квадратичного, стохастичного програмування, серед них градієнтні методи, методи гілок і меж, послідовний аналіз варіантів, методи локального пошуку, метод відпалу та алгоритми: генетичні, гібридні тощо. Останні десятиліття зусилля вчених спрямоване на розроблення нових загальних схем розв'язання задач комбінаторної оптимізації, в основу яких покладено згадані методи та алгоритми, зокрема евристичні. Під евристичними алгоритмами, як правило, розуміють способи прийняття рішень, подібні до того, як це робить людина, та побудовані на інтуїтивних міркуваннях, що спираються на попередній досвід [8]. Використання евристичних алгоритмів поширене в різних класах задач розпізнавання образів різної природи. Вони також спостерігаються і в комбінаторній оптимізації. Для багатьох практичних проблем ці алгоритми є чи не єдино можливим шляхом для отримання задовільного рішення в реальному часі. До них відносять підходи, які складно формалізувати та неможливо довести їхню точність. Іноді такий алгоритм може бути ефективним, тобто за його використання знаходиться дійсно найкраще рішення, але його називають евристичним через неможливість доведення їхньої збіжності.

«Жадібний» алгоритм, наприклад, відносять до евристичних методів. Він працює так: із заданої вхідної інформації за розробленими правилами, що характерні для певного класу задач, вибираються найбільші величини з подальшим знаходженням максимального значення цільової функції. Методом найближчого сусіда із заданої вхідної інформації вибираються найменші величини з подальшим пошуком мінімального значення цільової функції [9].

Аналіз евристичних алгоритмів показує, що пошук оптимального значення проводиться шляхом розпізнавання змінних (найбільших чи найменших величин), тобто розпізнається вхідна інформація. Отже, евристичні алгоритми стосуються розв'язання задач комбінаторної оптимізації, які ґрунтуються на розпізнаванні вхідної інформації. Якщо класифікацію методів оптимізації проводити за можливістю чи неможливістю доведення їхньої збіжності, то до евристичних підходів за цією ознакою можна віднести значну частину перебірних методів, які використовуються в оптимізації та які достатньо формалізовані. Це пов'язано з тим, що при оцінці точності розв'язання задач цими методами виникають різні види невизначеності.

Загальна математична постановка задачі комбінаторної оптимізації

Наведемо загальну постановку задачі комбінаторної оптимізації та сформулюємо її, як у роботі [6]. Задачі цього класу, як правило, задаються однією або кількома множинами, наприклад A та B, елементи яких мають будь-яку природу. Назвемо ці множини *базовими*. Наявні два типи задач. В *першому* типі кожну з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{lt} \in R$, яке називають *вагою* ребра (R – множина дійсних чисел), $l \in \{1,...,n\}$, $t \in \{1,...,\tilde{n}\}$, n – кількість елементів множини A, $\tilde{n}$ – кількість елементів множини B. Приймемо, що $n = \tilde{n}$. Між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких назвемо *вагами*. Величини c_{lt} назвемо *вхідними* даними та задамо їх матрицями. В *другому* типі задач між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами є числа $v_j \in R$, $j \in \{1,...,n\}$, яким у відповідність поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач із елементів однієї або кількох із заданих множин, наприклад $a_l \in A$, $l \in \{1,...,n\}$, утворюється комбінаторна множина W – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент множини W, для якого $F(w)$ набуває оптимального значення при виконанні заданих обмежень.

Змоделюємо вхідні дані функцією натурального аргументу. Подамо елементи h наддіагоналей симетричної комбінаторної матриці $Q(w^k)$ комбінаторною функцією $\beta(f(j), w^k)|_1^m$, а елементи h наддіагоналей симетричної матриці C – функцією натурального аргументу $\varphi(j)|_1^m = (\varphi(1), ..., \varphi(m))$, де $m = \frac{n(n-1)}{2}$ – кількість елементів h наддіагоналей матриць C та $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Верхній індекс k ($k \in \{1,...,q\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W, q – кількість w^k у W. Якщо матриці $Q(w^k)$ та C – несиметричні, то $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$ містять усі їхні елементи, а $m = n^2$ (або $m = n\tilde{n}$). Для задач, які розв'язуються на перестановках, цільова функція набуває вигляду

$$F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j (f(j), w^k)\, \varphi(j) . \qquad (1)$$

Уведемо $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k), ..., \beta_m(f(m), w^k)) \in H$ – комбінаторну функцію, аргументом якої є комбінаторна конфігурація $w^k \in W$, утворена з елементів базової множини $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$ та $\beta(f(j), w'^i)|_1^m \in H'$ – комбінаторну функцію, аргументом якої є комбінаторна конфігурація $w'^i \in W'$, утворена з елементів базової множини $\tilde{A}_m = \{\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_m\}$, H та H' відповідно – системи цих функцій. Якщо $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \beta(f(j), w'^1)|_1^m$, а w^1, w'^1 – комбінаторні конфігурації одного типу і $\beta(f(j), w^1)|_1^m \in H$, $\beta(f(j), w'^1)|_1^m \in H'$, то $H \subset H'$ і $W \subset W'$.

Задачу комбінаторної оптимізації, вхідні дані в якій задано функціями $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$, назвемо *базовою*. Задачу, вхідні дані в якій задано функціями $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i)|_1^m$ (або $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m$), де $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i) \geq \overleftarrow{\beta}(f(j+1), w'^i)$ (або $\vec{\beta}(f(j), w'^t) \leq \vec{\beta}(f(j+1), w'^t)$), та $\vec{\varphi}(j)|_1^m$ (або $\overleftarrow{\varphi}(j)|_1^m$), де $\vec{\varphi}(j) \leq \vec{\varphi}(j+1)$ (або $\overleftarrow{\varphi}(j) \geq \overleftarrow{\varphi}(j+1)$), утворених із $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$, назвемо *упорядкованою*.

Оцінка точності методів, які використовуються для розв’язання задач на множині перестановок

Розглянемо задачі комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції в яких є перестановка. Для оцінки точності використаємо підкласи розв’язних задач та спосіб визначення множини значень цільової функції [10]. Оскільки згадана упорядкована задача – відомий розв’язний випадок [11], то для базової задачі нескладно знайти область визначення цільової функції. Для системи $H^{'}$ знаходять перестановки, для яких вираз (1) набуває найбільшого або найменшого глобального значення. Якщо елементи комбінаторної функції із системи $H^{'}$ впорядковані від більшого елемента до меншого, а елементи функції натурального аргументу упорядковані від меншого елемента до більшого, то значення (1) є глобальним мінімумом. Якщо елементи обох таких функцій упорядковані від меншого елемента до більшого, то значення (1) є глобальним максимумом. Цей розв'язний випадок не належить жодному класу із класів задач комбінаторної оптимізації. Наведемо теорему [10].

Теорема 1. Значення цільової функції $F(w^{k*})$ для задач комбінаторної оптимізації, аргументом якої є перестановка, знаходиться в межах $\max\limits_{w^{'t}\in W^{'}} F(w^{'t}) \geq F(w^k) \geq \min\limits_{w^{'i}\in W^{'}} F(w^{'i})$, $\quad w^{'t}, w^{'i} \in W^{'}$, $w^k \in W$. У разі мінімізації значення цільової функції знаходиться в межах $\min\limits_{w^{'i}\in W} F(w^{'i}) \leq$ $\leq F(w^k) < F^*$. У разі максимізації – в межах $F^* < F(w^k) \leq \max\limits_{w^{'t}\in W} F(w^{'t})$, де $F^* = \min\limits_{w^{'i}\in W} F(w^{'i}) + \dfrac{\max\limits_{w^{'t}\in W} F(w^{'t}) - \min\limits_{w^{'i}\in W} F(w^{'i})}{\upsilon}$, а υ – коефіцієнт зменшення області пошуку оптимального розв'язання, який уточнюється в процесі роботи алгоритму, $\max\limits_{w^{'t}\in W^{'}} F(w^{'t})$, $\min\limits_{w^{'i}\in W^{'}} F(w^{'i})$ – обчислені глобальні максимум та мінімум упорядкованої задачі.

Доведення – в [10].

Оцінку точності розв'язання задачі при відомому глобальному мінімумі обчислюємо за виразом $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = \left(1 - \dfrac{F_{\min}}{F(w^{k*})}\right)100\%$ (або $\Delta(F_{\max}, F(w^{i*})) = \left(1 - \dfrac{F(w^{i*})}{F_{\max}}\right)100\%$ у разі максимізації), де $F_{\min}$ – глобальний мінімум задачі, $F_{\max}$ – відповідно глобальний її максимум, $F(w^{k*})$, $F(w^{i*})$ – одержані мінімальний або максимальний розв'язок цієї задачі певним алгоритмом. Експеримент показує, що чим більша розмірність задачі, тим менша похибка (у відсотках) одержаного результату відносно глобального оптимуму.

Вважатимемо, що алгоритм (метод) збіжний, якщо послідовність побудованих розв'язків наближається до нуля, тобто $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) \to 0$ (або $\Delta(F_{\max}, F(w^{i*})) \to 0$). Серед одержаних розв'язків може бути такий, для якого $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = 0$ (або $\Delta(F_{\max}, F(w^{i*})) = 0$) . При цьому швидкість збіжності – поліноміальна за обчислювальною складністю.

Наведемо підклас розв'язних задач із класу задачі комівояжера. Якщо для них $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = 0$, то оптимальний результат, отриманий певним алгоритмом, збігається з глобальним.

Задача комівояжера полягає в наступному: задано деяку кількість міст, відстань між якими відома. Необхідно знайти найкоротший шлях, який є гамільтоновим циклом. Під гамільтоновим циклом розуміємо шлях в графі, який починається в заданій вершині, проходить через усі вершини один раз та повертається в початкову. Цей цикл в задачі комівояжера назвемо *маршрутом*.

Позначимо маршрут $u(w^k, l)|_1^n = (u_1(w^k, 1), ..., u_n(w^k, n))$, де $u_l(w^k, l) = \beta_j(f(j), w^k)\varphi(j)$, якщо $\varphi(j) \neq 0$, $j \in \{1, ..., m\}$, а H_u – їхня множина. За певними правилами розділимо H_u на підмножини $H_1, H_2, ..., H_{n-2}$. Відповідно на підмножини $K_1, K_2, ..., K_{n-2}$ розділяється і множина перестановок.

Покладемо $Z = \{2, 4, ..., 2j\}$, $Z_1 = \{1, 3, ..., 2j-1\}$.

Теорема 2 (дійсна для $n > 4$) [6, 12]. Якщо в задачі комівояжера комбінаторна функція $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, ..., m)$, то цільова функція (1) найбільшого значення набуває для перестановки

$$w^{i*} = (1, 3, 5, 7, ..., 8, 6, 4, 2), \qquad (2)$$

для якої $w^{i*} \in K_1$, а найменшого значення – для перестановки

$$w^{k*} = \begin{cases} ((1)_1, (n-1)_2, (3)_3, (n-3)_4, (5)_5, (n-5)_6, (7)_7, \ldots \\ \ldots, (n-4)_{n-4}, (4)_{n-3}, (n-2)_{n-2}, (2)_{n-1}, (n)_n), \text{ якщо } n \in Z_1, \\ ((n)_1, (2)_2, (n-2)_3, (4)_4, (n-3)_5, (6)_6, \ldots, \left(\frac{n+\delta}{2}\right)_{\frac{n}{2}}, \\ \left(\frac{n+\delta}{2}-1\right)_{\frac{n}{2}+1}, \left(\frac{n+\delta}{2}+1\right)_{\frac{n}{2}+2}, \\ \left(\frac{n+\delta}{2}-3\right)_{\frac{n}{2}+3}, \left(\frac{n+\delta}{2}+3\right)_{\frac{n}{2}+4}, \ldots \\ (n-3)_{n-3}, (3)_{n-2}, (n-1)_{n-1}, (1)_n), \quad \text{якщо } n \in Z, \end{cases} \qquad (3)$$

для якої $w^{k*} \in K_{n-2}$, де $\delta = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \frac{n}{2} \in Z, \\ 2, & \text{якщо } \frac{n}{2} \in Z_1. \end{cases}$

Найбільше значення цільової функції дорівнює $F(w^{i*}) = \dfrac{n(n^2-3n+8)-6}{3}$, а найменше – відповідно $F(w^{k*}) = \dfrac{n(5n^2+4)}{24}$, якщо $n \in Z$, та $F(w^{k*}) = \dfrac{n(5n^2+7)-12}{24}$, якщо $n \in Z_1$.

Доведення. Якщо $n \le 4$, то найменше і найбільше значення цільової функції збігаються, тому цей варіант не розглядаємо. Спочатку доведемо, що $F(w^{i*}) > F(w^{k*})$.

Для w^{i*} запишемо маршрут $u(w^{i*}, l)|_1^n = (v_1, v_1+1, v_2+1, v_3+1, v_4+1, \ldots v_{n-2}+1, v_{n-1})$, де $v_j = \dfrac{(j-1)(2n-j)}{2} + 1$ – номер елемента в j-му рядку гамільтонової діагоналі. Сума членів цієї послідовності $F(w^{i*}) = \sum_{j=1}^{n-1} v_j + 1 + n - 2 =$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{(j-1)(2n-j)}{2} + 1 \right) + n - 1 =$$

$$= \frac{n(n^2-3n+5)}{3} - 1 + n - 1 = \frac{n(n^2-3n+8)-6}{3}.$$

Для w^{k*} запишемо маршрут

$$u(w^{k*}, l)|_1^n = (v_1 + (n-3), v_1 + \\ +(n-2), v_2+(n-5), v_2+(n-3), \\ v_3+(n-7), v_3+(n-5), v_4 + \\ +(n-9), v_4+(n-7), v_5+(n-11), \ldots \\ \ldots, v_{\varsigma-1}+1, v_{\varsigma-1}+3, v_\varsigma, v_\varsigma+1), \text{ якщо } n \in Z, \qquad (4)$$

$$u(w^{k*}, j)|_1^n = (v_1 + (n-3), v_1 + \\ +(n-2), v_2+(n-5), v_2+(n-3), \\ v_3+(n-7), v_3+(n-5), v_4+(n-9), \\ v_4+(n-7), v_5+(n-11), \ldots \\ \ldots, v_{\varsigma-2}+n-(n-2), v_{\varsigma-2}+n-(n-4), v_{\varsigma-1}, v_{\varsigma-1} + \\ +2, v_\varsigma), \text{ якщо } n \in Z_1, \text{ де } \varsigma = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \qquad (5)$$

Знайдемо суми членів послідовностей (4), (5). Якщо $n \in Z$, то $F(w^{k*}) = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} 2v_j +$

$$+\frac{n(n+2)}{2} = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} 2\left(\frac{(j-1)(2n-j)}{2} + 1 \right) +$$

$$+\frac{n(n-2)}{2} = \frac{n(5n^2-12n+28)}{24} + \frac{n(n-2)}{2} =$$

$\dfrac{n(5n^2+4)}{24}$. Якщо $n \in Z_1$, то $F(w^{k*}) =$

$$= \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} 2\left(\frac{(j-1)(2n-j)}{2} + 1 \right) +$$

$$+\frac{(n-1)(3n-1)}{8} + 1 + \frac{n^2-2n-1}{2} =$$

$$= \frac{n(5n^2-21n+43)-27}{24} + \frac{(n-1)(3n-1)}{8} +$$

$$+1 + \frac{n^2-2n-1}{2} = \frac{5n^3+7n-12}{24}.$$

Для $n \in Z$ доведемо, що $\dfrac{n(n^2-3n+8)-6}{3} >$ $> \dfrac{n(5n^2+4)}{24}$. Після нескладних перетворень одержимо

$$\frac{n^3-8n^2+20n-16}{8} > 0. \qquad (6)$$

Для $n = 6$, для якого $F(w^{i*}) = 50$, $F(w^{k*}) = 46$, нерівність (6) набуде вигляду $4 > 0$. Отже, для будь-якого $n > 4$ ліва частина нерівності (6) завжди додатна. Для $n \in Z_1$ запишемо нерівність $\frac{n(n^2-3n+8)-6}{3} > \frac{5n^3+7n-12}{24}$. Після нескладних перетворень одержимо $\frac{n^3-8n^2+19n-12}{8} > 0$. Відзначимо, що для будь-якого $n > 4$ ліва частина цієї нерівності також завжди додатна.

Доведемо, що для будь-якої перестановки w^t порівняно з w^{i*} значення цільової функції не збільшується, а порівняно з w^{k*} – не зменшується. Візьмемо перестановку, при утворенні маршруту якої з кожного рядка h наддіагоналей матриці C вибрано найменший елемент. Запишемо її як $w^t = (1, 2, 3, ..., n)$ (тур Майстра). Відповідно для неї запишемо маршрут $u(w^t, l)|_1^n = (v_1, v_2, ..., v_{n-2}, v_{n-1}, n-1)$, а значення $F(w^t) = \sum_{j=1}^{n-1} v_j + n - 1 = \frac{n(n^2-3n+8)-6}{3}$, тобто $F(w^t) = F(w^{i*})$. Отже, для туру Майстра, маршрут для якого утворено вибиранням по одному найменшому елементу з кожного t-го рядка матриці $Q(w^1)$, $t = \overline{2, n-1}$, цільова функція в порівнянні з w^{k*} не зменшується, а дорівнює $F(w^{i*})$.

У перестановці w^{k*} для $n \in Z$ проведемо транспозицію елементів $(n-2)_3$ та $(n-1)_{n-1}$. Для перестановки $w^t \in K_{n-3}$ у маршруті $u(w^t, l)|_1^n$ два елементи збільшилися на одиницю та два елементи зменшилися на одиницю, а $F(w^t) = F(w^{k*})$. У w^{k*} проведемо транспозицію елементів $(n-2)_3$ та $(n)_1$. Одержана перестановка w^t також знаходиться в підмножині $(n-3)$, а у відповідному маршруті два елементи збільшилися на два і два елементи зменшилися на два, а $F(w^t) = F(w^{k*})$. Якщо в w^{k*} провести транспозицію елементів $\frac{n}{2}$ та n, то одержана перестановка w^t буде у підмножині $\frac{n}{2} - 1$, а у відповідному маршруті два елементи зменшаться на $\frac{n}{2}$. Елемент $v_{\frac{n}{2}}$ поміняється місцем з елементом $v_{\frac{n}{2}} + n - 2$, а $v_{\frac{n}{2}} + 1$ – з елементом $v_{\frac{n}{2}} + 1 + \frac{3n-10}{2}$. Цільова функція в цьому випадку збільшиться на $\frac{3n-14}{2}$, а $F(w^t) > F(w^{k*})$.

Отже, якщо при утворенні маршруту елементи вибираються по два з перших $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ рядків матриці C, то цільова функція зменшується. Якщо маршрут утворено вибиранням елементів з рядків за номерами, більшими, ніж $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, то цільова функція збільшується. Так, найбільшого значення цільова функція набуває для перестановки (2) і $w^{i*} \in K_1$, якщо $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, ..., m)$, а найменшого – для перестановки (3) і $w^{k*} \in K_{n-2}$, що і доводить теорему 2 для $n \in Z$.

Аналогічно теорема 2 доводиться для $n \in Z_1$.

Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо значення комбінаторної функції $\beta(f(j), w^1) = k^0 j + b$ або $\beta(f(j), w^1) = 2^j$, $j = \overline{1, m}$, $k^0, b > 0$ – цілі довільні числа, то найбільшого значення цільова функція набуває для перестановки (2), відповідний маршрут якої $u(w^{i*}, l)|_1^n \in H_1$ і $w^{i*} \in K_1$, а найменшого значення – для перестановки (3), відповідний маршрут для якої $u(w^{k*}, j)|_1^n \in H_{n-2}$ і $w^{k*} \in K_{n-2}$.

Теорема 3 (дійсна для $n > 4$). Якщо комбінаторна функція $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (m, ..., 1)$ (матриці Демиденка, Кальмансона), то найбільшого значення цільова функція набуває для перестановки (3), відповідний маршрут якої $u(w^{i*}, l)|_1^n \in H_{n-2}$, а найменшого – для перестановки (2), відповідний маршрут якої

$u\,(w^{k*}, l)|_1^n \in H_1$. Найменше значення цільової функції дорівнює $F(w^{k*}) = \dfrac{n^3+3n^2-10n+12}{6}$, а найбільше – відповідно $F(w^{i*}) = \dfrac{7n^3-12n^2+20n}{24}$, якщо $n \in Z$, та $F(w^{i*}) = \dfrac{7n^3-12n^2+17n+12}{24}$, якщо $n \in Z_1$.

Доведення теореми 3 аналогічне доведенню теореми 2.

Доведення збіжності методів та алгоритмів, які ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації. Доведемо збіжність методу структурно-алфавітного пошуку[13], «жадібного» алгоритму та методу найближчого сусіда з використанням наведених раніше підкласів розв'язних задач для задачі комівояжера.

Теорема 4. Метод структурно-алфавітного пошуку збіжний, якщо для підкласів розв'язних задач побудовою не більш як $\dfrac{n^2}{2}$ перестановок він забезпечує пошук упорядкованої послідовності локальних екстремумів $F = (F(w^1), F(w^2), ..., F(w^k))$ таких, що $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) \to 0$, серед яких існує такий, для якого $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = 0$, де $k, k^* \in \{1, ..., n^2/2\}$.

Для доведення теореми 4 сформулюємо такі леми.

Лема 1. Якщо для упорядкованої задачі комівояжера перші n значень $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})$ (або $\overleftarrow{\beta}(f(j), w^{'i})$), $j = \overline{1, m}$, утворюють маршрут (гамільтоновий цикл), то $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m = \beta(f(j), w^{k*})|_1^m$ (або $\overleftarrow{\beta}(f(j), w^{'i})|_1^m = \beta(f(j), w^{k*})|_1^m$), а $w^{k*} \in W$ є глобальним розв'язком базової задачі; $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m$, $\overleftarrow{\beta}(f(j), w^{'i})|_1^m \in H'$, $\beta(f(j), w^{k*})|_1^m \in H$, $H \in H'$.

Доведення очевидне.

Лема 2. Якщо базова задача комівояжера задана функцією натурального аргументу $\beta(f(j), w^1)|_1^m$, яка змінюється як монотонна (неспадна або незростаюча), то для знаходження за упорядкованою задачею глобального розв'язку методом структурно-алфавітного пошуку необхідно побудувати не більш як $\dfrac{n^2}{2}$ перестановок.

Доведення. Розглянемо задачу комівояжера, у якій комбінаторна функція змінюється як монотонно неспадна. Приймемо, що $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, ..., m)$ – лінійна функція. Цю задачу зведемо до упорядкованої. Запишемо $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m = (1, ..., m)$, а $\overleftarrow{\varphi}(j)|_1^m = ((1)_1, (1)_2 \ldots ..., (1)_n, (0)_{n+1}, ..., (0)_m)$. Для неї побудуємо послідовність локальних екстремумів. Як випливає з теореми 2, для задачі комівояжера, вхідні дані в якій задано функцією $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, ..., m)$, найбільшого значення цільова функція набуває для перестановки (2) у підмножині K_1, а найменшого – для перестановки (3) у підмножині K_{n-2}. Щоб отримати перестановку з підмножини K_{n-2}, необхідно зафіксувати в ній елементи у такому порядку (…, n–1, 1, n,...) або за комбінаторною функцією $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m = (1, ..., m)$ послідовно побудувати $n-2$ перестановки, починаючи зі значення $\vec{\beta}(f(1), w^{'t}) = 1$, $\vec{\beta}(f(2), w^{'t}) = 2$ та закінчуючи $\vec{\beta}(f(n-2), w^{'t}) = n-2$. Тобто, із $n-1$ елементів наддіагонального рядка матриці вибрати два елементи, які в комбінації з елементами інших рядків утворюють маршрут (відповідно утворюється і перестановка), для якої значення цільової функції – найменше. Для $\vec{\beta}(f(1), w^{'t}) = 1$ одержана перестановка належить до підмножини K_1, для $\vec{\beta}(f(2), w^{'t}) = 2$ вона належить до K_2, а для $\vec{\beta}(f(n-2), w^{'t}) = n-2$ – відповідно до K_{n-2}. Для заданої структури вхідних даних серед маршрутів, які з першого рядка матриці містять елементи $n-2$ та $n-1$, є найкоротші.

Комбінацією елементів з другого рядка матриці у підмножині K_{n-2} знайдемо меншу підмножину, яка містить глобальний мінімум. Для цього зафіксуємо значення $\vec{\beta}(f(n-2), w^{'t}) = n-2$ та $\vec{\beta}(f(n-1), w^{'t}) = n-1$, пропустимо $\vec{\beta}(f(n), w^{'t}) = n$ (для нього перестановку уже побудовано) і, починаючи з $\vec{\beta}(f(n+1), w^{'t}) = n+1$, потім з $\vec{\beta}(f(n+2), w^{'t}) = n+2$ будуємо наступні перестановки. Для перестановки, де цільова функція – найменша, маршрут із другого рядка матриці містить елементи $\vec{\beta}(f(2n-5), w^{'t}) = 2n-5$ та $\vec{\beta}(f(2n-3), w^{'t}) = 2n-3$. Кількість побудованих перестановок дорівнює $n-3$. Аналогічно, комбінацією елементів з кожного рядка вибираємо по два елементи так, щоб одержаний маршрут був найкоротший. Кількість побудованих перестановок для кожного рядка дорівнює $n-(s-1)$, де s – номер рядка матриці. Вважаємо, що їхня кількість дорівнює n. Маршрут, якому відповідає перестановка $w^{k*} = ((1, n-1, 3, n-3, 5, n-5, 7, ..., n-4, 4, n-2, 2, n)$, містить по два елементи з $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ наддіагональних рядків матриці $Q(w^k)$ та є глобальним мінімумом (вираз (3)). Отже, щоб знайти глобальний мінімум для задачі комівояжера, вхідні дані в якій задано $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m = (1, ..., m)$, будується послідовність розв'язків не більш як $\frac{n^2}{2}$ перестановок, що і доводить лему 2 для лінійної функції.

Для задачі комівояжера, вхідні дані в якій задаються комбінаторними функціями, що змінюються як монотонні (неспадні або незростаючі), лема 2 доводиться аналогічно.

Лему 2 доведено.

Лема 3. Якщо базова задача комівояжера задана функцією натурального аргумента, яка містить не менш як $\frac{5n-1}{4}$ найменших однакових значень і вони утворюють маршрут (гамільтонів цикл), то метод структурно-алфавітного пошуку збіжний, якщо для підкласів розв'язних задач з побудовою не більш як $\frac{n^2}{2}$ перестановок він забезпечує знаходження упорядкованої послідовності локальних екстремумів $F = (F(w^1), F(w^2), ..., F(w^k))$ таких, що $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) \to 0$, серед яких існує такий, для якого $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = 0$, де $k, k^* \in \left\{1, ..., \frac{n^2}{2}\right\}$.

Доведення. Лему 3 доводимо методом математичної індукції. Розглянемо задачу, вхідні дані в якій задано комбінаторною функцією $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (c, b, c, b, ..., c'_{m-1}, b'_m)$, де

$$c' = \begin{cases} c, & \text{якщо} \quad m \in Z, \\ b, & \text{якщо} \quad m \in Z_1, \end{cases} \qquad b' = \begin{cases} c, & \text{якщо} \quad m \in Z_1, \\ b, & \text{якщо} \quad m \in Z, \end{cases}$$

$c < b$, $Z \in \{2, 4, ..., 2j\}$, $Z_1 \in \{1, 3, ..., 2j-1\}$. Зведемо її до упорядкованої. Запишемо $\vec{\varphi}(j)|_1^m = ((1)_1, (1)_2, ..., (1)_n, (0)_{n+1}, ..., (0)_m)$, а $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m = ((c)_1, (c)_2, ..., (b)_{m-1}, (b)_m)$. Кількість найменших значень c у $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m$ більша ніж $\frac{5n-1}{4}$ і для них виконуються умови існування гамільтонова циклу [14]. Як доведено в [15], найменше значення цільової функції для $n = \{5, 6\}$, дорівнює $(n-1)c + b$, тому ці варіанти не розглядаємо. Оскільки значення цільової функції залежить від парних та непарних n, $\frac{n}{2}$, $\frac{n+3}{2}$ і перестановки для них – різні [15], то лему 2 доводимо для $n = \{7, 8, 9, 10\}$. Проведемо пошук перестановки (гамільтонова циклу), для якого цільова функція дорівнює $F(w^k) = nc$. Значення c у $\beta(f(j), w^1)|_1^m$ перебувають у позиціях з непарними номерами, тому глобальний мінімум шукаємо в підмножинах K_s, де $s \in Z_1$.

Покладемо $n = 7$. Починаючи з $\vec{\beta}(f(1), w^{'t}) = c$ та $\vec{\beta}(f(2), w^{'t}) = c$, побудуємо перестановку

• $w^1 = (4, 1, 2, 3, 5, 7, 6)$. Для неї значення цільової функції дорівнює $F(w^1) = (n-1)\,c + b$. Пропустимо $\vec{\beta}(\,f(2), w'^{t}\,) = c$ та, починаючи з $\vec{\beta}(\,f(1), w'^{t}\,) = c$ та $\vec{\beta}(f(3), w'^{t}\,) = c$, побудуємо наступну перестановку

• $w^2 = (6, 1, 2, 3, 5, 7, 4)$, для якої $F(w^2) = (n-2)\,c + 2b$. Оскільки значення цільової функції збільшилося, повернемося до попередніх $\vec{\beta}(\,f(1), w'^{t}\,) = c$ та $\vec{\beta}(\,f(2), w'^{t}\,) = c$, а в другому рядку матриці проведемо перебір елементів *c*, тобто пропустимо $\vec{\beta}(f(3),\ w'^{t}\,) = c$, урахуємо $\vec{\beta}(\,f(4), w'^{t}\,) = c$ та одержимо перестановку

• $w^3 = (4, 1, 2, 5, 3, 7, 6)$, для якої $F(w^3) = n\,c$.

Отже, глобальний мінімум для $n = 7$, якщо $n \in Z_1$, $(n+3)/2 \in Z_1$, знайдено у K_1 побудовою трьох перестановок.

Покладемо $n = 8$. Аналогічно попередньому варіанту методом структурно-алфавітного пошуку побудуємо перестановки:

• $w^1 = (7, 3, 5, 4, 1, 2, 6, 8)$, для якої $F(w^1) = (n-1)c + b$;

• $w^2 = (\,6, 1, 2, 4, 5, 3, 7, 8)$, для якої $F(w^2) = (n-1)\,c + b$;

• $w^3 = (\,4, 1, 2, 8, 6, 7, 3, 5)$, для якої $F(w^3) = (n-1)c + b$;

• $w^4 = (4, 1, 2, 6, 8, 5, 3, 7)$, для якої $F(w^4) = n\,c$. Глобальний мінімум для $n = 8$, якщо $n \in Z$, $\frac{n}{2} \in Z$, у підмножині K_1 знайдено побудовою чотирьох перестановок.

Покладемо $n = 9$. Побудуємо перестановки:

• $w^1 = (9, 7, 6, 4, 1, 2, 3, 5, 8)$, для якої $F(w^1) = (n-1)c + b$;

• $w^2 = (\,6, 1, 2, 3, 5, 9, 7, 8, 4)$, для якої $F(w^2) = (n-2)\,c + 2b$;

• $w^3 = (\,4, 1, 2, 5, 3, 7, 8, 9, 6)$, для якої $F(w^3) = (n-2)\,c + 2b$;

• $w^4 = (\,4, 1, 2, 3, 7, 9, 8, 5, 6)$, для якої $F(w^4) = (n-1)c + b$;

• $w^5 = (\,4, 1, 2, 3, 7, 9, 6, 5, 8)$, для якої $F(w^5) = n\,c$. Глобальний мінімум для $n = 9$, якщо $n \in Z_1$, $(n+3)/2 \in Z$, знайдено у K_1 побудовою п'яти перестановок.

Покладемо $n = 10$. Використовуючи описані правила, побудуємо перестановки:

• $w^1 = (4, 1, 2, 6, 8, 10, 9, 7, 3, 5)$, для якої $F(w^1) = (n-1)\,c + b$;

• $w^2 = (6, 1, 2, 4, 5, 3, 7, 9, 10, 8)$, для якої $F(w^2) = (n-1)\,c + b$;

• $w^3 = (4, 1, 2, 8, 6, 10, 9, 7, 3, 5)$, для якої $F(w^3) = n\,c$. Глобальний мінімум для $n = 10$, якщо $n \in Z$, $n/2 \in Z_1$, знайдено у K_1 побудовою трьох перестановок.

За індукцією, якщо для задачі з довільним n матриця містить однакові елементи, з яких утворюється маршрут, то для знаходження глобального мінімуму в цьому випадку необхідно провести послідовний перебір елементів для кожного рядка окремо. Оскільки в кожному з них для періодичної функції зі значеннями $\{c, b\}$ може бути $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ елементів c, то для знаходження гамільтонова циклу необхідно побудувати не більш як $\frac{n}{2} n = \frac{n^2}{2}$ перестановок, що і доводить лему 3, коли вхідні дані задано періодичною функцією натурального аргументу, або іншою функцією, яка містить не менш як $\frac{5n-1}{4}$ найменших однакових значень і вони утворюють маршрут (гамільтонів цикл).

Справедливість теореми 4 для задачі комівояжера випливає з лем 1 і 2.

Теорему 4 доведено.

Наслідок 2. Якщо в задачі комівояжера комбінаторна функція $\beta(f(j), w^1\,)|_1^m = (1, ..., m)$, то за правилами методу найближчого сусіда у пошуку мінімального значення цільової функції наведеного розв'язного випадку знайдено перестановку $w^{i*} = (1, 3, 5, 7\,,..., 8, 6, 4, 2)$, яка для нього є глобальним максимумом, тобто збіжність методу $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) \to 1$.

Якщо в задачі комівояжера комбінаторна функція $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1,...,m)$, то за правилами «жадібного» алгоритму при пошуку глобального максимуму одержуємо глобальний максимум, тобто збіжність алгоритму дорівнює $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = 0$.

Для обох випадків швидкість збіжності дорівнює одній ітерації.

Наслідок 3. Якщо в задачі комівояжера комбінаторна функція $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (m,...,1)$, то за правилами методу найближчого сусіда при пошуку мінімального значення цільової функції наведеного розв'язного випадку знайдено перестановку (3), яка є для нього глобальним мінімумом, тобто збіжність методу дорівнює $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = 0$.

Якщо в задачі комівояжера комбінаторна функція $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (m,...,1)$, то за правилами «жадібного» алгоритму при пошуку глобального максимуму одержуємо глобальний мінімум, тобто збіжність алгоритму дорівнює $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) \to 1$.

Для обох випадків швидкість збіжності дорівнює одній ітерації.

Викладений у наслідках 2 та 3 результат пояснюється тим, що в цих методах не проводиться аналіз щодо виявлення факторів, які впливають на значення цільової функції в залежності від комбінації елементів вхідних даних.

Висновок. Отже, збіжність методів, які ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації, можна довести з використанням підкласів розв'язних задач. Так, збіжність послідовності розв'язків, побудованих методом структурно-алфавітного пошуку для задачі комівояжера наближається до нуля, тобто $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) \to 0$, а для підкласів розв'язних задач $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = 0$. Її швидкість – поліноміальна за обчислювальною складністю. Збіжність методу найближчого сусіда та «жадібного» алгоритму залежить від структури вхідних даних. Для одних структур розв'язок дорівнює $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = 0$, а для інших може бути $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) \to 1$. Цей розв'язок, як правило, досягається за одну ітерацію.

1. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. – М.: Наука, 1986. – 286 с.
2. *Лившиц Е.Д.* Сходимость жадных алгоритмов: Автореф. дис. ... д-ра. физ.-мат. наук / Рос. ун-т дружбы народов. – М., 2011. – 34 с.
3. *Поляк Б.Г.* Сходимость и скорость сходимости интеративных стохастических алгоритмов // Автоматика и телемеханика. 1976. – Т. 1, № 12. – С. 83–94.
4. *Про* збіжність спектрального алгоритму навчання нейронних елементів / Ф. Гече, В. Коцовський, С. Ковальов та ін. // Вісн. Нац. ун-ту «Львів. політехніка». – 2007. – № 604. – С. 187–194.
5. *Ivanov Viktor*. A short proof that NP is not P // Int. J. of Pure and Applied Mathematics. – 2014. – **94**, N 1. – P. 81–88.
6. *Тимофієва Н.К.* Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: Автореф. дис. ... д-ра. техн. наук / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, К., 2007. – 32 с.
7. *Тимофієва Н.К.* Про методи комбінаторної оптимізації, що ґрунтуються на розпізнаванні вхідної інформації, евристичні алгоритми та обчислювальний інтелект // Вісн. Вінницьк. політехнічн. ін-ту. – 2015. – № 2. – С. 106–111.
8. *Ивахненко А.Г.* Системы эвристической самоорганизации в технической кибернетике. – Киев: Техніка, 1971. – 392 с.
9. *Пападимитриу Х.*, *Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность – М.: Мир, 1985. – 510 с.
10. *Тимофеева Н.К.* Определение множества значений целевой функции в задачах дискретной оптимизации // КВТ. Сложные системы управления: Сб. науч. тр. – 1998. – **120**. – С. 37–43.
11. *Харди Г.Г.*, *Литтльвуд Дж.Е.*, *Полиа Г.* Неравенства. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
12. *Тимофієва Н.К.* Використання структурного перетворення вхідних даних для зведення нерозв'язних задач комбінаторної оптимізації до розв'язних // Комбінаторні конфігурації та їх застосування: Матеріали десятого Міжвуз. наук.-практ. сем. (17–18 квітня 2015 р.). – Кіровоград: Кіровогр. техн. ун-т. – 2015. – С. 94–99.
13. *Тимофієва Н.К.* Метод структурно-алфавітного пошуку та підкласи розв'язних задач із класу задачі комівояжера // УСиМ. – 2008. – № 4 – С. 20–36.
14. *Оре О.* Теория графов / Пер. с англ. – М.: Наука, 1980. – 336 с.
15. *Тимофеева Н.К.* Нахождение оптимального решения в задаче коммивояжера // Программно-алгоритмическое обеспечение решения задач приклад-

ной математики. – К.: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН Украины, 1993. – С. 21–26.

Поступила 15.03.2016
Тел. для справок: +38 044 502-6365 (Киев)

Н.К. Тимофеева

Доказательство сходимости алгоритмов комбинаторной оптимизации с использованием подклассов разрешимых задач

Введение. Доказательство сходимости последовательности приближенных решений к глобальному решению задачи комбинаторной оптимизации, которая строится определенным алгоритмом, достаточно сложная проблема. Это связано с тем, что некоторые множества таких задач неразрешимы с точки зрения вычислительной сложности. Для классов задач с четкой (точно заданной) структурой входных данных и таких, которые решаются на множестве перестановок, их математические модели разработаны достаточно основательно, и поэтому по смоделированной целевой функции теоретически можно определить глобальное решение этих задач полным перебором, совпадающим с целью исследования. В задачах с нечеткими входными данными (задача распознавания, задача кластеризации), кроме количества при вычислении операций, затраченных на поиск глобального решения, необходимо учитывать и меры подобия, что играет основную роль и от выбора которых в значительной степени зависит собственно решение. К тому же из-за ситуации неопределенности, наблюдаемой в большинстве задач комбинаторной оптимизации, полученное по смоделированной целевой функции глобальное решение в таких задачах не всегда совпадает с целью исследования. При решении задач вычислительного (искусственного) интеллекта достаточно часто используются методы, классифицируемые как эвристические. В них поиск оптимального решения, которое удовлетворяло бы цель исследования, проводится по тем же правилам, что и на интуитивном уровне. Эти методы эффективны по быстродействию, но часто результат далек от глобального оптимума. Возникает проблема доказательства эффективности по точности и быстродействию таких алгоритмов.

Проблеме сходимости методов и алгоритмов математического программирования посвящено много работ, например [1–5]. В этих работах на формальном уровне вводятся необходимые признаки и достаточные условия их сходимости. В нейронных сетях исследуют сходимость алгоритмов самообучения. Для доказательства сходимости используют теорию рядов, функции Ляпунова и пр. Эту проблему сводят еще к задаче сходимости приближенного решения операторных уравнений. Их использование для определенного алгоритма достаточно сложно. В работе [5] на примере задач, решаемых на графах, проводится сведение *NP*-полной задачи к задаче *P*. С этой целью разработанными процедурами находится нижняя граница, приближенная к глобальному решению. В комбинаторной оптимизации, как правило, рассматривают вычислительную сложность решения задач оптимизации и точность алгоритма.

Далее приведен способ доказательства сходимости некоторых методов комбинаторной оптимизации, основанных на распознавании структуры входной информации (метод структурно-алфавитного поиска, метод ближайшего соседа, «жадный» алгоритм). С этой целью использованы подклассы разрешимых задач из класса задачи коммивояжера. Доказывается сходимость последовательности решений, которые строятся оговоренными алгоритмами, и устанавливается ее скорость.

Методы, используемые для решения оптимизационных задач

Для решения задач из классов задач комбинаторной оптимизации выделим такие основные подходы [6]:

• итерационные методы и алгоритмы, основанные на частичном переборе вариантов;

• методы и алгоритмы, основанные на распознавании структуры входной информации. Их еще называют *эвристическими*, такими, в которых моделируются правила выбора оптимального решения в ручном режиме [7].

К итерационным методам и алгоритмам относятся как универсальные методы математического программирования, так и специальные, учитывающие специфику данной проблемы (точные и приближенные). Это – методы линейного, целочисленного, динамического, нелинейного, квадратичного, стохастического программирования, градиентные методы, методы ветвей и границ, последовательный анализ вариантов, методы локального поиска, метод отжига и алгоритмы: генетические, гибридные и др. Последние десятилетия усилия ученых направлены на разработку новых общих схем решения задач комбинаторной оптимизации, в основу которых положены упомянутые методы и алгоритмы. Под эвристическими алгоритмами, как правило, подразумевают способы принятия решений, подобные тому, что делает человек, и построенные на интуитивных рассуждениях, которые опираются на предыдущий опыт [8]. Эвристические алгоритмы широко используются в задачах распознавания разной природы и в комбинаторной оптимизации. Для многих практических проблем эти алгоритмы – единственно возможный способ получения удовлетворительного решения в реальном времени. К ним относят подходы, которые сложно формализовать и невозможно доказать их точность. Иногда такой алгоритм может быть точным, т.е. при его применении находят действительно лучшее решение, но называют его эвристическим из-за невозможности доказательства их сходимости.

«Жадный» алгоритм относят к эвристическим методам. Он работает так: из заданной входной информации по разработанным правилам, характерным для определенного класса задач, выбираются самые большие величины с последующим нахождением максимального значения целевой функции. Методом ближайшего соседа из заданной входной информации выбираются наименьшие величины с последующим поиском минимального значения целевой функции [9].

Анализ этих алгоритмов показывает, что поиск оптимального значения проводится путем распознавания переменных (наибольших или наименьших их величин), т.е. распознается входная информация. Следовательно, эвристические алгоритмы относятся к решению задач комбинаторной оптимизации, основанным на распознавании входной информации. Если классификацию методов оптимизации проводить по возможности или невозможности доказательства их сходимости, то к эвристическим подходам по этому признаку можно отнести значительную часть переборных методов, используемых в оптимизации и достаточно формализованных. Это связано с тем, что при оценке точности решения задач этими методами возникают различные виды неопределенности.

Общая математическая постановка задачи комбинаторной оптимизации

Приведем общую постановку задачи комбинаторной оптимизации и сформулируем ее, как в работе [6]. Задачи этого класса, как правило, задаются одним или несколькими множествами, например A и B, элементы которых имеют любую природу. Назовем эти множества *базовыми*. Имеется два типа задач. В первом типе каждое из этих множеств приведем в виде графа, вершины которого – его элементы, а каждому ребру поставлено в соответствие число, называемое весом ребра (R – множество вещественных чисел), $l \in \{1,...,n\}$, $t \in \{1,..., \tilde{n}\}$, n – количество элементов множества A, $\tilde{n}$ – количество элементов множества B. Положим, что $n = \tilde{n}$. Между элементами этих множеств существуют связи, числовое значение которых назовем *весами*. Величины c_{lt} назовем входными данными и зададим их матрицами. Во втором типе задач между элементами заданного множества связей не существует, а весами будут числа $v_j \in R$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, которым в соответствие поставлены некоторые свойства этих элементов, числовые значения которых задаются конечными последовательностями, которые также являются входными данными. Эти величины определяют значение целевой функции.

Для обоих типов задач из элементов одной или нескольких из заданных множеств, например $a_l \in A$, $l \in \{1,...,n\}$, образуется комбинаторное множество W – совокупность комбинаторных конфигураций определенного типа (перестановки, выборки разных типов, разбиения и др.). На элементах w комбинаторного множества W вводится целевая функция $F(w)$. Необходимо найти элемент множества, для которого $F(w)$ принимает оптимальное значение при выполнении заданных ограничений.

Смоделируем входные данные функцией натурального аргумента. Представим элементы h наддиагоналей симметричной комбинаторной матрицы $Q(w^k)$ комбинаторной функцией $\beta(f(j), w^k)|_1^m$, а элементы h наддиагоналей симметричной матрицы C – функцией натурального аргумента $\varphi(j)|_1^m = (\varphi(1), ..., \varphi(m))$, где $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ – количество элементов h наддиагоналей матриц C и $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Верхний индекс k ($k \in \{1,...,q\}$) в w^k означает порядковый номер w^k в W, q – количество w^k в W. Если матрицы $Q(w^k)$ и C – несимметричны, то $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ и $\varphi(j)|_1^m$ содержат все их элементы, а $m = n^2$ (или $m = n\,\tilde{n}$). Для задач, решаемых на перестановках, целевая функция примет вид

$$F(w^k) = \sum\nolimits_{j=1}^{m} \beta_j\,(f(j), w^k)\,\varphi(j)\,. \qquad (1)$$

Введем $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k), ..., \beta_m(f(m), w^k)) \in H$ – комбинаторную функцию, аргументом которой является комбинаторная конфигурация $w^k \in W$, образованная из элементов базового множества $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$ и $\beta(f(j), w^{'i})|_1^m \in H^{'}$ – комбинаторную функцию, аргументом которой будет комбинаторная конфигурация $w^{'i} \in W^{'}$, образованная из элементов базового множества $\tilde{A}_m = \{\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_m\}$, H и $H^{'}$ соответственно – системы этих функций. Если $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \beta(f(j), w^{'1})|_1^m$, а $w^1, w^{'1}$ – комбинаторные конфигурации одного типа и $\beta(f(j), w^1)|_1^m \in H$, $\beta(f(j), w^{'1})|_1^m \in H^{'}$, то $H \subset H^{'}$ и $W \subset W^{'}$.

Задачу комбинаторной оптимизации, входные данные в которой заданы функциями $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ и $\varphi(j)|_1^m$, назовем *базовой*. Задачу, входные данные в которой заданы функциями $\bar{\beta}(f(j), w^{'i})|_1^m$ (или $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m$), где $\bar{\beta}(f(j), w^{'i}) \geq \bar{\beta}(f(j+1), w^{'i})$ (или $\vec{\beta}(f(j), w^{'t}) \leq \vec{\beta}(f(j+1), w^{'t})$), и $\vec{\varphi}(j)|_1^m$ (или $\bar{\varphi}(j)|_1^m$), где $\vec{\varphi}(j) \leq \vec{\varphi}(j+1)$ (или $\bar{\varphi}(j) \geq \bar{\varphi}(j+1)$), образованные из $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ и $\varphi(j)|_1^m$, назовем *упорядоченной*.

Оценка точности методов, используемых при решении задач на множестве перестановок

Рассмотрим задачи комбинаторной оптимизации, аргумент целевой функции в которых – перестановка. Для оценки их точности используем подклассы разрешимых задач и способ определения множества значений целевой функции [10]. Поскольку упомянутая упорядоченная задача – известный разрешимый случай [11], то для базовой задачи несложно найти область определения целевой функции. Для системы $H^{'}$ известны перестановки, для которых выражение (1) принимает глобальное наибольшее или наименьшее значение. Если элементы комбинаторной функции из системы $H^{'}$ упорядочены от большего элемента к меньшему, а элементы функции натурального аргумента упорядочены от меньшего элемента к большему, то значение (1) есть глобальным минимумом. Если элементы обеих таких функций упорядочены от меньшего элемента к большему, то значение (1) – глобальный максимум. Этот разрешимый случай не принадлежит ни одному классу из классов задач комбинаторной оптимизации. Приведем теорему [10].

Теорема 1. Значение целевой функции $F(w^k)$ для задач комбинаторной оптимизации, аргумент которой – перестановка, находится в пределах: $\max\limits_{w^{'t} \in W^{'}} F(w^{'t}) \geq$ $\geq F(w^k) \geq \min\limits_{w^{'i} \in W^{'}} F(w^{'i}),\ w^{'t}, w^{'i} \in W^{'},\quad w^k \in W$. В случае минимизации значение целевой функции находится в пределах $\min\limits_{w^{'i} \in W} F(w^{'i}) \leq F(w^k) < F^*$. В случае максимизации – в пределах $F^* < F(w^k) \leq \max\limits_{w^{'t} \in W} F(w^{'t})$, где

$$F^* = \min_{w^{'i} \in W} F(w^{'i}) + \frac{\max\limits_{w^{'t} \in W} F(w^{'t}) - \min\limits_{w^{'i} \in W} F(w^{'i})}{\upsilon},$$

а υ – коэффициент уменьшения области поиска оптимального решения, которое уточняется в процессе работы алгоритма, $\max\limits_{w^{'t} \in W^{'}} F(w^{'t})$, $\min\limits_{w^{'i} \in W^{'}} F(w^{'i})$ – вычисленные глобальные максимум и минимум упорядоченной задачи.

Доказательство в [10].

Оценку точности решения задачи при известном глобальном минимуме вычисляем по выражению $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = \left(1 - \dfrac{F_{\min}}{F(w^{k*})}\right)100\%$ (или $\Delta(F_{\max}, F(w^{i*})) =$ $= \left(1 - \dfrac{F(w^{i*})}{F_{\max}}\right)100\%$ в случае максимизации), где $F_{\min}$ – глобальный минимум задачи, $F_{\max}$ – соответственно глобальный ее максимум, $F(w^{k*})$, $F(w^{i*})$ – полученное максимальное или минимальное решение этой задачи определенным алгоритмом. Эксперимент показывает, что чем больше размерность задачи, тем меньше погрешность (в процентах) полученного результата по отношению к глобальному оптимуму.

Положим, что алгоритм (метод) сходимый, если последовательность построенных решений приближается к нулю, т.е. $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) \to 0$ (или $\Delta(F_{\max}, F(w^{i*})) \to 0$). Среди полученных решений может быть такое, для которого $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = 0$ (или $\Delta(F_{\max}, F(w^{i*})) = 0$). При этом скорость сходимости – полиномиальна по вычислительной сложности.

Приведем подкласс разрешимых задач из класса задачи коммивояжера. Если для них $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = 0$, то оптимальное решение, полученное определенным алгоритмом, совпадает с глобальным решением.

Задача коммивояжера заключается в следующем: задано некоторое количество городов, расстояние между которыми известно. Необходимо найти кратчайший путь, который будет гамильтоновым циклом. Под гамильтоновым циклом подразумеваем путь в графе, который начинается в заданной вершине, проходит через все вершины один раз и возвращается в начальную. Этот цикл в задаче коммивояжера назовем *маршрутом*.

Обозначим маршрут $u(w^k, l)|_1^n = (u_1(w^k, 1), ..., u_n(w^k, n))$, где $u_l\,(w^k, l) = \beta_j\,(f(j), w^k)\,\varphi(j)$, если $\varphi(j) \neq 0$, $j \in \{1, ..., m\}$, а H_u – их множество. По определенным правилам разобъем H_u на подмножества $H_1, H_2, ...,$ H_{n-2}. Соответственно на подмножества $K_1, K_2, ..., K_{n-2}$ разбивается и множество перестановок.

Положим $Z = \{2, 4, ..., 2j\}$, $Z_1 = \{1, 3, ..., 2j-1\}$.

Теорема 2 (действительна для $n > 4$) [6, 12]. Если в задаче коммивояжера комбинаторная функция $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, ..., m)$, то наибольшее значение целевая функция (1) принимает для перестановки

$$w^{i*} = (1, 3, 5, 7, ..., 8, 6, 4, 2), \tag{2}$$

для которой $w^{i*} \in K_1$, а наименьшее значение – для перестановки

$$w^{k*} = \begin{cases} ((1)_1, (n-1)_2, (3)_3, (n-3)_4, (5)_5, (n-5)_6, (7)_7, ... \\ ...(n-4)_{n-4}, (4)_{n-3}, (n-2)_{n-2}, (2)_{n-1}, (n)_n\ ), \text{если } n \in Z_1, \\ ((n)_1, (2)_2, (n-2)_3, (4)_4, (n-3)_5, (6)_6\ , ..., \left(\dfrac{n+\delta}{2}\right)_{\frac{n}{2}}, \\ \left(\dfrac{n+\delta}{2} - 1\right)_{\frac{n}{2}+1}, \left(\dfrac{n+\delta}{2} + 1\right)_{\frac{n}{2}+2}, \\ \left(\dfrac{n+\delta}{2} - 3\right)_{\frac{n}{2}+3}, \left(\dfrac{n+\delta}{2} + 3\right)_{\frac{n}{2}+4}, ... , \\ (n-3)_{n-3}, (3)_{n-2}, (n-1)_{n-1}, (1)_n), \qquad \text{если } n \in Z, \end{cases} \tag{3}$$

для которой $w^{k*} \in K_{n-2}$, где $\delta = \begin{cases} 0, \text{если } \dfrac{n}{2} \in Z, \\ 2, \text{если } \dfrac{n}{2} \in Z_1. \end{cases}$

Наибольшее значение целевой функции равняется $F(w^{i*}) = \dfrac{n(n^2-3n+8)-6}{3}$, а нименьшее – соответственно $F(w^{k*}) = \dfrac{n(5n^2+4)}{24}$, если $n \in Z$, и $F(w^{k*}) = \dfrac{n(5n^2+7)-12}{24}$, если $n \in Z_1$.

Доказательство. Если $n \le 4$, то наименьшее и наибольшее значения целевой функции совпадают, поэтому этот вариант не рассматриваем. Сначала докажем, что $F(w^{i*}) > F(w^{k*})$.

Для w^{i*} запишем маршрут $u(w^{i*}, l)|_1^n = (v_1, v_1 + 1, v_2+1, v_3+1, v_4+1, ..., v_{n-2}+1, v_{n-1})$, где $v_j = \dfrac{(j-1)(2n-j)}{2} + 1$ – номер элемента в *j*-й строке гамильтоновой диагонали. Сумма членов этой последовательности $F(w^{i*}) = \sum_{j=1}^{n-1} v_j + 1 + n - 2 = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\dfrac{(j-1)(2n-j)}{2}+1\right) + n - 1 = \dfrac{n(n^2-3n+5)}{3} - 1 + n - 1 = \dfrac{n(n^2-3n+8)-6}{3}$.

Для w^{k*} запишем маршрут

$$\begin{gathered}u(w^{k*}, l)|_1^n = (v_1+(n-3), v_1+(n-2), v_2+(n-5), v_2+(n-3),\\ v_3+(n-7), v_3+(n-5), v_4+(n-9), v_4 + \\ +(n-7), v_5+(n-11), ..., v_{\varsigma-1}+1, v_{\varsigma-1} + \\ +3, v_\varsigma, v_\varsigma+1), \text{ если } n \in Z,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}u(w^{k*}, j)|_1^n = (v_1+(n-3), v_1+(n-2), v_2+(n-5), v_2+(n-3),\\ v_3+(n-7), v_3+(n-5), v_4+(n-9), v_4+(n-7), v_5+(n-11), ...\\ ..., v_{\varsigma-2}+n-(n-2), v_{\varsigma-2}+n-(n-4), v_{\varsigma-1}, v_{\varsigma-1}+2, v_\varsigma),\end{gathered} \tag{5}$$

если $n \in Z_1$, где $\varsigma = \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$.

Найдем суммы членов последовательностей (4), (5). Если $n \in Z$, то $F(w^{k*}) = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} 2v_j +$

$$+\frac{n(n+2)}{2} = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} 2\left(\frac{(j-1)(2n-j)}{2}+1\right) + \frac{n(n-2)}{2} =$$

$$= \frac{n(5n^2-12n+28)}{24} + \frac{n(n-2)}{2} = \frac{n(5n^2+4)}{24}.$$

Если $n \in Z_1$, то $F(w^{k*}) = \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} 2\left(\dfrac{(j-1)(2n-j)}{2}+1\right) +$

$$+\frac{(n-1)(3n-1)}{8} + 1 + \frac{n^2-2n-1}{2} = \frac{n(5n^2-21n+43)-27}{24} +$$

$$+\frac{(n-1)(3n-1)}{8} + 1 + \frac{n^2-2n-1}{2} = \frac{5n^3+7n-12}{24}.$$

Для $n \in Z$ докажем, что $\dfrac{n(n^2-3n+8)-6}{3} > \dfrac{n(5n^2+4)}{24}$. После несложных преобразований получим

$$\frac{n^3-8n^2+20n-16}{8} > 0. \tag{6}$$

Для $n = 6$, для которого $F(w^{i*}) = 50$, $F(w^{k*}) = 46$, неравенство (6) примет вид: $4 > 0$. Следовательно, для любого $n > 4$ левая часть неравенства (6) всегда положительна. Для $n \in Z_1$ запишем неравенство $\dfrac{n(n^2-3n+8)-6}{3} > \dfrac{5n^3+7n-12}{24}$. После несложных преобразований получим $\dfrac{n^3-8n^2+19n-12}{8} > 0$. Очевидно, что для любого $n > 4$ левая часть этого неравенства также всегда положительна.

Докажем, что для любой перестановки w^t в сравнении с w^{i*} значение целевой функции не увеличивается, а в сравнении с w^{k*} – не уменьшается. Возьмем перестановку, при образовании маршрута которой из каждой строки *h* наддиагоналей матрицы *C* выбран наименьший элемент. Запишем ее как $w^t = (1, 2, 3, ..., n)$ (тур Мастера). Соответственно для нее запишем маршрут $u(w^t, l)|_1^n = (v_1, v_2, ..., v_{n-2}, v_{n-1}, n-1)$, а значение $F(w^t) = \sum_{j=1}^{n-1} v_j + n - 1 = \dfrac{n(n^2-3n+8)-6}{3}$, т.е. $F(w^t) = F(w^{i*})$. Итак, для тура Мастера, маршрут для которого образован выборкой по одному наименьшему элементу из каждой *t*-й строки матрицы $Q(w^1)$, $t = \overline{2, n-1}$, целевая функция в сравнении с w^{k*} не уменьшается и равна $F(w^{i*})$.

В перестановке w^{k*} для $n \in Z$ проведем транспозицию элементов $(n-2)_3$ и $(n-1)_{n-1}$. Для перестановки $w^t \in K_{n-3}$ в маршруте $u(w^t, l)|_1^n$ два элемента увеличились на единицу и два элемента уменьшились на единицу, а $F(w^t) = F(w^{k*})$. В w^{k*} проведем транспозицию элементов $(n-2)_3$ и $(n)_1$. Полученная перестановка w^t также находится в подмножестве $(n-3)$, а в соответствующем маршруте два элемента увеличились на два и два элемента уменьшились на два, а $F(w^t) = F(w^{k*})$. Если в w^{k*} провести транспозицию элементов $\dfrac{n}{2}$ и *n*, то полученная перестановка w^t будет находиться в подмножестве $\dfrac{n}{2} - 1$, а в соответствующем маршруте два элемента уменьшатся на $\dfrac{n}{2}$. Элемент $v_{\frac{n}{2}}$ поменяется местами с элементом $v_{\frac{n}{2}}+n-2$, а $v_{\frac{n}{2}}+1$ – с элементом $v_{\frac{n}{2}}+1+\dfrac{3n-10}{2}$. Целевая функция в этом случае увеличится на $\dfrac{3n-14}{2}$, а $F(w^t) > F(w^{k*})$.

Итак, если при образовании маршрута элементы выбираются по два из первых $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$ строк матрицы C, то целевая функция уменьшается. Если маршрут образован выборкой элементов из строк по номерам больше, чем $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$, то целевая функция увеличивается. Таким образом, наибольшее значение целевая функция принимает для перестановки (2) и $w^{i*} \in K_1$, при $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, ..., m)$, а наименьшее – для перестановки (3) и $w^{k*} \in K_{n-2}$, что и доказывает теорему 2 для $n \in Z$.

Аналогично теорема 2 доказывается для $n \in Z_1$.

Теорема доказана.

Следствие 1**.** Если значение комбинаторной функции $\beta(f(j), w^1) = k^0 j + b$ или $\beta(f(j), w^1) = 2^j$, $j = \overline{1, m}$, k^0, $b > 0$ – целые произвольные числа, то наибольшее значение целевая функция принимает для перестановки (2), соответствующий маршрут которой $u(w^{i*}, l)|_1^n \in H_1$ и $w^{i*} \in K_1$, а наименьшее значение – для перестановки (3), соответствующий маршрут для которой $u(w^{k*}, j)|_1^n \in H_{n-2}$ и $w^{k*} \in K_{n-2}$.

Теорема 3. (действительна для $n > 4$). Если комбинаторная функция $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (m, ..., 1)$ (матрицы Демиденко, Кальмансон), то наибольшее значение целевая функция принимает для перестановки (3), соответствующий маршрут которой $u(w^{i*}, l)|_1^n \in H_{n-2}$, а наименьшее значение – для перестановки (2), соответствующий маршрут которой $u(w^{k*}, l)|_1^n \in H_1$. Наименьшее значение целевой функции равно $F(w^{k*}) = \dfrac{n^3+3n^2-10n+12}{6}$, а наибольшее – соответственно $F(w^{i*}) = \dfrac{7n^3-12n^2+20n}{24}$, если $n \in Z$, и $F(w^{i*}) = \dfrac{7n^3-12n^2+17n+12}{24}$, при $n \in Z_1$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

Доказательство сходимости методов и алгоритмов, основанных на распознавании структуры входной информации. Докажем сходимость метода структурно-алфавитного поиска [13], «жадного» алгоритма и метода ближайшего соседа с использованием приведенных подклассов разрешимых задач для задачи коммивояжера.

Теорема 4. Метод структурно-алфавитного поиска сходится, если для подклассов разрешимых задач построением не более чем $\dfrac{n^2}{2}$ перестановок он обеспечивает поиск упорядоченной последовательности локальных экстремумов $F = (F(\mathrm{w}^1), F(w^2), ..., F(w^k))$ таких, что $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) \to 0$, среди которых существует такой, для которого $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = 0$, при $k, k^* \in \{1, ..., n^2/2\}$.

Для доказательства теоремы 4 сформулируем такие леммы.

Лемма 1**.** Если для упорядоченной задачи коммивояжера первые n значений $\vec{\beta}(f(j), \mathrm{w}'^t)$ (или $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i)$), $j = \overline{1, m}$, образуют маршрут (гамильтонов цикл), то $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m = \beta(f(j), w^{k*})|_1^m$ (или $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i)|_1^m = \beta(f(j), w^{k*})|_1^m$), а $w^{k*} \in W$ есть глобальное решение базовой задачи; $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m$, $\overleftarrow{\beta}(f(j), w'^i)|_1^m \in H'$, $\beta(f(j), w^{k*})|_1^m \in H$, $H \subset H'$.

Доказательство очевидно.

Лемма 2**.** Если базовая задача коммивояжера задана функцией натурального аргумента $\beta(f(j), \mathrm{w}^1)|_1^m$, которая изменяется как монотонная (неубывающая или невозрастающая), то для нахождения по упорядоченной задаче глобального решения методом структурно-алфавитного поиска необходимо построить не более чем $\dfrac{n^2}{2}$ перестановок.

Доказательство. Рассмотрим задачу коммивояжера, в которой комбинаторная функция меняется как монотонно неубывающая. Положим, что $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, ..., m)$ – линейная функция. Эту задачу сведем к упорядоченной. Запишем $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m = (1, ...m)$, а $\bar{\varphi}(j)|_1^m = ((1)_1, (1)_2, ..., (1)_n, (0)_{n+1}, ..., (0)_m)$. Построим для нее последовательность локальных экстремумов. Как следует из теоремы 2, для задачи коммивояжера, входные данные в которой заданы функцией $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, ..., m)$, наибольшее значение целевая функция принимает для перестановки (2) в подмножестве K_1, а наименьшее – для перестановки (3) в подмножестве K_{n-2}. Чтобы получить перестановку в подмножестве K_{n-2}, необходимо зафиксировать в ней элементы в таком порядке $(..., n-1, 1, n, ...)$ или по комбинаторной функции $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m = (1, .., m)$ последовательно построить $n-2$ перестановки, начиная со значения $\vec{\beta}(f(1), w'^t) = 1$, $\vec{\beta}(f(2), w'^t) = 2$ и заканчивая $\vec{\beta}(f(n-2), w^{'t}) = n-2$, т.е. из $n-1$ элементов наддиагональной строки матрицы выбрать два элемента, которые в сочетании с элементами других строк образуют маршрут (соответственно образуется и перестановка), для которой значение целевой функции – наименьше. Для $\vec{\beta}(f(1), w^{'t}) = 1$ полученная перестановка принадлежит подмножеству K_1, для $\vec{\beta}(f(2), w^{'t}) = 2$ она принадлежит K_2, а для $\vec{\beta}(f(n-2), w^{'t}) = n-2$ – соответственно к K_{n-2}. Для заданной структуры входных данных среди маршрутов, которые с первой строки матрицы содержат элементы $n-2$ и $n-1$, – кратчайшие.

Комбинацией элементов со второй строки матрицы в подмножестве K_{n-2} найдем меньшее подмножество, содержащее глобальный минимум. Для этого зафиксируем значения $\vec{\beta}(f(n-2), w^{'t}) = n-2$ и $\vec{\beta}(f(n-1), w^{'t}) = n-1$, пропустим $\vec{\beta}(f(n), w^{'t}) = n$ (для него перестановка уже построена) и, начиная с $\vec{\beta}(f(n+1), w^{'t}) = n+1$, затем с $\vec{\beta}(f(n+2), w^{'t}) = n+2$ строим следующие перестановки. Для перестановки, где целевая функция – наименьшая, маршрут со второй строки матрицы содержит элементы $\vec{\beta}(f(2n-5), w^{'t}) = 2n-5$ и $\vec{\beta}(f(2n-3), w^{'t}) = 2n-3$. Количество построенных перестановок равно $n-3$. Аналогично, комбинацией элементов из каждой строки выберем по два элемента так, чтобы полученный маршрут был самым коротким. Количество построенных перестановок для каждой строки равно $n-(s-1)$, где s – номер строки матрицы. Положим, что их количество равно n. Маршрут, которому соответствует перестановка $w^{k^*} = ((1, n-1, 3, n-3, 5, n-5, 7, ..., n-4, 4, n-2, 2, n)$, содержит по два элемента из $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ наддиагональних строк матрицы $Q(w^k)$ и является глобальным минимумом (выражение (3)). Итак, чтобы найти глобальный минимум для задачи коммивояжера, входные данные в которой заданы $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m = (1, ..., m)$, строится последовательность решений не более чем $\frac{n^2}{2}$ перестановок, что и доказывает лемму 2 для линейной функции.

Для задачи коммивояжера, входные данные в которой задаются комбинаторными функциями, которые меняются как монотонные (неубывающие или невозрастающие), лемма 2 доказывается аналогично.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3**.** Если базовая задача коммивояжера задана функцией натурального аргумента, содержащей не менее $\frac{5n-1}{4}$ наименьших одинаковых значений и они образуют маршрут (гамильтонов цикл), то метод структурно-алфавитного поиска сходится, если для подклассов разрешимых задач с построением не более $\frac{n^2}{2}$ перестановок он обеспечивает нахождение упорядоченной последовательности локальных экстремумов $F = (F(w^1), F(w^2), ..., F(w^k))$ таких, что $\Delta(F_{\min}, F(w^{k^*})) \to 0$, среди которых существует такой, для которого $\Delta(F_{\min}, F(w^{k^*})) = 0$, где $k, k^* \in \{1, ..., \frac{n^2}{2}\}$.

Доказательство. Лемму 3 доказываем методом математической индукции. Рассмотрим задачу, входные данные в которой заданы комбинаторной функцией $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (c, b, c, b, ..., c'_{m-1}, b'_m)$, где $c' = \begin{cases} c, & \text{если} \quad m \in Z, \\ b, & \text{если} \quad m \in Z_1, \end{cases}$ $b' = \begin{cases} c, & \text{если} \quad m \in Z_1, \\ b, & \text{если} \quad m \in Z, \end{cases}$ $c < b$, $Z \in \{2, 4, ..., 2j\}$, $Z_1 \in \{1, 3, ..., 2j-1\}$. Сведем ее к упорядоченной. Запишем $\vec{\varphi}(j)|_1^m = ((1)_1, (1)_2, ..., (1)_n, (0)_{n+1}, ..., (0)_m)$, а $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m = ((c)_1, (c)_2, ..., (b)_{m-1}, (b)_m)$. Количество наименьших значений c в $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m$ больше чем $\frac{5n-1}{4}$ и для них выполняются условия существования гамильтонова цикла [14]. Как доказано в [15], наименьшее значение целевой функции для $n = \{5, 6\}$, равно $(n-1)c + b$, поэтому эти варианты не рассматриваем. Поскольку значение целевой функции зависит от парных и непарных n, $\frac{n}{2}$, $\frac{n+3}{2}$ и перестановки для них – разные [15], то лемму 2 доказываем для $n = \{7, 8, 9, 10\}$. Проведем поиск перестановки (гамильтонова цикла), для которого целевая функция равна $F(w^k) = nc$. Значение c в $\beta(f(j), w^1)|_1^m$ пребывают в позициях с нечетными номерами, поэтому глобальный минимум ищем в подмножествах K_s, где $s \in Z_1$.

Положим $n = 7$. Начиная с $\vec{\beta}(f(1), w^{'t}) = c$ и $\vec{\beta}(f(2), w^{'t}) = c$, построим перестановку

- $w^1 = (4, 1, 2, 3, 5, 7, 6)$. Для нее значение целевой функции равно $F(w^1) = (n-1)c + b.$ Пропустим $\vec{\beta}(f(2), w^{'t}) = c$ и, начиная с $\vec{\beta}(f(1), w^{'t}) = c$ и $\vec{\beta}(f(3), w^{'t}) = c$, построим следующую перестановку
- $w^2 = (6, 1, 2, 3, 5, 7, 4)$, для которой $F(w^2) = (n-2)c + 2b.$ Поскольку значение целевой функции увеличилось, возвратимся к предыдущим $\vec{\beta}(f(1), w^{'t}) = c$ и $\vec{\beta}(f(2), w^{'t}) = c$, а во второй строке матрицы проведем

перебор элементов c, т.е. пропустим $\vec{\beta}(f(3), w^{'t}) = c$, учтем $\vec{\beta}(f(4), w^{'t}) = c$ и получим перестановку

- $w^3 = (4, 1, 2, 5, 3, 7, 6)$, для которой $F(w^3) = n\,c$.

Итак, глобальный минимум для $n = 7$, если $n \in Z_1$, $(n+3)/2 \in Z_1$, найден в K_1 построением трех перестановок.

Положим $n = 8$. Аналогично предыдущему варианту методом структурно-алфавитного поиска построим перестановки:

- $w^1 = (7, 3, 5, 4, 1, 2, 6, 8)$, для которой $F(w^1) = (n-1)c + b$;
- $w^2 = (6, 1, 2, 4, 5, 3, 7, 8)$, для которой $F(w^2) = (n-1)\,c + b$;
- $w^3 = (4, 1, 2, 8, 6, 7, 3, 5)$, для которой $F(w^3) = (n-1)c + b$;
- $w^4 = (4, 1, 2, 6, 8, 5, 3, 7)$, для которой $F(w^4) = n\,c$.

Глобальный минимум для $n = 8$, если $n \in Z$, $\frac{n}{2} \in Z$, в подмножестве K_1 найден построением четырех перестановок.

Положим $n = 9$. Построим перестановки:

- $w^1 = (9, 7, 6, 4, 1, 2, 3, 5, 8)$, для которой $F(w^1) = (n-1)c + b$;
- $w^2 = (6, 1, 2, 3, 5, 9, 7, 8, 4)$, для которой $F(w^2) = (n-2)\,c + 2b$;
- $w^3 = (4, 1, 2, 5, 3, 7, 8, 9, 6)$, для которой $F(w^3) = (n-2)c + 2b$;
- $w^4 = (4, 1, 2, 3, 7, 9, 8, 5, 6)$, для которой $F(w^4) = (n-1)c + b$;
- $w^5 = (4, 1, 2, 3, 7, 9, 6, 5, 8)$, для которой $F(w^5) = n\,c$.

Глобальный минимум для $n - 9$, если $n \in Z_1$, $(n+3)/2 \in Z$, найден в K_1 построением пяти перестановок.

Положим $n - 10$. Используя описанные правила, построим перестановки:

- $w^1 = (4, 1, 2, 6, 8, 10, 9, 7, 3, 5)$, для которой $F(w^1) = (n-1)c + b$;
- $w^2 = (6, 1, 2, 4, 5, 3, 7, 9, 10, 8)$, для которой $F(w^2) = (n-1)c + b$;
- $w^3 = (4, 1, 2, 8, 6, 10, 9, 7, 3, 5)$, для которой $F(w^3) = n\,c$.

Глобальный минимум для $n - 10$, если $n \in Z$, $n/2 \in Z_1$, найден в K_1 построением трех перестановок.

По индукции, если для задачи с произвольным n матрица содержит одинаковые элементы, из которых образуется маршрут, то для нахождения глобального минимума в этом случае необходимо провести последовательный перебор элементов для каждой строки отдельно. Поскольку в каждой строке для периодической функции со значениями $\{c, b\}$ может быть $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ элементов c, то для нахождения гамильтонова цикла необходимо построить не более $\frac{n}{2} n = \frac{n^2}{2}$ перестановок, что и доказывает лемму 3, когда входные данные заданы периодической функцией натурального аргумента, или другой функцией, содержащей не менее $\frac{5n-1}{4}$ наименьших одинаковых значений и они образуют маршрут (гамильтонов цикл).

Справедливость теоремы 4 для задачи коммивояжера следует из лемм 1 и 2.

Теорема 4 доказана.

Следствие 2. Если в задаче коммивояжера комбинаторная функция $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, ..., m)$, то по правилам метода ближайшего соседа при поиске минимального значения целевой функции приведенного разрешимого случая найдена перестановка $w^{i*} = (1, 3, 5, 7, \ldots$ $\ldots, 8, 6, 4, 2)$, которая служит для него глобальным максимумом, т.е. сходимостью метода $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) \to 1$.

Если в задаче коммивояжера комбинаторная функция $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (1, ..., m)$, то по правилам «жадного» алгоритма при поиске глобального максимума получим глобальный минимум, т.е. сходимость алгоритма равна $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = 0$.

Для обоих случаев скорость сходимости равна одной итерации.

Следствие 3. Если в задаче коммивояжера комбинаторная функция $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (m, ..., 1)$, то по правилам метода ближайшего соседа при поиске минимального значения целевой функции приведенного разрешимого случая найдена перестановка (3), которая есть для него глобальным минимумом, т.е. сходимость метода равна $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = 0$.

Если в задаче коммивояжера комбинаторная функция $\beta(f(j), w^1)|_1^m = (m, ..., 1)$, то по правилам «жадного» алгоритма при поиске глобального максимума получаем глобальный минимум, т.е. сходимость алгоритма равна $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) \to 1$.

Для обоих случаев скорость сходимости равна одной итерации.

Изложенный в следствиях 2 и 3 результат объясняется тем, что в этих методах не проводится анализ по выявлению факторов, влияющих на значение целевой функции в зависимости от комбинации элементов входных данных.

Заключение. Итак, сходимость методов, основанных на распознавании структуры входной информации, можно доказать с использованием подклассов разрешимых задач.

Окончание на стр. 27

Так, сходимость последовательности решений, построенных методом структурно-алфавитного поиска для задачи коммивояжера приближается к нулю, т.е. $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) \to 0$, а для подклассов разрешимых задач $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = 0$. Ее скорость – полиномиальна по вычислительной сложности. Сходимость метода ближайшего соседа и «жадного» алгоритма зависит от структуры входных данных. Для одних структур решение равно $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) = 0$, а для других может быть $\Delta(F_{\min}, F(w^{k*})) \to 1$. Это решение, как правило, достигается за одну итерацию.

UDC УДК 519.816

N.K. Tymofijeva

The Proof of the Algorithms Convergence for Combinatorial Optimization with the Using Subclasses of the Solved Problems

Keywords: combinatorial optimization, combinatorial configuration, objective function, traveling salesman problem, structure-alphabetical search method, nearest neighbor method, «greedy» algorithm.

The proof of the approximate solutions convergence sequence to a global solution of the combinatorial optimization problem, which is based on a particular algorithm, is rather complicated problem. This is due to the fact that some classes of problems are unsolvable because of their computational complexity. A lot of researches are devoted to the problem of the methods and algorithms convergence within the mathematical programming. They enter the formal level features required and sufficient conditions for their convergence.

The original way to prove some convergence combinatorial optimization methods, based on recognition of the structure of input data (structure-alphabetical search method nearest neighbor method, "greedy" algorithm) is presented. For this purpose, the subclasses of the traveling salesman problems is used. A sequence of the convergence solutions that are built specifically is proved.

To assess the methods accuracy, which are decided on a set of permutations, the input data of combinatorial optimization problems defines the functions of the natural argument, one of which is combinatorial. This allows to define a set of values of the objective function for basic problem and to establish some error of interpretation algorithm.

An solvable case for the traveling salesman problem is shown, in which the input data requires the linear combinatorial function for which analytically the global minimum and maximum are found. Using this case proves that the convergence of a solutions sequence built by the structural alphabet search for the traveling salesman problem is close to zero. The optimal solution for subclasses coincides with the global. The speed of the described method is polynomial of computational complexity. The convergence of the nearest neighbor method and of the "greedy" algorithm depends on the structure of input data. For some, the solution structures coincides with the global, while others may be far from optimal.

●