

# Применения (опыт разработки и внедрения информационных технологий)

УДК 519.6

О.М. Литвин, В.В. Драгун

## Метод пошуку першого наближення для розв'язання задачі шахтної сейсмічної томографії в неоднорідному середовищі

Предложен новый метод поиска первого приближения при исследовании внутренней структуры прямоугольного тела по времени прихода сейсмической волны от источников к приемникам. Проведен вычислительный эксперимент.

**Ключевые слова:** сейсмическая томография, первое приближение.

Запропоновано новий метод пошуку першого наближення при дослідженні внутрішньої структури прямокутного тіла за часом приходу сейсмічної хвилі від джерел до приймачів. Проведено обчислювальний експеримент.

**Ключові слова:** сейсмічна томографія, перше наближення.

**Вступ.** Сейсмічна томографія – один з актуальних напрямів сучасної геофізики – ґрунтується на побудові зображень об'єкту шляхом дослідження траєкторій розповсюдження сейсмічних сигналів [1, 3–8].

Шахтні сейсмозрозв'язувальні роботи, спрямовані на прогноз і дослідження геологічних порушень вугільного пласта, виконуються з використанням трьох основних методів: методу відбитих хвиль, сейсмічного просвічування і сейсмічної локації попереду вибою [1, 3–8]. Сутність цих методів в цілому полягає у збудженні і реєстрації пружних коливань в межах вугільного пласта, виділенні і аналізі динамічних і кінематичних параметрів хвиль різних типів.

### Огляд літературних джерел

Основні положення теорії сейсмографії викладено в працях [1, 3–15].

Першою узагальненою роботою щодо застосування шахтної сейсмозрозвідки для прогнозу гірничо-геологічних ускладнень при розробці вугільних пластів за конкретних умов, типових для вугільних басейнів України, є монографія [1].

На прикладі ділянки, підготовлюваної до відпрацювання лави шахти, дано аналіз особливостей проведення шахтних сейсмоакустич-

них експериментів в умовах потужних пластів Карагандинського вугільного басейну, його коротку геологічну характеристику і безпосередньо ділянки досліджень [10].

Сейсмічна і амплітудна томографія досліджується у [11]. Також пропонується для опису аномалії використовувати обробку хвильових пакетів, відбитих від розташованого за нею різкого акустичного кордону.

Узагальнені результати сейсмічних досліджень в шахтах Кузбасу за технологією просвічування вугільних пластів з використанням автономних станцій реєстрації сейсмічних даних містяться у [12].

Вирази для швидкості інтерференційних хвиль Лява та Релея в дискретно-шаруватій моделі середовища вперше подано в [13, 14]; запропонований метод отримав назву *метод Томсона-Хаскелла*.

Модель *n*-шарового напівпростору – пружної системи, що складається з довільного числа плоскопаралельних шарів і напівпростору, заповнених однорідним ізотропним середовищем розглянуто в [9].

Основи запропонованого автором принципово нового методу розв'язання динамічної оберненої задачі сейсміки – дифракційного перетворення сейсмічних записів у зображення

середовища, здійснюваного, як і в оптичній голографії методом відновлення хвильового поля для гармонійного і нестационарного випромінювання на базі модифікованого дифракційного інтеграла Кірхгофа викладено у [8].

Новий метод розв'язання плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії запропоновано у [16]. В основу методу покладено оригінальні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних за допомогою проєкцій вздовж деякої системи ліній, що перетинають об'єкт дослідження (рис. 1). Особливістю даного методу є заміна тригонометричних функцій кусково-сталими сплайнами найкращого рівномірного наближення.

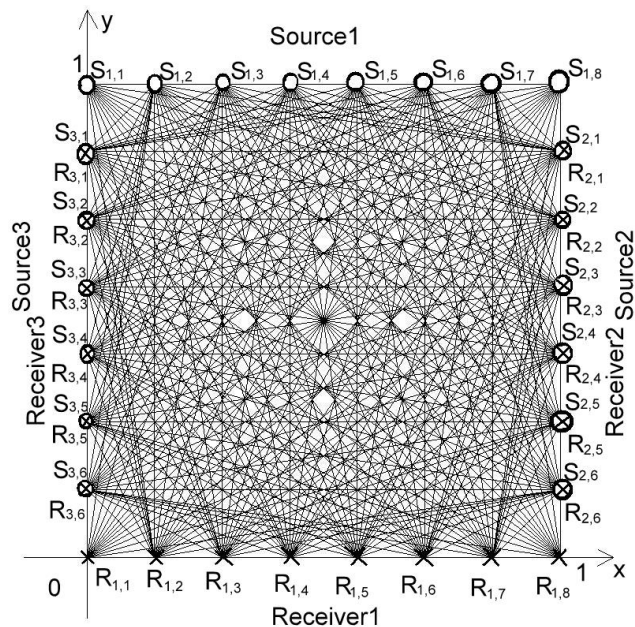


Рис. 1. Схема розташування ліній

Суть методу полягає у математичному моделюванні структури тіла у вигляді скінченної суми ряду Фур'є

$$F(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N C_{k,l} e^{-i2\pi(kx+ly)}, \quad (1)$$

де  $C_{kl} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i2\pi(kx+ly)} dx dy$  – коефіцієнти

Фур'є невідомої функції  $f(x, y)$ , що описує структуру тіла, яку пропонується обчислювати за допомогою часу пробігу сейсмічних хвиль від системи джерел до системи прийма-

чів. Формули для їх обчислення, які використовуються в даній роботі для випадку, коли відомі не проєкції, а часи прибуття, наведено у [16, 17].

Метод, представлений у [16], був розвинутий в дисертаційній роботі [17], де розглянуто проблему розробки і дослідження чисельної реалізації та нового методу розв'язання плоскої задачі комп'ютерної томографії, запропонованого в [16].

Як результат, автором [17] було запропоновано і досліджено оригінальний метод розв'язання плоскої задачі комп'ютерної томографії з використанням вейвлетів Хаара, який застосовує оригінальну схему сканування, яка витікає з [16], відмінну від в діючих в комп'ютерних томографах схем сканування.

### Основні твердження

В даній роботі будемо вважати, що невідома функція  $f(x, y)$  є повільністю  $W(x, y)$ , тобто функцією, яка в кожній точці  $(x, y)$  є величиною оберненою до швидкості  $V(x, y)$ :

$$f(x, y) = W(x, y) = \frac{1}{V(x, y)}.$$

При обчисленні коефіцієнтів Фур'є  $CF_{k,l} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy$  за допомогою проєкцій, методом, описаним у [16, 17] справедливій рівності:

$$CF_{0,0} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \gamma_2(y) dy,$$

$$\gamma_2(y) = \int_0^1 f(x, y) dx, \quad \text{де } k = 0, l = 0,$$

$$CF_{k,0} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi kx} dx dy = \int_0^1 \gamma_1(x) e^{-i2\pi kx} dx,$$

$$\gamma_1(x) = \int_0^1 f(x, y) dy, \quad \text{де } k > 0, l = 0,$$

$$CF_{0,l} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi ly} dx dy = \int_0^1 \gamma_2(y) e^{-i2\pi ly} dy,$$

де  $k = 0, l > 0$ .

При  $k < 0$ ,  $l < 0$  маємо  $CF_{-|k|,0} = \overline{CF_{|k|,0}}$  ;  
 $CF_{0,-|l|} = \overline{CF_{0,|l|}}$ ,  $\overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta$ .

Для  $k \geq 1$ ,  $l \geq 1$ :

1. При  $k \geq l$ :

$$CF_{k,l} = I_1 + I_2 + I_3, \quad I_1 = l \int_0^1 \frac{F_1(zl)e^{-i2\pi zl} dz}{k^2 + l^2},$$

$$I_2 = \frac{k-l}{k^2 + l^2} \int_0^1 F_2(l+z(k-l))e^{-i2\pi(l+z(k-l))} dz,$$

$$I_3 = l \int_0^1 \frac{F_3(k+zl)e^{-i2\pi(k+zl)} dz}{k^2 + l^2},$$

де  $F_1(t) = \int_{\frac{-l}{k}}^{\frac{k}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv,$

$$F_2(t) = \int_{\frac{-l}{k}}^k f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv,$$

$$F_3(t) = \int_{\frac{1}{l}(-k^2-l^2+kt)}^{\frac{1}{k}(k^2+l^2-lt)} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv.$$

2. При  $k < l$ :

$$CF_{k,l} = I_1 + I_2 + I_3, \quad I_1 = \frac{k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi kz} G_1(kz) dz,$$

$$I_2 = \frac{l-k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(k+z(l-k))} G_2(k+z(l-k)) dz,$$

$$I_3 = \frac{k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(l+kz)} G_3(l+kz) dz,$$

де  $G_1(t) = \int_{\frac{-l}{k}}^{\frac{k}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv,$

$$G_2(t) = \int_{\frac{-k^2-l^2+kt}{l}}^{\frac{k}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv,$$

$$G_3(t) = \int_{\frac{-k^2-l^2+kt}{l}}^{\frac{k}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv.$$

3. При  $k \geq l \geq 1$ :

$$CF_{k,-l} = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = \frac{l}{k^2 + l^2} \int_0^1 \varphi_1(z(-l)) e^{-i2\pi z(-l)} dz,$$

$$I_2 = \frac{k-l}{k^2 + l^2} \int_0^1 \varphi_2(z(k-l)) e^{-i2\pi z(k-l)} dz,$$

$$I_3 = \frac{l}{k^2 + l^2} \int_0^1 \varphi_3(k-l+zl) e^{-i2\pi(k-l+zl)} dz,$$

де  $\varphi_1(v) = \int_{\frac{-kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$

$$\varphi_2(v) = \int_{\frac{l}{k}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$$

$$\varphi_3(v) = \int_{\frac{l}{k}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt.$$

4. При  $1 \leq k < l$ :

$$CF_{k,-l} = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = \frac{k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(kz-l)} \omega_1(kz-l) dz,$$

$$I_2 = \frac{l-k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(z(k-l))} \omega_2(z(k-l)) dz,$$

$$I_3 = \frac{k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi kz} \omega_3(kz) dz,$$

де  $\omega_1(v) = \int_{\frac{-kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$

$$\omega_2(v) = \int_{\frac{-kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2-kv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$$

$$\omega_3(v) = \int_{\frac{-kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2-kv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt.$$

Для значень  $k, l$ , що задовольняють умови  $k, l \leq -1$  виконується рівність:

$$CF_{-k,-l} = \overline{CF_{k,l}}; \quad CF_{-k,l} = \overline{CF_{k,-l}}, \quad \alpha + i\beta = \alpha - i\beta$$

Доведення цих формул – у [17].

Важливою характеристикою інтегралів  $\omega_1(v)$ ,  $\omega_2(v)$ ,  $\omega_3(v)$  та подібних до них, є те, що вони вважаються відомими лише для дискретної кількості значень змінної  $v$ .

Функції  $F_\mu$ ,  $G_\mu$ ,  $\varphi_\mu$ ,  $\omega_\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3$  є проєкціями, отриманими інтегруванням функцій  $f(x, y)$  вздовж прямих, що перетинають квадрат  $[0, 1]^2$  і проходять паралельно прямим  $kx + ly = t$ .

Далі подано явні вирази для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є запропонованим у даній роботі методом заміни функцій  $F_\mu$ ,  $G_\mu$ ,  $\varphi_\mu$ ,  $\omega_\mu$ , скінченними сумами вейвлетів Хаара.

Для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є з використанням вейвлетів Хаара шляхом дискретного набору проєкцій маємо формули

$$CF_{0,0} \approx CF_{0,0,M} = \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M \gamma 1_p = \frac{1}{M} \sum_{q=1}^M \gamma 2_q,$$

$$CF_{k,0} \approx CF_{k,0,M} = \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M \gamma 1_p e^{-i\frac{p}{M}},$$

$$CF_{0,l} \approx CF_{0,l,M} = \frac{1}{M} \sum_{q=1}^M \gamma 2_q e^{-i\frac{q}{M}},$$

$$CF_{k,l} \approx CF_{k,l,N} = I_{1,k,l,N_1} + I_{2,k,l,N_2} + I_{3,k,l,N_3}, \quad k \geq l \geq 1,$$

$$I_{1,k,l,N_1} = \frac{l}{k^2 + l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{l}{N_1}} - 1}{-i2\pi l} \right) \sum_{q=0}^{N_1-1} \dot{F}_1 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi\frac{q}{N_1} l},$$

$$\dot{F}_1(z) = F_1(zl), \quad z_q = \frac{q}{N_1},$$

$$I_{2,k,l,N_2} = \frac{k-l}{k^2 + l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{k-l}{N_2}} - 1}{-i2\pi(k-l)} \right) \sum_{q=0}^{N_2-1} \dot{F}_2 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi\frac{q}{N_2}(k-l)},$$

$$\dot{F}_2(z) = F_2(l + z(k-l)), \quad z_q = \frac{q}{N_2},$$

$$I_{3,k,l,N_3} = \frac{l}{k^2 + l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{l}{N_3}} - 1}{-i2\pi l} \right) \sum_{q=0}^{N_3-1} \dot{F}_3 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi\frac{q}{N_3} l},$$

$$\dot{F}_3(z) = F_3(k + zl), \quad z_q = \frac{q}{N_3}.$$

$$CF_{k,l} \approx CF_{k,l,N} = I_{1,k,l,N_1} + I_{2,k,l,N_2} + I_{3,k,l,N_3}, \quad l > k \geq 1,$$

де

$$I_{1,k,l,N_1} = \frac{k}{k^2 + l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{k}{N_1}} - 1}{-i2\pi k} \right) \sum_{q=0}^{N_1-1} \dot{G}_1 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi k \frac{q}{N_1}},$$

$$\dot{G}_1(z) = G_1(zk), \quad z_q = \frac{q}{N_1},$$

$$I_{2,k,l,N_2} = \frac{l-k}{k^2 + l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{l-k}{N_2}} - 1}{-i2\pi(l-k)} \right) \times$$

$$\times \sum_{q=0}^{N_2-1} \dot{G}_2 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi\frac{q}{N_2}(l-k)},$$

$$\dot{G}_2(z) = G_2(k + z(l-k)), \quad z_q = \frac{q}{N_2},$$

$$I_{3,k,l,N_3} = \frac{k}{k^2 + l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{k}{N_3}} - 1}{-i2\pi k} \right) \sum_{q=0}^{N_3-1} \dot{G}_3 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi k \frac{q}{N_3}},$$

$$\dot{G}_3(z) = G_3(l + kz), \quad z_q = \frac{q}{N_3}.$$

$$CF_{k,-l} \approx CF_{k,-l,N} = I_{1,k,l,N_1} + I_{2,k,l,N_2} + I_{3,k,l,N_3}, \quad k > l > 0,$$

$$I_{1,k,l,N_1} = \frac{l}{k^2 + l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{(-l)}{N_1}} - 1}{-i2\pi(-l)} \right) \times$$

$$\times \sum_{q=0}^{N_1-1} \dot{\varphi}_1 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi(-l)\frac{q}{N_1}}, \quad \dot{\varphi}_1(z) = \varphi_1(z(-l)),$$

$$z_q = \frac{q}{N_1}, \quad I_{2,k,l,N_2} = \frac{k-l}{k^2 + l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{k-l}{N_2}} - 1}{-i2\pi(k-l)} \right) \times$$

$$\times \sum_{q=0}^{N_2-1} \dot{\varphi}_2 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi(k-l)\frac{q}{N_2}},$$

$$\dot{\varphi}_2(z) = \varphi_2(z(k-l)), \quad z_q = \frac{q}{N_2},$$

$$I_{3,k,l,N_3} = \frac{l}{k^2 + l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi \frac{l}{N_3}} - 1}{-i2\pi l} \right) \sum_{q=0}^{N_3-1} \dot{\phi}_3 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi k \frac{q}{N_3}},$$

$$\dot{\phi}_3(z) = \phi_3(k - l + zl), \quad z_q = \frac{q}{N_3}.$$

$$CF_{k,-l} \approx CF_{k,-l,N} = I_{1,k,l,N_1} + I_{2,k,l,N_2} + I_{3,k,l,N_3}, \quad l > k > 0,$$

$$\text{де } I_{1,k,l,N_1} = \frac{k}{k^2 + l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi \frac{k}{N_1}} - 1}{-i2\pi k} \right) \sum_{q=0}^{N_1-1} \dot{\omega}_1 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi k \frac{q}{N_1}},$$

$$\dot{\omega}_1(z) = \omega_1(kz - l), \quad z_q = \frac{q}{N_1},$$

$$I_{2,k,l,N_2} = \frac{l-k}{k^2 + l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi \frac{k-l}{N_2}} - 1}{-i2\pi(k-l)} \right) \times$$

$$\times \sum_{q=0}^{N_2-1} \dot{\omega}_2 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi(k-l) \frac{q}{N_2}},$$

$$\dot{\omega}_2(z) = \omega_2(z(k-l)), \quad z_q = \frac{q}{N_2},$$

$$I_{3,k,l,N_3} = \frac{k}{k^2 + l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi \frac{k}{N_3}} - 1}{-i2\pi k} \right) \times$$

$$\times \sum_{q=0}^{N_3-1} \dot{\omega}_3 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi k \frac{q}{N_3}}, \quad \dot{\omega}_3(z) = \omega_3(kz), \quad z_q = \frac{q}{N_3}.$$

В реальних умовах в шахтній сейсмічній томографії, на відміну від комп'ютерної томографії, промені лише в окремих випадках є прямими лініями, що обмежує використання методу, описаного в [16, 17]. При більш точному наближенні можна розглянути нев'язку часів прибуття променя [15],

$$\delta T(p, \varphi) = \int_L \delta u(x) ds, \quad (2)$$

де  $T = T_0 + \delta T$  і  $u = u_0 + \delta u$ . Опорні часи пробігу  $T_0(p, \varphi) = \int_{L_0} \delta u_0(x) ds$  обчислюються для променів, відповідних повільності опорної моделі  $u_0(x)$ , і при інтерпретації нев'язок (2) про-

мені вважаються прямолінійними, тобто можна використовувати метод, описаний у [16, 17], в якому для обчислення коефіцієнтів Фур'є функції від двох змінних використані явні формули, для підстановки в них значень базових проекцій, аналог кубатурної формули на той випадок, коли експериментальні дані про функцію  $f(x, y)$  задаються не значеннями, а проекціями вздовж заданої системи прямих.

Припустимо, що маємо якесь прямокутне тіло. Шляхом заміни змінних приведемо тіло до квадратного  $[0,1] \times [0,1]$ , на сторонах якого розташуємо джерела та приймачі сейсмічного сигналу; приклад одного з варіантів такого розташування показано на рис. 1. В результаті отримаємо час прибуття сейсмічної хвилі від кожного джерела до кожного приймача. Знаючи координати точок, в яких розміщено джерела і детектори, з урахуванням часів прибуття сейсмічного сигналу від джерел до приймачів, можемо обчислити повільність розповсюдження сейсмічного сигналу вздовж прямої, яка з'єднує джерело з приймачем (див. рис. 1).

Знаючи координати точок, в яких розміщені джерела і приймачі, знаючи часи прибуття сейсмічного сигналу від джерел до приймачів, можна розв'язати дану задачу методом розв'язання плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії [15].

Тоді в формулі

$$F(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N C_{k,l} e^{-i2\pi(kx+ly)}, \quad f(x, y) = \frac{1}{V(x, y)},$$

$V$  – швидкість розповсюдження сейсмічного сигналу в координаті  $(x, y)$ , а невідома функція  $f(x, y)$  є функцією повільності розповсюдження хвилі в кожній точці від джерела сейсмічного сигналу до приймача.

Підрахувавши суму Фур'є, отримаємо  $F(x, y)$ , що є наближеним значенням функції  $f(x, y) = W(x, y) = \frac{1}{V(x, y)}$ .

Якщо періодична неперервна функція  $f(x)$  має неперервні похідні до  $(k-1)$ -го порядку включно, а похідна  $k$ -го порядку є функцією, що задовольняє умови Діріхле, то коефіцієнти

Фур'є  $a_n, b_n$  функції  $f(x)$  будуть порядку не нижче  $\frac{1}{n^{k+1}}$ , тобто матимуть оцінку

$$|a_n| \leq \frac{Q}{n^{k+1}}, \quad |b_n| \leq \frac{Q}{n^{k+1}},$$

де  $Q$  – деяке позитивне число,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{і} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

[17].

При  $k \geq 1$  ряд Фур'є функції  $f(x)$  буде рівномірно збіжним. Оскільки коефіцієнти  $a_n, b_n$  задовольняють нерівність  $|a_n| < \frac{Q}{n^{k+1}}, |b_n| < \frac{Q}{n^{k+1}}$ ,

а загальний член ряду матиме оцінку

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| < \frac{2Q}{n^2},$$

отримаємо абсолютну і рівномірну збіжність ряду, оскільки ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  є збіжним.

Ці твердження відповідно переносяться на випадок диференційованих функцій двох змінних  $f(x, y)$ . Якщо наближувана функція має розриви першого роду, то, як відомо, ряди Фур'є не збігаються до таких функцій в точках ліній розриву (явище Гіббса). В цьому випадку, як правило, використовуються суми Фейера.

**Теорема 1.** Для мінімізації числа проекцій, які використовуються при наближеному обчисленні коефіцієнтів Фур'є за наведеними раніше формулами, треба, щоб їх кількість  $M$  була пов'язана з порядком суми Фур'є формулою

$$M \approx N^{\frac{R}{2}}.$$

**Доведення.** Згідно з поданим твердженням, при оцінці збіжності сум Фур'є функції  $f(x, y)$ , які є періодичними та мають неперервні похідні  $R$ -го порядку і не перевищують  $M$ , похибка

наближення цієї функції сумою Фур'є, має оцінку  $\xi_1 = O\left(\frac{M}{N^{R+1}}\right)$ .

**Приклад 1.**  $f(x, y) = S(x, X) \cdot S(y, Y)$  є неперервною та періодичною,

$$X = \{0; 0,25; 0,5; 1\} \quad Y = \{0; 0,3; 0,75; 1\}$$

$$S(x, X) = \begin{cases} 0, & x \leq X_0, \\ \frac{x}{X_1}, & X_0 < x \leq X_1, \\ \frac{x-X_2}{X_1-X_2} \cdot 1 + \frac{x-X_1}{X_2-X_1} \cdot 1,5, & X_1 < x \leq X_2, \\ \frac{x-X_3}{X_2-X_3} \cdot 1,5, & X_2 < x \leq X_3, \\ 0, & x \geq X_3. \end{cases}$$

Вхідні дані та результат тестової задачі для значення  $N$  (порядок суми Фур'є), рівного чотирьом, і кількості джерел та приймачів по 10 на кожній стороні показано на рис. 2.

Результати розв'язку задачі для різного порядку суми Фур'є ( $N$ ), представлено у табл. 1.

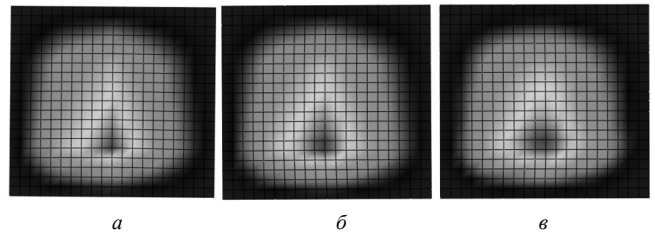


Рис. 2. Результати:  $a$  – вхідні дані;  $b$  – результати обчислень за допомогою сум Фур'є;  $v$  – результати обчислень методом, описаним в [16, 17]

**Приклад 2.**  $f(x, y) = S(x, X) \cdot S(y, Y)$  є неперервною, періодичною та один раз диференційованою,

$$X = \{0; 0,25; 0,5; 1\} \quad Y = \{0; 0,3; 0,75; 1\}$$

**Таблиця 1.** Результати розв'язку прикладу 1 для різних  $N$

Порядок суми Фур'є	Кількість джерел та приймачів	Абсолютна похибка		
		значень, обчислених за допомогою суми Фур'є	значень, обчислених методом, описаним в [16, 17]	точних коефіцієнтів Фур'є та коефіцієнтів, обчислених методом, описаним в [16, 17]
4	10, 10	0,22	0,22	$9,582 \cdot 10^{-3}$
4	20, 20	0,22	0,237	$3,108 \cdot 10^{-3}$
8	10, 10	0,115	0,262	0,023
8	20, 20	0,115	0,149	$3,108 \cdot 10^{-3}$

$$s(x, X) = \begin{cases} 0, & x \leq X_0, \\ \frac{(x - X_0)^2}{X_1 - X_0}, & X_0 < x \leq X_1, \\ X_2 - X_0 + \frac{(x - X_2)^2}{X_1 - X_2} - \frac{(x - X_1)^2}{X_2 - X_1} \frac{X_2 - X_0}{X_3 - X_1}, & X_1 < x \leq X_2, \\ \frac{(X_2 - X_0)(X_3 - X_2)}{X_3 - X_1} - \frac{(x - X_3)^2}{X_2 - X_3} - \frac{(X_3 - X_2)^2}{X_3 - X_1} \frac{X_2 - X_0}{X_3 - X_1}, & X_2 < x \leq X_3, \\ 0, & x \geq X_3. \end{cases}$$

Вхідні дані та результат тестової задачі для значення  $N$  (порядок суми Фур'є), рівні чотирьом, кількості джерел та приймачів по 10 на кожній стороні, показано на рис. 3.

Результати розв'язку задачі для різного  $N$  представлено у табл. 2.

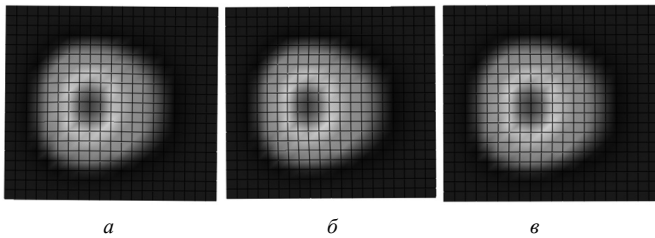


Рис. 3. Результати: *a* – вхідні дані; *b* – результати обчислень за допомогою сум Фур'є; *v* – результати обчислень методом, описаним в [16, 17]

**Висновок.** Отже, в роботі запропоновано використовувати метод, описаний в роботах [16, 17] для знаходження першого наближення при розв'язанні задачі шахтної сейсмічної томографії. Основною перевагою цього методу порівняно з відомими, описаними в [2], є явні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є за допомогою проєкцій паралельних прямих  $kx + ly = t$ , зручні для обчислень за допомогою систем комп'ютерної математики (*MathCAD*, *MatLab* тощо).

Приклади підтверджують ефективність запропонованого методу. Їх аналіз дозволяє зробити висновок, що метод може бути використаний за невеликої кількості джерел і приймачів, що важливо з практичної точки зору. Приклад, для якого функція є неперервною, періодичною та один раз диференційованою, має меншу похиб-

ку, ніж перший приклад. Для першого прикладу, при обчисленні коефіцієнтів Фур'є з параметрами  $N = 4$ , а кількість джерел та приймачів для кожної з сторін дорівнює 10, максимальну похибку отримано для коефіцієнтів  $C_{-3,0}$  та  $C_{3,0}$ . В даній статті запропоновано новий спосіб дослідження внутрішньої структури прямокутного тіла за часом приходу сейсмічної хвилі від конкретного джерела системи джерел до кожного приймача системи приймачів. Унікальність методу полягає у тому, що не потрібно розв'язувати системи рівнянь, як у класичному методі об'єднаних часів прибуття [3].

Метод дозволяє точно відновити структуру у вигляді тригонометричного полінома степеня  $N$  за кожною змінною  $x, y$  в тому випадку, коли цю структуру описано вказаним тригонометричним поліномом.

1. Анциферов А.В. Теория и практика шахтной сейсморазведки. – Донецк: Алан, 2003. – 311 с.
2. Gottlieb D., Gustafsson B. On the Direct Fourier Method for Computer Tomography // Dept. Scientific Computing, Uppsala Univ., Sweden, Tech. Rep. –1998. – 207. – 31 p.
3. Guust Nolet. A breviary of seismic tomography. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. – 344 p.
4. James G. Berryman. Lectures Notes on Nonlinear Inversion and Tomography. I. Borehole seismic tomography. – University of California, Oct., 1991. – 159 p.
5. Иванссон С. Межскважинная томография на проходящих волнах / Сейсмическая томография / Под ред. Guust Nolet. Гл. 7. – М.: Мир, 1990.
6. Stein S., Wysession M. An introduction to seismology, earthquakes and Earth structure. – Blackwell, Malden, USA, 2003. – 512 p.
7. Shearer P.M. Introduction to seismology. – Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press., 2009. – 412 p.
8. Тимошин Ю.В. Основы дифракционного преобразования сейсмических записей. – М.: Недра, 1972. – 264 с.
9. Кейлис-Борок В.И. Интерференционные поверхностные волны. – М.: Наука, 1960. – 194 с.

Таблиця 2. Результати розв'язку прикладу 2, для різних  $N$ .

Порядок суми Фур'є	Кількість джерел та приймачів	Абсолютна похибка		
		значень, обчислених за допомогою суми Фур'є	значень, обчислених методом, описаним в [16, 17]	точних коефіцієнтів Фур'є та коефіцієнтів, обчислених методом, описаним в [16, 17]
4	10, 10	0,002	0,004	$3,661 \cdot 10^{-4}$
4	20, 20	0,002	0,003	$8,994 \cdot 10^{-5}$
8	10, 10	$\approx 0$	0,005	$3,661 \cdot 10^{-4}$
8	20, 20	$\approx 0$	0,001	$8,994 \cdot 10^{-5}$

10. *Проведение шахтных сейсмоакустических экспериментов в условиях мощных пластов Карагандинского угольного бассейна* / Б.М. Кенжин, Ю.М. Смирнов, Б.Н. Цай и др. // *Наук. пр. УкрНДМІ НАН України*. – 2009. – № 5. – С. 275–284.
11. *Туркель М.Г.* Новый вариант томографии при сейсмическом прогнозе строения горного массива // *Геотехн. механика*. – 2005. – № 56. – С. 62–72.
12. *Технология и результаты сейсотомографических исследований на проходящих волнах в угольных шахтах Кузбасса* / А.С. Сальников, Б.А. Канарейкин, С.В. Долгова и др. // *Технологии сейсморазведки*. – 2012. – № 2. – С. 74–88.
13. *Thomson W.T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // *J. Appl. Phys.* – 1950. – N 21. – P. 89–93.
14. *Haskell N.A.* Radiation pattern of surface waves from point sources in a multilayered medium // *Bull. seism. Soc. America*. – 1965. – 54, N 1. – P. 377–393.
15. *Чепмен К.* Преобразование Радона и сейсмическая томография // *Сейсмическая томография* / Под ред. Г. Нолетта. – М.: Мир, 1990. – С. 34–60.
16. *Литвин О.М.* Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії // *Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісн. Харк. держ. політех. ун-ту*. Зб. наук. пр. – 2000. – № 125. – С. 27–35.
17. *Кулик С.І.* Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням вейвлетів: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Харків, 2008. – 22 с.
18. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – 656 с.

Поступила 07.04.2016

E-mail: vdragun.94@gmail.com

© О.М. Литвин, В.В. Драгун, 2016

О.Н. Литвин, В.В. Драгун

## Метод нахождения первого приближения для решения задачи шахтной сейсмической томографии в неоднородной среде

**Введение.** Сейсмическая томография – одно из актуальных направлений современной геофизики, основанное на построении изображений объекта путем исследования траекторий распространения сейсмических сигналов [1–3, 8].

Шахтные сейсморазведочные работы, направленные на прогноз и исследование геологических нарушений угольного пласта, выполняются с использованием трех основных методов: отраженных волн, сейсмического просвечивания и сейсмической локации впереди забоя [1–3, 8]. Сущность методов сейсморазведки в целом заключается в возбуждении и регистрации упругих колебаний в пределах угольного пласта, в выделении и анализе динамических и кинематических параметров волн разных типов.

### Обзор литературных источников

Основные утверждения теории сейсмографии изложены в работах [1–3, 15].

Монография [1] – первая обобщающая работа по применению шахтной сейсморазведки для прогноза горно-геологических осложнений при разработке угольных пластов в конкретных условиях, типичных для угольных бассейнов Украины.

На примере участка готовящейся к отработке лавы шахты дан анализ особенностей проведения шахтных сейсмоакустических экспериментов в условиях мощных пластов Карагандинского угольного бассейна, его короткая геологическая характеристика и характеристика непосредственно участка исследований [10].

Сейсмическая и амплитудная томография исследуется в [11]. Предлагается также для описания аномалии

использовать обработку волновых пакетов, отраженных от расположенной за ней резкой акустической границы.

Обобщенные результаты сейсмических исследований в шахтах Кузбасса по технологии просвечивания угольных пластов с использованием автономных станций регистрации сейсмических данных содержатся в [12].

Выражения для скорости интерференционных волн Лява и Рэлея в дискретно-слоистой модели среды впервые данные в [13, 14], предложенный метод получил название *метод Томсона–Хаскелла*.

Модель *n*-слоистого полупространства – упругой системы, состоящей из произвольного числа плоскопараллельных слоев и полупространства, заполненных однородной изотропной средой, рассмотрена в [9].

Основы предложенного авторами принципиально нового метода решения динамической обратной задачи сейсмологии – дифракционного преобразования сейсмических записей в изображение среды, осуществляемого, как и в оптической голографии, методом восстановления волнового поля для гармонического и нестационарного излучения на базе модифицированного дифракционного интеграла Кирхгофа, изложены в [8].

Новый метод решения плоской задачи радоновской компьютерной томографии предложен в [16]. В основу метода положены оригинальные формулы вычисления коэффициентов Фурье функций двух переменных с помощью проекций вдоль некоторой системы линий, пересекающие объект исследования (рис. 1). Существенная особенность метода – замена тригонометрических функций кусочно-постоянными сплайнами наилучшего равномерного приближения.



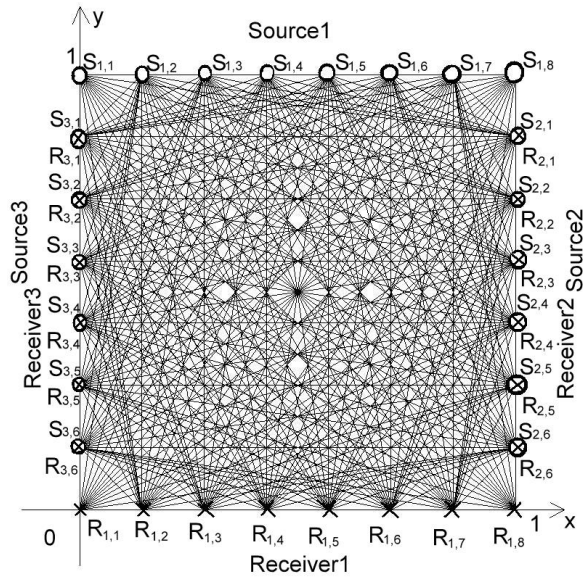


Рис. 1. Схема расположения линий

Суть метода заключается в математическом моделировании структуры тела в виде конечной суммы ряда Фурье

$$F(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N C_{k,l} e^{-i2\pi(kx+ly)} \quad (1)$$

где  $C_{kl} = \iint_0^1 f(x, y) e^{i2\pi(kx+ly)} dx dy$  – коэффициенты Фурье

неизвестной функции  $f(x, y)$ , описывающей структуру тела, которую предлагается вычислять с помощью времени пробега сейсмических волн от системы источников в систему приемников. Формулы для их вычисления, используемые в данной работе для случая, когда известны не проекции, а времена прибытия приведены в [16, 17].

Метод, представленный в [16], был развит в диссертационной работе [17], где рассматривается проблема разработки и исследования численной реализации и нового метода решения плоской задачи компьютерной томографии, предложенного в [16].

Как результат, автором работы [17] был предложен и исследован оригинальный метод решения плоской задачи компьютерной томографии с помощью вэйвлетов Хаара, который использует оригинальную схему сканирования, вытекающей из [16], отличную от действующих в компьютерных томографах.

### Основные положения

Будем считать, что неизвестная функция  $f(x, y)$  есть медлительностью  $W(x, y)$ , т.е. функцией, которая в каждой точке  $(x, y)$  – величина, обратная к скорости  $(x, y)$ :

$$f(x, y) - W(x, y) = \frac{1}{V(x, y)}$$

При вычислении коэффициентов Фурье  $CF_{k,l} = \iint_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy$  с помощью проекций, методом, описанным в работах [16, 17], справедливы равенства:

$$CF_{0,0} = \iint_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \gamma_2(y) dy, \quad \gamma_2(y) = \int_0^1 f(x, y) dx,$$

где  $k = 0, l = 0$ ,

$$CF_{k,0} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi kx} dx dy = \int_0^1 \gamma_1(x) e^{-i2\pi kx} dx,$$

$$\gamma_1(x) = \int_0^1 f(x, y) dy, \quad \text{где } k > 0, l = 0,$$

$$CF_{0,l} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi ly} dx dy = \int_0^1 \gamma_2(y) e^{-i2\pi ly} dy,$$

где  $k = 0, l > 0$ .

При  $k < 0, l < 0$  имеем  $CF_{-|k|,0} = \overline{CF_{|k|,0}}$ ;  $CF_{0,-|l|} = \overline{CF_{0,|l|}}$ ,  $\overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta$ .

Для  $k \geq 1, l \geq 1$ :

1. При  $k \geq l$ :

$$CF_{k,l} = I_1 + I_2 + I_3, \quad I_1 = l \int_0^1 \frac{F_1(zl) e^{-i2\pi zl} dz}{k^2 + l^2},$$

$$I_2 = \frac{k-l}{k^2 + l^2} \int_0^1 F_2(l + z(k-l)) e^{-i2\pi(l+z(k-l))} dz,$$

$$I_3 = l \int_0^1 \frac{F_3(k + zl) e^{-i2\pi(k+zl)} dz}{k^2 + l^2},$$

где

$$F_1(t) = \int_{\frac{l}{k}}^{\frac{k}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv,$$

$$F_2(t) = \int_{\frac{l}{k}}^{\frac{k^2+l^2-lt}{k}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv,$$

$$F_3(t) = \int_{\frac{1}{l}(-k^2-l^2+kt)}^{\frac{1}{k}(k^2+l^2-lt)} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv.$$

2. При  $k < l$ :

$$CF_{k,l} = I_1 + I_2 + I_3, \quad I_1 = \frac{k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi kz} G_1(kz) dz,$$

$$I_2 = \frac{l-k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(k+z(l-k))} G_2(k + z(l-k)) dz,$$

$$I_3 = \frac{k}{k^2 + l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(l+kz)} G_3(l + kz) dz,$$

где

$$G_1(t) = \int_{-\frac{l}{k}t}^{\frac{k}{l}t} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv,$$

$$G_2(t) = \int_{\frac{-k^2-l^2+kt}{l}}^{\frac{k}{l}t} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv,$$

$$G_3(t) = \int_{\frac{-k^2-l^2+kt}{l}}^{\frac{k^2+l^2-lt}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv.$$

3. При  $k \geq l \geq 1$ :

$$CF_{k,-l} = I_1 + I_2 + I_3, \quad I_1 = \frac{l}{k^2+l^2} \int_0^1 \varphi_1(z(-l)) e^{-i2\pi z(-l)} dz,$$

$$I_2 = \frac{k-l}{k^2+l^2} \int_0^1 \varphi_2(z(k-l)) e^{-i2\pi z(k-l)} dz,$$

$$I_3 = \frac{l}{k^2+l^2} \int_0^1 \varphi_3(k-l+zl) e^{-i2\pi(k-l+zl)} dz,$$

где

$$\varphi_1(v) = \int_{\frac{-kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$$

$$\varphi_2(v) = \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$$

$$\varphi_3(v) = \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt.$$

4. При  $1 \leq k < l$ :

$$CF_{k,-l} = I_1 + I_2 + I_3, \quad I_1 = \frac{k}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi(kz-l)} \omega_1(kz-l) dz,$$

$$I_2 = \frac{l-k}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi z(k-l)} \omega_2(z(k-l)) dz,$$

$$I_3 = \frac{k}{k^2+l^2} \int_0^1 e^{-i2\pi kz} \omega_3(kz) dz,$$

где

$$\omega_1(v) = \int_{\frac{-kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2+lv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$$

$$\omega_2(v) = \int_{\frac{-kv}{l}}^{\frac{k^2+l^2-kv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt,$$

$$\omega_3(v) = \int_{\frac{lv}{k}}^{\frac{k^2+l^2-kv}{k}} f\left(\frac{kv+lt}{k^2+l^2}, \frac{kt-lv}{k^2+l^2}\right) dt.$$

Для значений  $k, l$ , удовлетворяющих условию  $k, l \leq -1$ , выполняется равенство:

$$CF_{-k,-l} = \overline{CF_{k,l}}; \quad CF_{-k,l} = \overline{CF_{k,-l}}, \quad \overline{\alpha+i\beta} = \alpha-i\beta$$

Доказательство этих формул – в [17].

Существенная особенность интегралов  $\omega_1(v)$ ,  $\omega_2(v)$ ,  $\omega_3(v)$  и им подобных, – то, что они считаются известными только для дискретного количества значений переменной  $v$ .

Функции  $F_\mu$ ,  $G_\mu$ ,  $\varphi_\mu$ ,  $\omega_\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3$  – это проекции, полученные интегрированием функции  $f(x, y)$  вдоль прямых, пересекающих квадрат  $[0, 1]^2$  и параллельных прямых  $kx + ly = t$ .

Далее приведены явные выражения для приближенного вычисления коэффициентов Фурье предложенным в данной работе методом замены функций  $F_\mu$ ,  $G_\mu$ ,  $\varphi_\mu$ ,  $\omega_\mu$  конечными суммами вэйвлетов Хаара.

Для приближенного вычисления коэффициентов Фурье с использованием вэйвлетов Хаара с помощью дискретного набора проекций имеем формулы

$$CF_{0,0} \approx CF_{0,0,M} = \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M \gamma 1_p = \frac{1}{M} \sum_{q=1}^M \gamma 2_q,$$

$$CF_{k,0} \approx CF_{k,0,M} = \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M \gamma 1_p e^{-i\frac{p}{M}},$$

$$CF_{0,l} \approx CF_{0,l,M} = \frac{1}{M} \sum_{q=1}^M \gamma 2_q e^{-i\frac{q}{M}},$$

$$CF_{k,l} \approx CF_{k,l,N} = I_{1,k,l,N_1} + I_{2,k,l,N_2} + I_{3,k,l,N_3}, \quad k \geq l \geq 1,$$

$$I_{1,k,l,N_1} = \frac{l}{k^2+l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{l}{N_1}} - 1}{-i2\pi l} \right) \sum_{q=0}^{N_1-1} \dot{F}_1 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi\frac{q}{N_1}l},$$

$$\dot{F}_1(z) = F_1(zl), \quad z_q = \frac{q}{N_1},$$

$$I_{2,k,l,N_2} = \frac{k-l}{k^2+l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{k-l}{N_2}} - 1}{-i2\pi(k-l)} \right) \sum_{q=0}^{N_2-1} \dot{F}_2 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi\frac{q}{N_2}(k-l)},$$

$$\dot{F}_2(z) = F_2(l + z(k-l)), \quad z_q = \frac{q}{N_2},$$

$$I_{3,k,l,N_3} = \frac{l}{k^2+l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{l}{N_3}} - 1}{-i2\pi l} \right) \sum_{q=0}^{N_3-1} \dot{F}_3 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi\frac{q}{N_3}l},$$

$$\dot{F}_3(z) = F_3(k + zl), \quad z_q = \frac{q}{N_3}.$$

$$CF_{k,l} \approx CF_{k,l,N} = I_{1,k,l,N_1} + I_{2,k,l,N_2} + I_{3,k,l,N_3}, \quad l > k \geq 1,$$

где  $I_{1,k,l,N_1} = \frac{k}{k^2+l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{k}{N_1}} - 1}{-i2\pi k} \right) \sum_{q=0}^{N_1-1} \dot{G}_1 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi\frac{q}{N_1}k},$

$$\dot{G}_1(z) = G_1(zk), \quad z_q = \frac{q}{N_1},$$

$$I_{2,k,l,N_2} = \frac{l-k}{k^2+l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{l-k}{N_2}} - 1}{-i2\pi(l-k)} \right) \sum_{q=0}^{N_2-1} \dot{G}_2 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi\frac{q}{N_2}(l-k)},$$

$$\dot{G}_2(z) = G_2(k+z(l-k)), \quad z_q = \frac{q}{N_2},$$

$$I_{3,k,l,N_3} = \frac{k}{k^2+l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{k}{N_3}} - 1}{-i2\pi k} \right) \sum_{q=0}^{N_3-1} \dot{G}_3 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi\frac{q}{N_3}},$$

$$\dot{G}_3(z) = G_3(l+kz), \quad z_q = \frac{q}{N_3}.$$

$$CF_{k,-l} \approx CF_{k,-l,N} = I_{1,k,l,N_1} + I_{2,k,l,N_2} + I_{3,k,l,N_3}, \quad k > l > 0,$$

где

$$I_{1,k,l,N_1} = \frac{l}{k^2+l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{(-l)}{N_1}} - 1}{-i2\pi(-l)} \right) \sum_{q=0}^{N_1-1} \dot{\Phi}_1 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi(-l)\frac{q}{N_1}},$$

$$\dot{\Phi}_1(z) = \Phi_1(z(-l)), \quad z_q = \frac{q}{N_1},$$

$$I_{2,k,l,N_2} = \frac{k-l}{k^2+l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{k-l}{N_2}} - 1}{-i2\pi(k-l)} \right) \sum_{q=0}^{N_2-1} \dot{\Phi}_2 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi(k-l)\frac{q}{N_2}},$$

$$\dot{\Phi}_2(z) = \Phi_2(z(k-l)), \quad z_q = \frac{q}{N_2},$$

$$I_{3,k,l,N_3} = \frac{l}{k^2+l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{l}{N_3}} - 1}{-i2\pi l} \right) \sum_{q=0}^{N_3-1} \dot{\Phi}_3 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi l\frac{q}{N_3}},$$

$$\dot{\Phi}_3(z) = \Phi_3(k-l+zl), \quad z_q = \frac{q}{N_3}.$$

$$CF_{k,-l} \approx CF_{k,-l,N} = I_{1,k,l,N_1} + I_{2,k,l,N_2} + I_{3,k,l,N_3}, \quad l > k > 0,$$

где,

$$I_{1,k,l,N_1} = \frac{k}{k^2+l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{k}{N_1}} - 1}{-i2\pi k} \right) \sum_{q=0}^{N_1-1} \dot{\omega}_1 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi\frac{q}{N_1}}$$

$$\dot{\omega}_1(z) = \omega_1(kz-l), \quad z_q = \frac{q}{N_1},$$

$$I_{2,k,l,N_2} = \frac{l-k}{k^2+l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{k-l}{N_2}} - 1}{-i2\pi(k-l)} \right) \sum_{q=0}^{N_2-1} \dot{\omega}_2 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi(k-l)\frac{q}{N_2}}$$

$$\dot{\omega}_2(z) = \omega_2(z(k-l)), \quad z_q = \frac{q}{N_2},$$

$$I_{3,k,l,N_3} = \frac{k}{k^2+l^2} \left( \frac{e^{-i2\pi\frac{k}{N_3}} - 1}{-i2\pi k} \right) \sum_{q=0}^{N_3-1} \dot{\omega}_3 \left( \frac{z_q + z_{q+1}}{2} \right) e^{-i2\pi\frac{q}{N_3}},$$

$$\dot{\omega}_3(z) = \omega_3(kz), \quad z_q = \frac{q}{N_3}.$$

В реальных условиях шахтной сейсмической томографии, в отличие от компьютерной томографии, лучи только в отдельных случаях есть прямыми линиями, что ограничивает использование метода, описанного в работах [16, 17]. При более точном приближении можно рассмотреть невязку времен прибытия луча [15]

$$\delta T(p, \varphi) = \int_L \delta u(x) ds, \quad (2)$$

где  $T = T_0 + \delta T$  и  $u = u_0 + \delta u$ . Опорные времена пробега  $T_0(p, \varphi) = \int_{L_0} \delta u_0(x) ds$  вычисляются для лучей, соответ-

ствующих медлительности опорной модели  $u_0(x)$ , и при интерпретации невязок (2) лучи считаются прямолинейными, т.е. можно использовать метод, описанный в [16, 17].

Предположим, что имеется какое-то прямоугольное тело. Путем замены переменных приведем тело к квадрату  $[0,1] \times [0,1]$ , на сторонах которого расположим источники и приемники сейсмического сигнала, пример одного из вариантов такого расположения приведен на рис. 1. В результате получим время прибытия сейсмической волны от каждого источника в каждый приемник. Зная координаты точек, в которых размещены источники и детекторы, с помощью времен прибытия сейсмического сигнала от источников к приемникам, можно вычислить медлительность распространения сейсмического сигнала вдоль прямой, соединяющей источник с приемником (см. рис. 1)

Зная координаты точек, где размещены источники и приемники, и время прибытия сейсмического сигнала от источников к приемникам, можно решить данную задачу методом решения плоской задачи радоновской компьютерной томографии [16].

Тогда в формуле

$$F(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N C_{k,l} e^{-i2\pi(kx+ly)}, \quad f(x, y) = \frac{1}{V(x, y)},$$

$V$  – скорость распространения сейсмического сигнала в координате  $(x, y)$ , а неизвестная функция  $f(x, y)$  есть функция медлительности распространения волны в каждой точке от источника сейсмического сигнала к приемнику.

Подсчитав сумму Фурье, получим  $F(x, y)$  – приближенное значение функции  $f(x, y) = W(x, y) = \frac{1}{V(x, y)}$ .

Если периодическая непрерывная функция  $f(x)$  имеет непрерывные производные до  $(k-1)$ -го порядка включительно, а производная  $k$ -го порядка является функци-

ей, удовлетворяющей условиям Дирихле, то коэффициенты Фурье  $a_n, b_n$  функции  $f(x)$  будут не ниже  $\frac{1}{n^{k+1}}$ , т.е. будут иметь оценку

$$|a_n| \leq \frac{Q}{n^{k+1}}, \quad |b_n| \leq \frac{Q}{n^{k+1}},$$

где  $Q$  – некоторое положительное число  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx$  и  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx$  [17].

При  $k \geq 1$  ряд Фурье функции  $f(x)$  будет равномерно сходящимся. Поскольку коэффициенты  $a_n, b_n$  удовлетворяют неравенству

$$|a_n| < \frac{Q}{n^{k+1}}, \quad |b_n| < \frac{Q}{n^{k+1}},$$

а общий член ряда будет иметь оценку

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| < \frac{2Q}{n^2},$$

то получим абсолютную и равномерную сходимость ряда, так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  – сходящийся.

Эти утверждения соответствующим образом переносятся на случай дифференцированных функций двух переменных  $f(x, y)$ . Если функция, которая приближается, имеет разрывы первого рода, то, как известно, ряды Фурье не сходятся к таким функциям в точках линий разрыва (явление Гиббса). В этом случае обычно используются суммы Фейера.

**Теорема 1.** Для минимизации числа проекций, используемых при приближенном вычислении коэффициентов Фурье по приведенным выше формулам, надо чтобы их количество  $M$  было связано с порядком суммы

Фурье такой формулой  $M \approx N^{\frac{R}{2}}$ .

**Доказательство.** Согласно приведенным утверждениям при оценке сходимости сумм Фурье функции  $f(x, y)$ , которые являются периодическими и имеют непрерывные производные  $R$ -го порядка, не превышающие  $M$ , погрешность приближения этой функции суммой Фурье имеет оценку  $\xi_1 = O\left(\frac{M}{N^{R+1}}\right)$ .

**Пример 1.**  $f(x, y) = S(x, X) \cdot S(y, Y)$  – непрерывная и периодическая,

$$X = \{0; 0, 25; 0, 5; 1\} \quad Y = \{0; 0, 3; 0, 75; 1\}$$

$$S(x, X) = \begin{cases} 0, x \leq X_0, \\ \frac{x}{X_1}, X_0 < x \leq X_1, \\ \frac{x - X_2}{X_1 - X_2} \cdot 1 + \frac{x - X_1}{X_2 - X_1} \cdot 1.5, X_1 < x \leq X_2, \\ \frac{x - X_3}{X_2 - X_3} \cdot 1.5, X_2 < x \leq X_3, \\ 0, x \geq X_3. \end{cases}$$

Входные данные и результат тестовой задачи для значения  $N$  (порядок суммы Фурье), равного четырем, и количества источников и приемников по 10 на каждой стороне, показаны рис. 2.

Результаты решения задачи для разного порядка суммы Фурье ( $N$ ) представлены в табл. 1.

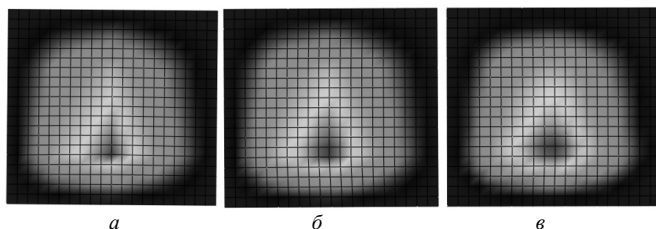


Рис. 2. Результаты:  $a$  – входные данные;  $b$  – результаты вычислений с помощью сумм Фурье;  $v$  – результаты вычислений методом, описанным в [16, 17]

**Пример 2.**  $f(x, y) = S(x, X) \cdot S(y, Y)$  – непрерывная, периодическая и один раз дифференцированная,

$$X = \{0; 0, 25; 0, 5; 1\} \quad Y = \{0; 0, 3; 0, 75; 1\}$$

$$S(x, X) = \begin{cases} 0, x \leq X_0, \\ \frac{(x - X_0)^2}{X_1 - X_0}, X_0 < x \leq X_1, \\ X_2 - X_0 + \frac{(x - X_2)^2}{X_1 - X_2} - \frac{(x - X_1)^2}{X_2 - X_1} \cdot \frac{X_2 - X_0}{X_3 - X_1}, X_1 < x \leq X_2, \\ \frac{(X_2 - X_0)(X_3 - X_2)}{X_3 - X_1} - \frac{(x - X_3)^2}{X_2 - X_3} - \frac{(X_3 - X_2)^2}{X_3 - X_1} \cdot \frac{X_2 - X_0}{X_3 - X_1}, X_2 < x \leq X_3, \\ 0, x \geq X_3. \end{cases}$$

Входные данные и результат тестовой задачи для значения  $N$  (порядок суммы Фурье), равный четырем, количество источников и приемников по 10 на каждой стороне, показаны на рис. 3.

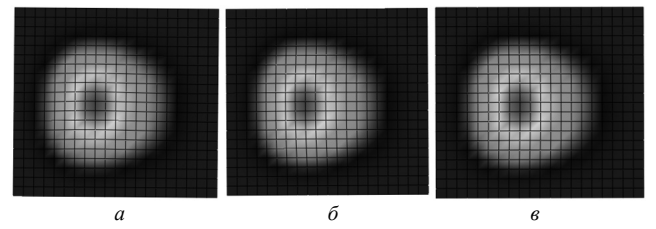


Рис. 3. Результаты:  $a$  – входные данные;  $b$  – результаты вычислений с помощью сумм Фурье;  $v$  – результаты вычислений методом, описанным в [16, 17]

Результаты решения задачи для разного порядка суммы Фурье ( $N$ ) представлены в табл. 2.

**Заключение.** Итак, в данной статье предложен метод, описанный в [16, 17] для нахождения первого приближения при решении задачи шахтной сейсмической томографии. Основное преимущество этого метода в сравнении с известным методом, описанным в [2], явные формулы для вычисления коэффициентов Фурье с помощью проекций, параллельных прямым  $kx + ly = t$ , удобным для вычисления с помощью систем компьютерной математики (*MathCAD, MatLab* и т.п).

**Таблица 1.** Результаты решения примера 1 для различных  $N$

Порядок суммы Фурье	Количество источников и приемников	Абсолютная погрешность		
		значений, вычисленных с помощью суммы Фурье	значений, вычисленных методом, описанным в [16, 17]	точных коэффициентов Фурье и коэффициентов, вычисленных методом, описанным в [16, 17]
4	10, 10	0,22	0,22	$9,582 \cdot 10^{-3}$
4	20, 20	0,22	0,237	$3,108 \cdot 10^{-3}$
8	10, 10	0,115	0,262	0,023
8	20, 20	0,115	0,149	$3,108 \cdot 10^{-3}$

**Таблица 2.** Результаты решения примера 2 для различных  $N$

Порядок суммы Фурье	Количество источников и приемников	Абсолютная погрешность		
		значений, вычисленных с помощью суммы Фурье	значений, вычисленных методом, описанным в [16, 17]	точных коэффициентов Фурье и коэффициентов, вычисленных методом, описанным в [16, 17]
4	10, 10	0,002	0,004	$3,661 \cdot 10^{-4}$
4	20, 20	0,002	0,003	$8,994 \cdot 10^{-5}$
8	10, 10	$\approx 0$	0,005	$3,661 \cdot 10^{-4}$
8	20, 20	$\approx 0$	0,001	$8,994 \cdot 10^{-5}$

Примеры подтверждают эффективность предложенного метода; их анализ позволяет сделать вывод о том, что метод может быть использован при небольшом количестве источников и приемников, что важно с практической точки зрения. Пример, для которого функция непрерывна, периодическая и один раз дифференцированная имеет меньшую ошибку, чем первый пример. Для первого примера при вычислении коэффициентов Фурье с параметрами  $N = 4$ , а количеством источников и приемников для каждой из сторон, равным 10, максимальная ошибка была получена для коэффициентов  $C_{-3,0}$  и  $C_{3,0}$ . В данной статье предложен новый способ исследования

внутренней структуры прямоугольного тела по времени прихода сейсмической волны от конкретного источника системы источников к каждому приемнику системы приемников. Уникальность метода состоит в том, что не требуется решать системы уравнений, как в классическом методе обратных времен прибытия [3].

Предложенный метод позволяет точно восстановить структуру в виде тригонометрического полинома степени  $N$  по каждой переменной  $x, y$  в том случае, если эта структура описана указанным тригонометрическим полиномом.

UDC 519.6

O.N. Lytvyn, V.V. Drahun

## The Method Finding the First Approach to Solving the Problem of Mint Seismic Tomography in Heterogeneous Environment

**Keywords:** mine seismic tomography, first approximation.

**Introduction.** The mineral resources extraction can be observed worldwide. Since the error in determining the mineral resources location may result the losses, it is obvious, that a necessity for the reliable methods search of the mineral resources exploration appears.

**Purpose** of the research is to analyze the literature on mineral exploration, to study the method of finding a first approximation, to carry out computational experiments and to study new method of finding a first approximation to solve the mine seismic tomography problem.

**Methods:** studying and generalization of advanced experience, literature analysis, method of algorithmization.

**The results and conclusions.** A method of the plane problem solving of mine seismic tomography is presented. It is based on the solution in the form of finite sums of Fourier. The Fourier coefficients are calculated using the passage of the seismic waves known time from the sources to the seismometers.

